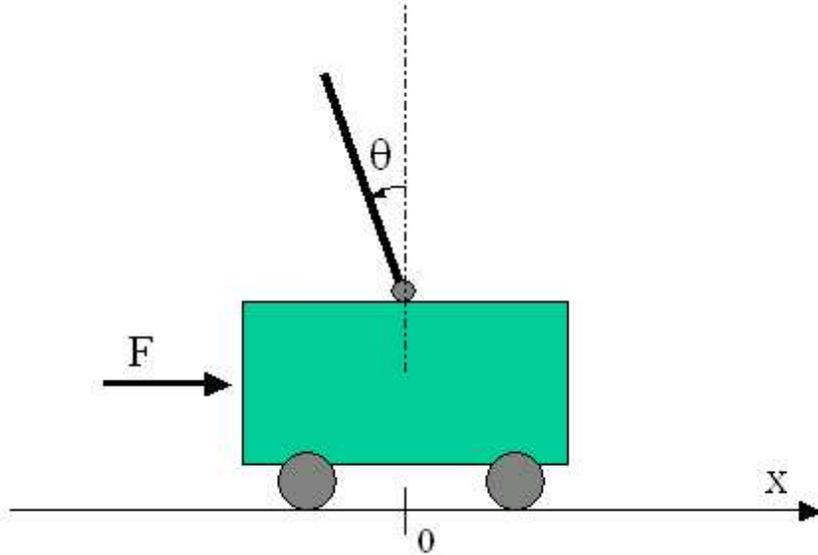


Numero di matricola

-	-	$= \alpha - 1$	$= \beta - 1$	$= \gamma - 1$	$= \delta - 1$



- Le equazioni dinamiche del sistema a pendolo inverso rappresentato in figura sono le seguenti:

$$\begin{cases} (M + m)\ddot{x} + b\dot{x} - mL \cos \theta \ddot{\theta} + mL \sin \theta \dot{\theta}^2 = F_{ext} \\ (I + mL^2)\ddot{\theta} - mgL \sin \theta = mL \cos \theta \ddot{x} \end{cases}$$

Si ponga la massa del carrello $M = (5 + \alpha)/10$ [kg], la massa del pendolo $m = 0.4$ [kg], il coefficiente di smorzamento viscoso $b = 0.1 + 0.03\beta$ [N/(msec)], la lunghezza del pendolo $L = 0.5 + 0.01\gamma$ [m], e la inerzia del pendolo $I = 0.005 + 10^{-4}\delta$ [kgm²].

- (VO)** Trovare tutti gli equilibri del sistema e discuterne qualitativamente la stabilità.
- (VO/NO)** Considerando piccole variazioni rispetto alla configurazione con $\theta = \dot{\theta} = x = \dot{x} = 0$, calcolare un modello linearizzato del sistema, e scrivere la funzione di trasferimento tra la forza esterna F_{ext} e la posizione θ del pendolo.
- (VO/NO)** Si consideri una retroazione della uscita θ sull'ingresso F_{ext} con azione puramente proporzionale di costante K . Si stabilisca con l'aiuto del teorema di Nyquist se è possibile trovare un K che stabilizzi il sistema.
- (VO/NO)** Progettare una retroazione che, misurando l'uscita θ e attuando l'ingresso F_{ext} , renda asintoticamente stabile l'equilibrio del pendolo nella posizione verticale superiore, senza badare alla posizione del carrello.
- (VO)** Descrivere la procedura per progettare una retroazione che, usando anche la misura della posizione x del carrello, possa rendere asintoticamente stabile sia l'equilibrio superiore del pendolo che la posizione in $x = 0$ del carrello.

