

Nome e Cognome:						
Anno di frequenza:						
Numero di matricola						
	-	-	= $\alpha - 1$	= $\beta - 1$	= $\gamma - 1$	= $\delta - 1$

**A (pt. 3)** Tracciare i diagrammi di Bode, Nyquist e Nichols relativi al sistema:

$$G(s) = \frac{10(0.01\alpha s + 1)}{(\beta^2 s^2 + s + 1)(0.002s + 1)^2}$$

indicando i valori nei punti salienti del primo.

**B (pt. 8)** Per il sistema di cui al punto **A**, progettare un controllore che realizzi in prima approssimazione le seguenti specifiche:

- errore a regime al gradino  $\leq 1\%$ ;
- margine di fase  $\geq \pi/4$ ;
- banda passante in anello chiuso compresa tra  $10^4$  e  $10^5$  rad/sec.
- Dato il sistema tempo-continuo caratterizzato dalla seguente f.d.t.:

$$G(s) = \frac{s + 1}{(s^2 + 1)(s + \gamma)(s + \delta)}$$

**C (pt. 3)** Scrivere le matrici **A**, **B**, **C**, **D** di una realizzazione di dimensione 4 nello spazio degli stati;

**D (pt. 3)** Discutere la stabilità del sistema; trovare i modi del sistema e descriverne graficamente l'evoluzione temporale;

**E-N (pt. 3)** Discutere la raggiungibilità e la osservabilità del sistema al variare dei parametri  $\gamma, \delta$ . Indicare quale è la massima dimensione che può avere il sottosistema irraggiungibile (ovvero inosservabile).

**E-V (pt. 3)** Trovare la risposta a regime del sistema sottoposto all'ingresso  $u(t) = 2 \sin(2t) + \sin(10t)$ .

**F (pt. 4)** Tracciare qualitativamente il luogo delle radici per il sistema per guadagni  $K$  variabili fra 0 e  $+\infty$  nel caso di retroazione unitaria sia negativa che positiva.

Dato il sistema

$$\gamma \ddot{x} + \alpha \dot{x}^2 - \tan(x) = u$$

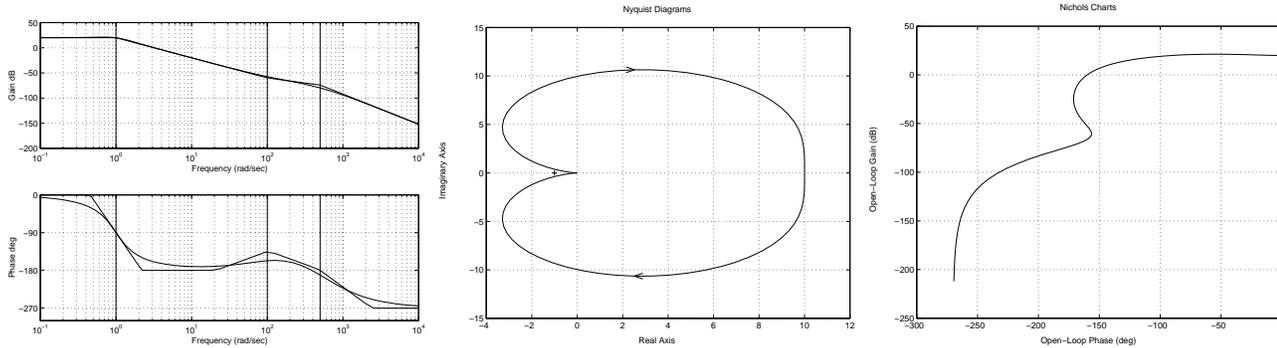
**F (pt. 3)** Trovare i punti di equilibrio con ingresso nullo e studiarne la stabilità.

**G-N (pt. 3)** Trovare una legge di retroazione che renda l'origine un punto di equilibrio globalmente asintoticamente stabile.

**G-V (pt.3)** Si dia una giustificazione del fatto che la pulsazione di taglio del diagramma delle ampiezze di Bode può essere usata come approssimazione della pulsazione di banda passante dello stesso sistema in anello chiuso, e si indichi sotto quali condizioni tale approssimazione è valida.