Soluzione

A Gli equilibri del sistema sono facilmente ottenuti, ponendo $\dot{x} = \ddot{x} = \dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$ nelle equazioni dinamiche, come le configurazioni che soddisfano $\sin \theta = 0$. Si ha quindi $\theta = 0$ (equilibrio superiore) e $\theta = \pi$ (equilibrio inferiore), per ogni posizione x del carrello. È intuitivo che l'equilibrio superiore è instabile. L'equilibrio inferiore è chiaramente indifferente alla posizione del carrello x , e quindi non può essere asintoticamente stabile. A prescindere da questo modo costante, il sistema nelle tre rimanenti variabili di stato è stabile purchè $b \geq 0$, ed anzi $\dot{x} = \theta = \dot{\theta} = 0$ è attrattivo per le traiettorie se $b > 0$: in questo caso infatti lo smorzatore viscoso sull'asse x assorbe energia meccanica dal sistema, conducendolo ad uno stato stabile a minima energia. Una dimostrazione analitica (non richiesta dal testo) dei risultati può essere condotta usando il teorema indiretto di Lyapunov, cioè usando il modello linearizzato del sistema. La f.d.t. del modello linearizzato nell'equilibrio superiore (ottenuta come descritto nel punto successivo) è data da

$$\theta(s) = \frac{mLs^2}{rs^4 + b(I + mL^2)s^3 - (M + m)mgLs^2 - bmgLs} F_{ext}(s)$$

mentre quella nell'equilibrio inferiore è

$$\theta(s) = \frac{mLs^2}{rs^4 + b(I + mL^2)s^3 + (M + m)mgLs^2 + bmgLs} F_{ext}(s)$$

È immediato verificare con la regola dei segni dei coefficienti che nel primo caso esiste una radice a parte reale positiva, quindi l'equilibrio è instabile. Nel secondo caso abbiamo tre radici a parte reale negativa ed una in zero (che si cancella con uno zero). Sulla base del teorema di Lyapunov indiretto, non potremmo a rigore concludere nulla, per la presenza del polo a parte reale nulla. Avendo però già osservato che il modo corrispondente al polo nell'origine è quello corrispondente alla posizione del carrello, possiamo ridurre il sistema alle tre variabili $\dot{x}, \theta, \dot{\theta}$ (equivalentemente, cancellare il polo con lo zero). Rispetto a queste variabili il sistema è asintoticamente stabile, mentre in generale il sistema nell'equilibrio inferiore è marginalmente stabile.

B) Risolvendo un semplice sistema di equazioni lineari, è possibile riscrivere le equazioni dinamiche in forma normale:

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-(I+mL^2)(b\dot{x}+mL\sin\theta\dot{\theta}^2)+m^2L^2\cos\theta\sin\theta g}{(M+m)(I+mL^2)-(mL\cos\theta)^2} \\ \frac{-mL\cos\theta(b\dot{x}+mL\sin\theta\dot{\theta}^2)+(M+m)mgL\sin\theta}{(M+m)(I+mL^2)-(mL\cos\theta)^2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{I+mL^2}{(M+m)(I+mL^2)-(mL\cos\theta)^2} \\ \frac{mL\cos\theta}{(M+m)(I+mL^2)-(mL\cos\theta)^2} \end{bmatrix} F_{ext} \quad (1)$$

da cui è immediato ricavare la forma di stato ponendo $\mathbf{x}_1 = x, \mathbf{x}_2 = \dot{x}, \mathbf{x}_3 = \theta, \mathbf{x}_4 = \dot{\theta}$. Il sistema linearizzato è da qui ottenuto calcolando le matrici $\frac{\partial f(\mathbf{x}, u)}{\partial \mathbf{x}}$ e $\frac{\partial f(\mathbf{x}, u)}{\partial u}$ negli equilibri considerati.

Un modo alternativo e più rapido per ottenere il modello linearizzato è il seguente. Riprendendo le equazioni del sistema, se ne sviluppano direttamente in serie di Taylor troncata al primo ordine tutti i termini rispetto alle variabili che saranno scelte come stati, valutando gli sviluppi negli equilibri. In questo modo, osservando che in un intorno dell'equilibrio superiore, si ha $\sin \theta \approx \theta, \cos \theta \approx 1, \dot{\theta}^2 \approx 0$, otteniamo direttamente

$$\begin{cases} (M + m)\ddot{x} + b\dot{x} - mL\ddot{\theta} = F_{ext} \\ (I + mL^2)\ddot{\theta} - mgL\theta = mL\ddot{x} \end{cases} \quad (2)$$

Applicando la trasformata di Laplace a queste equazioni, nella ipotesi di avere condizioni iniziali nulle, si ottiene:

$$\begin{cases} [(M + m)s^2 + bs] x(s) - mLs^2\theta(s) = F(s) \\ [(I + mL^2)s^2 - mgL] \theta(s) = mLs^2x(s) \end{cases},$$

dalla seconda delle quali si ha

$$x(s) = \frac{[(I + mL^2)s^2 - mgL]}{mLs^2} \theta(s)$$

e quindi, sostituendo nella prima e semplificando,

$$\theta(s) = \frac{mLs^2}{rs^4 + b(I + mL^2)s^3 - (M + m)mgLs^2 - bmgLs} F_{ext}(s)$$

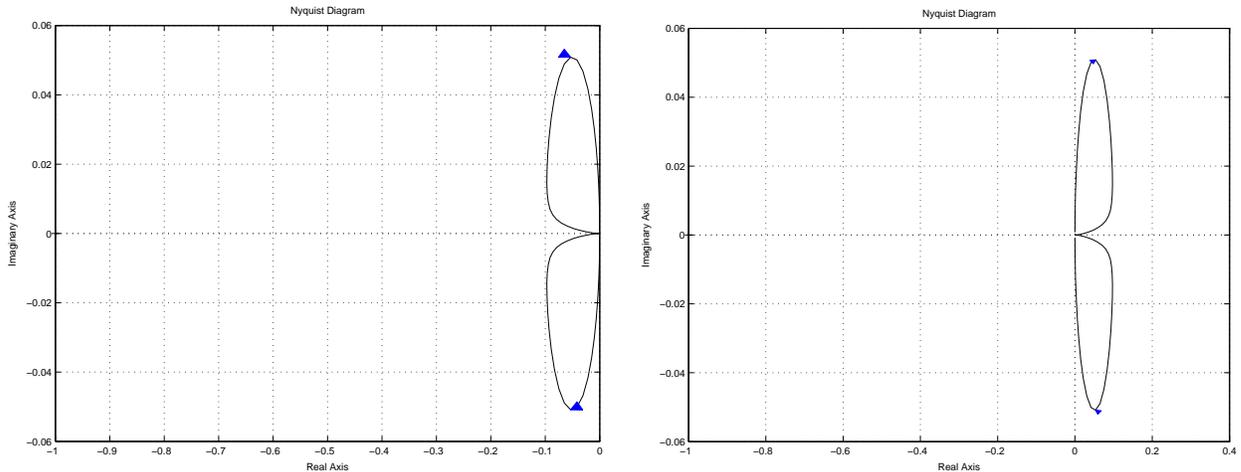
dove $r = (M + m)(I + mL^2) - m^2L^2$. Si osserva che è possibile cancellare una s tra numeratore e denominatore. Resta comunque uno zero nell'origine, cioè un derivatore puro. Questo elemento, che può apparire strano, è fisicamente spiegabile per l'effetto che la forza ha sull'angolo del pendolo in presenza di smorzamento viscoso. Infatti, tipico effetto di un derivatore puro di una f.d.t. è una risposta a regime nulla in presenza di ingresso costante, quale si verifica appunto nel nostro caso quando una forza costante sia bilanciata a regime dallo smorzamento viscoso, stabilendo quindi una velocità di regime costante per il carrello, nella quale condizione il pendolo non è eccitato da alcuna forza inerziale (resta solo la forza peso, che ovviamente farebbe allontanare il pendolo dall'equilibrio superiore).

- C) Il sistema è instabile in anello aperto, come già osservato in precedenza, e come può essere verificato dal fatto che il denominatore della f.d.t. ha una variazione di segno. Sostituendo ad es. i valori numerici nel caso $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 1$, si ha la f.d.t.