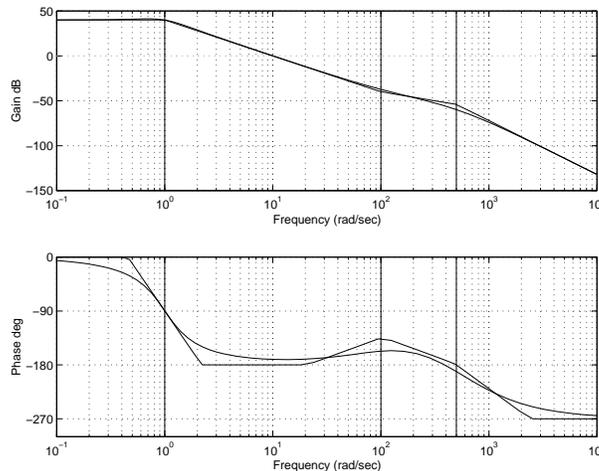
A) Il sistema è già descritto in forma di Bode. La costante di guadagno statico è 10, quindi il contributo in ampiezza è di  $20db$ . Procedendo per pulsazioni crescenti, si trovano i contributi di una coppia di poli complessi coniugati con pulsazione naturale  $\omega_n = 1/\beta$  e coefficiente di smorzamento  $\zeta = 1/2\beta$ , di uno zero in  $-100/\alpha$  e di un polo reale doppio in  $-500$ . Il sistema è a fase minima, per cui il diagramma delle fasi potrebbe essere interamente dedotto a partire dalla conoscenza del diagramma delle ampiezze mediante la Formula di Bode. La pulsazione di taglio si ottiene risolvendo  $20 = 40(\text{Log } \omega_T - \text{Log } \frac{1}{\beta})$ , cioè  $\omega_T = \frac{\sqrt{10}}{\beta}$ .

I diagrammi di Nyquist e Nichols sono ottenuti da quello di Bode senza alcuna difficoltà. Le figure seguenti riportano esempi di diagrammi di Bode, Nyquist e Nichols per  $\alpha = \beta = 1$ .



B) Poiché il sistema è a fase minima, si può procedere semplicemente con la sintesi sui diagrammi di Bode. Fissiamo un controllore  $C(s) = \frac{K}{s^t} C_0(s)$ , con  $C_0(0) = 1$ . Per le specifiche statiche non è richiesto alcun polo nell'origine, quindi poniamo  $t = 0$ . La costante  $K$  viene determinata in base al requisito sull'errore a regime sul gradino: tale errore è pari a  $\frac{1}{10K}$ , quindi occorre che sia  $K \geq 10$ .

Se scegliamo  $K = 10$ , il sistema (dopo la compensazione statica) ha un diagramma di Bode rappresentato nella figura seguente.



La pulsazione di taglio assume il valore  $\omega'_T = \frac{10}{\beta}$ : a tale valore corrisponde una pendenza pari a  $-2$ , eccetto il caso  $\beta = 1, \alpha = 10$ , in cui la pulsazione di taglio coincide con la pulsazione corrispondente allo zero, ossia con valore  $10\text{rad/sec}$ . In ogni caso il valore di tale pulsazione è ben al di sotto dalle specifiche fornite nel testo. Il tipo di azione compensatrice richiesto è chiaramente anticipativo.

Una possibile soluzione consiste nel porre due zeri a cancellare i poli a  $500\text{rad/sec}$ , ed aumentare il guadagno statico sino a che la pulsazione di taglio (a pendenza -1) raggiunge la specifica di  $10^4\text{rad/sec}$ . Per far questo, il guadagno  $K$  deve essere ulteriormente incrementato di  $(80 - 20 \text{Log } \alpha + 40 \text{Log } \beta)\text{db}$ . Una volta fatto questo, è possibile porre due poli a pulsazioni superiori (ad esempio, uno in  $2 \cdot 10^4$  ed uno in  $2 \cdot 10^5$ ) con la funzione di rendere causale il controllore. Il margine di fase viene garantito dal taglio a pendenza -1, che avviene quando gli effetti della pendenza -2 (tra  $1/\beta$  e  $100/\alpha$ ) sono ampiamente assorbiti.