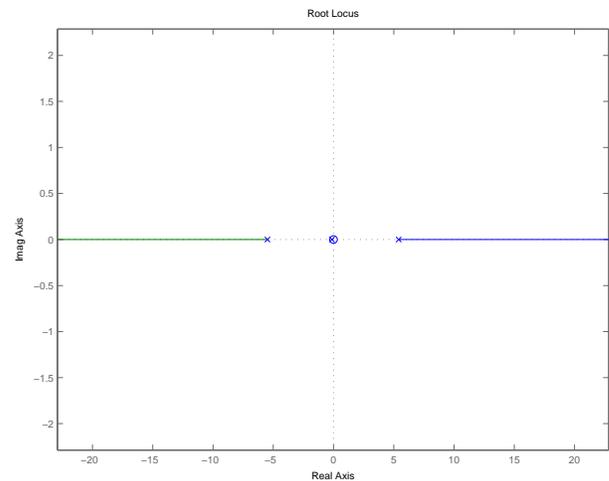
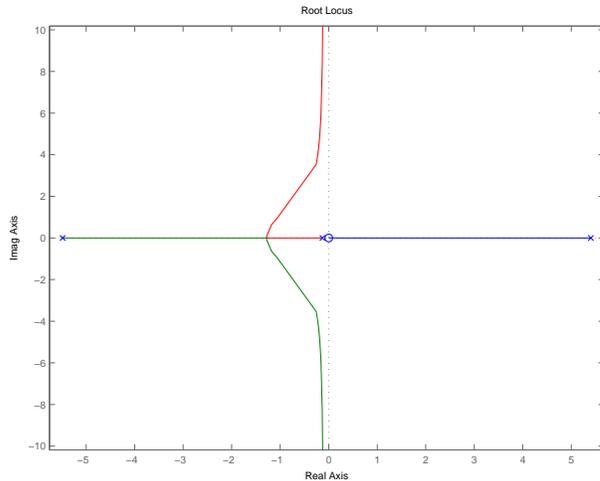
$$\frac{\theta(s)}{F_{ext}(s)} = \frac{0.204s}{0.0675s^3 + 0.01419s^3 - 2s^2 - 0.2602}$$

i cui poli sono in 5.4043, -5.4845 e in -0.1301.

- c) La stabilizzazione del pendolo usando la misura della sua posizione angolare non può essere fatta con una retroazione statica. Per il teorema di Nyquist, infatti, avendosi un polo instabile in anello aperto, sarebbe necessario che il luogo circondasse una volta in senso antiorario il punto -1. Ciò è chiaramente impossibile per qualsiasi valore di K , come si osserva dai diagrammi di Nyquist riportati sotto (per retroazione positiva e negativa, rispettivamente).

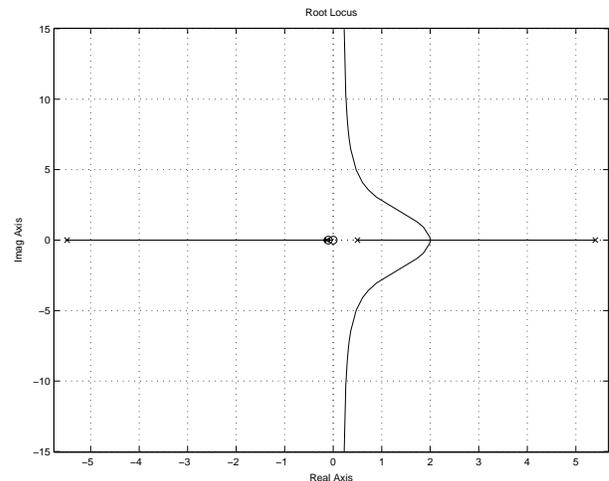
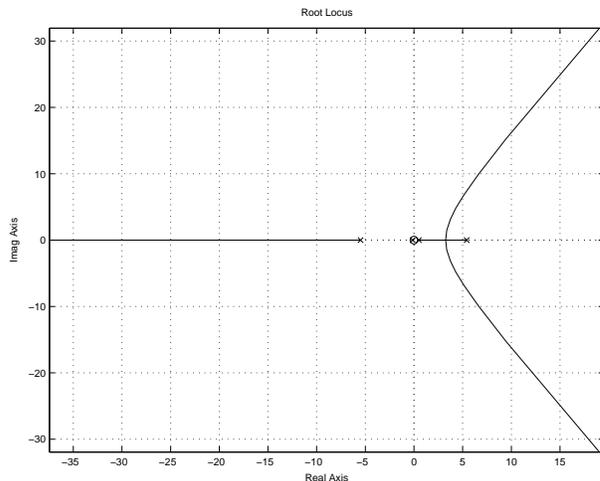


- d) I luoghi con retroazione positiva e negativa risultano rispettivamente i seguenti:



Da questi diagrammi è facile giungere alla stessa conclusione del punto precedente.