C) Esprimendo la funzione di trasferimento nella forma:

$$G(z) = \frac{s + 1}{s^4 + (\gamma + \delta)s^3 + (1 + \gamma\delta)s^2 + (\gamma + \delta)s + \gamma\delta}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\gamma\delta & -(\gamma + \delta) & -(1 + \gamma\delta) & -(\gamma + \delta) \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

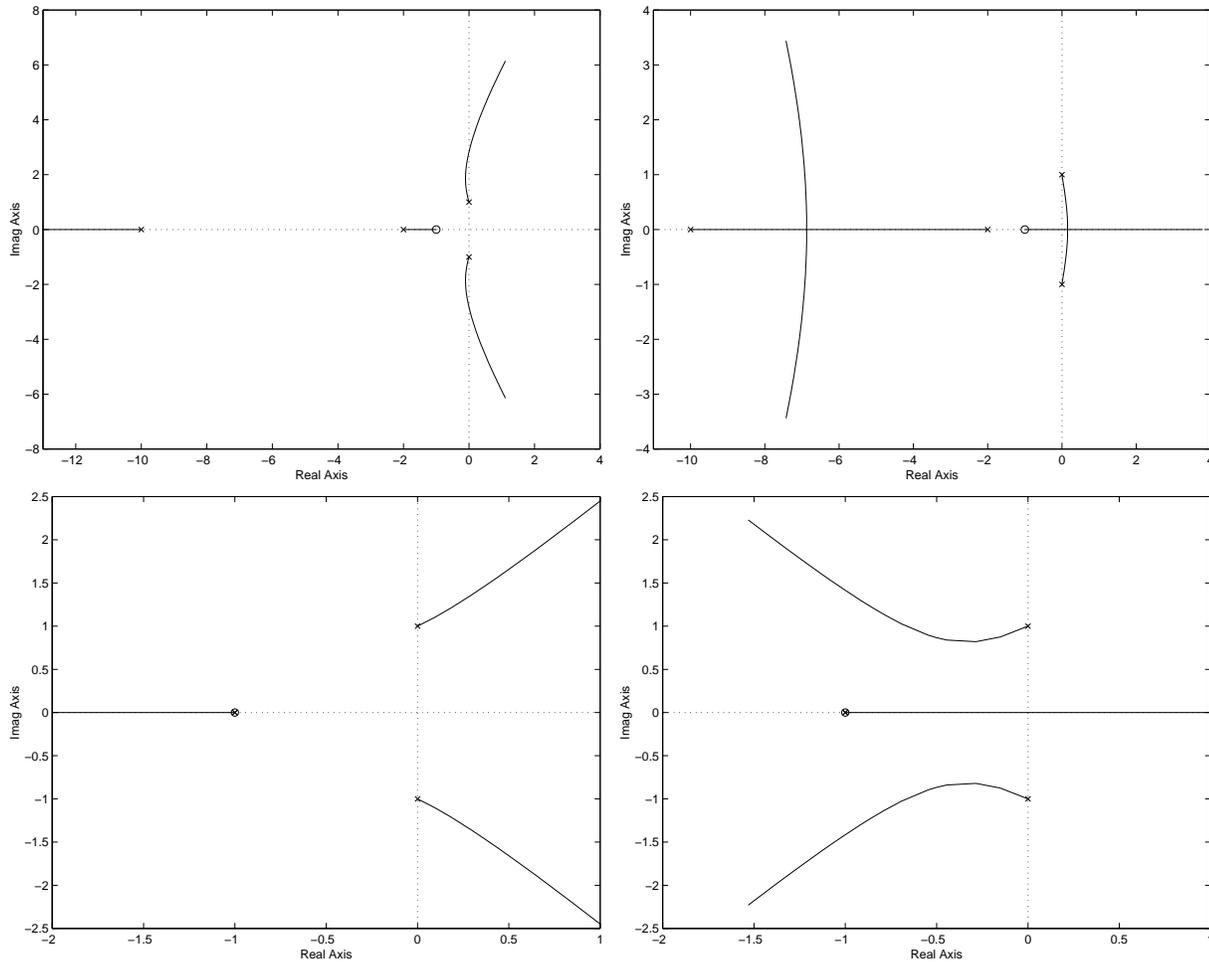
$$\mathbf{C} = [ 1 \ 1 \ 0 \ 0 ] \quad \mathbf{D} = 0$$

**D)** Il sistema presenta due poli reali negativi in  $-\gamma$  e  $-\delta$  (che ovviamente coincidono se  $\gamma = \delta$ ); ed una coppia di poli complessi coniugati immaginari puri in  $\pm i = e^{\pm i\pi/2}$ . I poli complessi coniugati hanno parte reale nulla, pertanto il sistema é marginalmente stabile. I modi del sistema corrispondenti ai poli reali negativi sono  $e^{-\gamma t}$  ed  $e^{-\delta t}$ , se  $\gamma \neq \delta$ , ovvero  $e^{-\gamma t}$  ed  $te^{-\gamma t}$  se  $\gamma = \delta$ . I modi corrispondenti ai poli complessi coniugati sono  $\sin(t)$  e  $\cos(t)$ .

**E-N)** Il sistema scritto in una delle forme canoniche di raggiungibilit  o di osservabilit  ha, per definizione, la corrispondente propriet  caratteristica, mentre risulta avere anche l'altra se e solo se   una realizzazione minima, ovvero se non ci sono cancellazioni nella f.d.t.. Pertanto, usando ad esempio la realizzazione di cui sopra, solo per  $\gamma = 1$  e/o  $\delta = 1$  il sistema non   completamente osservabile. Il sottosistema nonosservabile ha dimensione massima pari a uno in ogni caso. Idem valga per una realizzazione in forma canonica di osservazione ( $A^T, C^T, B^T, D$ ), nel qual caso il sottosistema irraggiungibile pu  avere al massimo dimensione uno.

**E-V)** Occorre calcolare la risposta armonica in corrispondenza delle pulsazioni coinvolte; si ha  $G(j2) = M_1 e^{j\phi_1}$  e  $G(j10) = M_2 e^{j\phi_2}$ , con i valori di  $M_1, M_2, \phi_1, \phi_2$  che ovviamente dipendono dai valori di  $\gamma$  e  $\delta$ , per cui la risposta a regime   pari a  $y(t) = 2M_1 \sin(2t + \phi_1) + M_2 \sin(10t + \phi_2)$ .

**F)** L'eccesso poli-zeri   in ogni caso pari a 3, per cui il luogo presenta 3 asintoti in entrambe i casi. Per retroazione negativa la parte del semiasse reale negativo che sta a sinistra del polo reale negativo minore fa parte del luogo delle radici, mentre per retroazione positiva il semiasse reale positivo fa parte del luogo. Gli altri due asintoti sono inclinati, nei due casi, di  $\pm \frac{\pi}{3}$  e  $\pm \frac{2\pi}{3}$  rispettivamente. Gli asintoti si intersecano nel punto dell'asse reale di ascissa pari a  $(-\gamma - \delta - 1)/3$ . Nelle figure seguenti sono riportati i luoghi richiesti nei caso  $\gamma = 2, \delta = 10$  e nel caso  $\gamma = 1, \delta = 1$ , in cui vi   una cancellazione polo-zero.



$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= \frac{1}{\gamma} \tan(z_1) - \frac{\alpha}{\gamma} z_2^2 + \frac{1}{\gamma} u\end{aligned}$$

I punti di equilibrio sono rappresentati da tutte le coppie  $z_1 = k\pi$ ,  $z_2 = 0$  con  $k$  intero. Per studiare la stabilità degli equilibri si può utilizzare il metodo indiretto di Lyapunov, che richiede di scrivere la matrice dinamica del modello linearizzato. Questa vale

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{\gamma} & 0 \end{bmatrix}$$

in ogni equilibrio, dunque gli equilibri sono tutti instabili.

- G)** Si osserva immediatamente nella seconda equazione della forma di stato che tutte le nonlinearità del sistema possono essere cancellate ponendo  $u = \alpha z_2^2 - \tan(z_1) + v$ . Si ottiene così un sistema linearizzato esattamente (non si fa alcuna approssimazione) che è descritto da

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v$$

che è in forma canonica di controllo, con autovalori nulli. La ulteriore retroazione lineare  $v = -k_1 z_1 - k_2 z_2$  con  $k_1, k_2 > 0$  rende il sistema quindi asintoticamente stabile globalmente (infatti il sistema originale è esattamente equivalente a quello linearizzato, per il quale la stabilità locale implica quella globale).