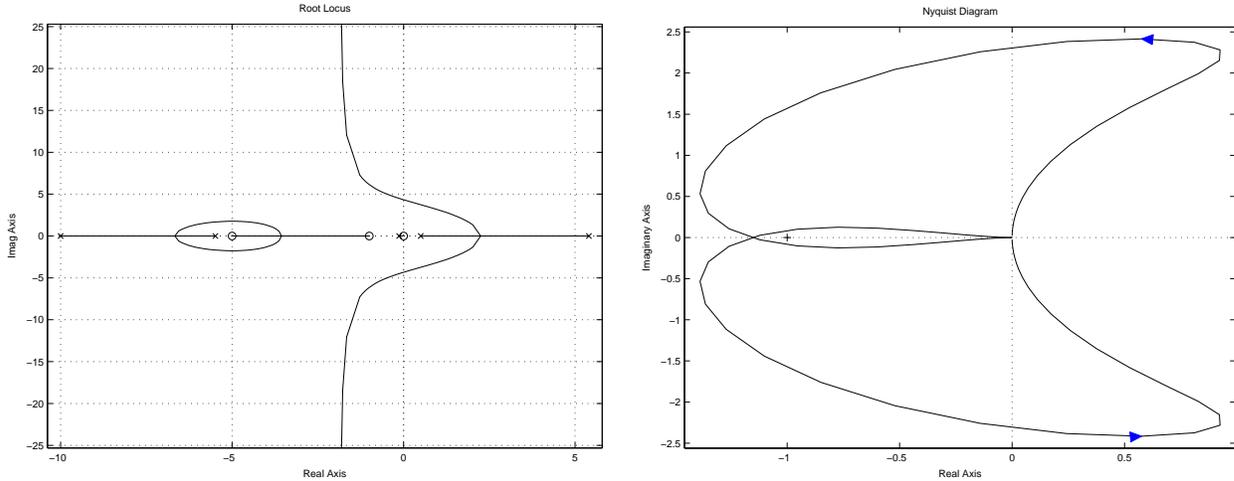
Il progetto di un compensatore per stabilizzare il sistema in retroazione può essere realizzato usando il luogo delle radici (in Matlab, si consiglia di usare il comando *sisotool*). Osserviamo innanzitutto (sul diagramma a sinistra) che il ramo che parte dal polo a parte reale positiva e termina sullo zero nell'origine darà sempre luogo ad un polo instabile in anello chiuso, se non viene interrotto ponendo una singolarità sul semiasse reale positivo. Porre uno zero a parte reale positiva non risolve il problema, perchè questo continuerebbe ad attrarre il luogo. È invece possibile inserire un polo a parte reale positiva del tipo $1/(-\tau s + 1)$. Poichè questo cambia anche le regole di parità nel tracciamento del luogo delle radici, usiamo un guadagno negativo per ristabilire la parità che si aveva in precedenza. Poniamo quindi temporaneamente un compensatore $C_0(s) = -\frac{\tau}{(s-1/\tau)}$ con polo instabile e retroazione positiva. Questo polo ha la funzione di interrompere il ramo del luogo sul semiasse positivo, creando una biforcazione interna ai due poli a parte reale positiva, da cui i rami si dipartono verso due dei tre asintoti che si sono creati. Questi rami, ancora instabili, potranno essere richiamati nella parte sinistra del piano nella fase successiva del progetto. La scelta di $\tau > 0$ influenza la posizione del centro degli asintoti: è ragionevole porre il polo poco a sinistra dell'origine, ad esempio $\tau = 2$. Il luogo delle radici del sistema $C_0(s)G(s)$ è riportato a sinistra nella figura sottostante.