- G-V)** La banda passante di un sistema è l'intervallo delle frequenze dei segnali sinusoidali che subiscono amplificazione e sfasamento costante. Per un sistema  $G(s)$  controllato in anello chiuso (che quindi ha f.d.t.  $G_c(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)}$ ) tipicamente è richiesto che tale intervallo comprenda la frequenza nulla, cioè il segnale costante. Si definisce in questo caso banda passante la pulsazione alla quale l'amplificazione del segnale è di  $\sqrt{2}$  volte ( $3db$ ) inferiore a quella del segnale continuo:

$$\omega_h : |G_c(j\omega_h)| = \frac{|G_c(0)|}{\sqrt{2}}$$

Nella grande maggioranza dei casi, le specifiche statiche sul comportamento del sistema in anello chiuso richiedono che  $|G_c(0)| \approx 1$ : ad esempio, se si richiede che l'errore a regime nell'inseguimento al gradino sia minore o uguale al 1%, questo implica che  $1 \gg G_c(0) \geq 0.99$ . Pertanto, la banda passante in anello chiuso è vale con ottima approssimazione  $\omega_h : |G_c(j\omega_h)| = 1/\sqrt{2} = -3db$ .

Dal diagramma di Nyquist (o Nichols) della f.d.t. in anello aperto, la banda passante del sistema in anello chiuso è quindi facilmente deducibile leggendo la pulsazione alla quale il diagramma di  $G(j\omega)$  interseca il luogo a modulo costante  $M = 1/\sqrt{2} = -3db$ . Sul piano di Nyquist, tale luogo è il cerchio passante per i punti  $j$  e  $-j$  e centrato in 1. Sul piano di Nichols, il luogo a  $-3db$  è una curva passante dai punti  $(\phi = 0, M = 8db)$ ,  $(\phi = -\pi/2, M = 0db)$ ,  $(\phi = -\pi, M = -8db)$ ,  $(\phi = -3\pi/2, M = 0db)$ .

La lettura della banda passante sul diagramma di Bode non è altrettanto agevole. La approssimazione cui si fa riferimento nel testo consiste nell'approssimare  $\omega_h$  con  $\omega_T$ , la pulsazione di taglio del diagramma delle ampiezze di Bode, cioè la pulsazione per cui vale  $|G(j\omega)| = 1 = 0db$ . Questa approssimazione, interpretata sul diagramma di Nyquist, consiste nel sostituire la pulsazione di attraversamento del cerchio a  $M = -3db$  con quella di attraversamento del cerchio unitario (in cui appunto  $|G(j\omega)| = 1$ ). I due cerchi hanno a comune i due punti  $\pm j$ , per cui, se l'attraversamento avviene in corrispondenza di  $-j$ , le due pulsazioni coincidono esattamente (il caso di attraversamento in  $j$  porterebbe ad instabilità del sistema in anello chiuso). Analogamente, sul piano di Nichols, il luogo a  $-3db$  e la retta a  $0db$  hanno in comune i punti a  $\phi = -\pi/2$  e  $\phi = -3\pi/2$ .

La perfetta coincidenza di  $\omega_h$  ed  $\omega_T$  avviene quindi se il taglio corrisponde ad una fase di  $-\pi/2$ . Sul diagramma delle ampiezze di Bode per sistemi a fase minima, tale condizione è verificata se il taglio avviene in un tratto a pendenza  $-1$ , e non vi sono poli o zeri nelle vicinanze di  $\omega_T$ . Se ci si discosta da tale condizione perchè la fase alla pulsazione di taglio è minore di  $-\pi/2$ , si ottiene che  $\omega_T$  approssima *per difetto*  $\omega_h$ : si osservi infatti, ad esempio sul piano di Nyquist, che il cerchio unitario è esterno al cerchio a  $M = -3db$  nel terzo e quarto quadrante, quindi il diagramma di  $G(j\omega)$  percorso per  $\omega$  crescenti interseca quest'ultimo dopo aver intersecato il primo.