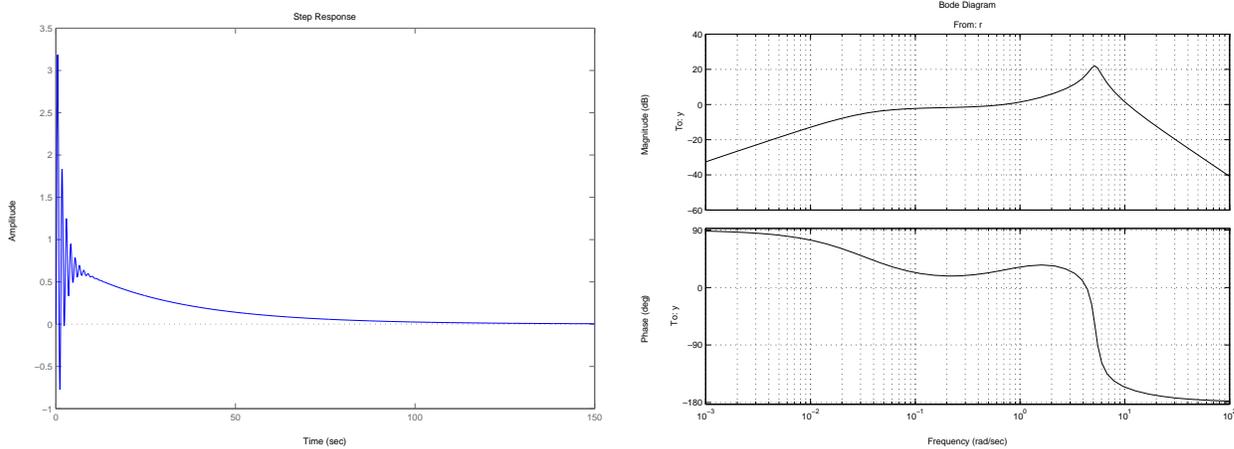
È adesso possibile aggiungere uno zero a parte reale negativa, allo scopo di riportare il numero di asintoti a due (e quindi la loro pendenza a 90 gradi), mettendolo sufficientemente vicino all'origine in modo da non allontanare il centro degli asintoti verso destra. Scegliamo ad esempio $C_1(s) = C_0(s)(1 + 10s)$ (diagramma a destra nella figura sopra).

Un ulteriore spostamento degli asintoti verso sinistra, tale da portare tutte le radici nel semipiano

sinistro, può adesso essere ottenuto con una rete anticipatrice di tipo tradizionale, ad esempio ponendo $C_2(s) = C_1(s) \frac{1+0.2s}{1+0.1s}$. Il risultato è riportato nella figura sottostante. Si nota che il sistema è *condizionalmente* stabile, cioè è stabile solo con guadagno sufficientemente alto. Usando gli strumenti di calcolo (*rlocfind* o *sisotool* in *Matlab*) o il criterio di Routh-Hurwitz, è possibile trovare che tale minimo guadagno è circa 26. Nel diagramma di destra, è riportato il diagramma di Nyquist ottenuto con il controllore $C(s) = -30 \frac{(1+s)(1+0.2s)}{(1-2s)(1+0.1s)}$.



Il pendolo è dunque stabilizzato dal controllore progettato: la risposta ad un disturbo di forza a gradino sul carrello è riportata a sinistra nella figura, mentre il diagramma di Bode del sistema in anello chiuso è a destra. Si noti che il comportamento dinamico non completamente soddisfacente del sistema può adesso essere compensato ulteriormente chiudendo un anello esterno di retroazione (“in cascata”) attorno al sistema in anello chiuso appena ottenuto, e basando il progetto del nuovo compensatore sul diagramma di Bode appena riportato.



- e) Si noti che, nel progetto eseguito sino a questo punto, la variabile di posizione del carrello è stata ignorata. Il suo comportamento risulta divergente, come è possibile vedere considerando la f.d.t.

$$x(s) = \frac{[(I + mL^2)s^2 - mgL]}{rs^4 + b(I + mL^2)s^3 - (M + m)mgLs^2 - bmgLs} F_{ext}(s)$$

e la sua risposta quando in ingresso sia posto il segnale prodotto dal controllore progettato per la stabilizzazione dell'angolo. Con gli strumenti di progetto per le f.d.t., è piuttosto complesso riuscire a stabilizzare il sistema rispetto ad entrambe le uscite.

Guardando d'altronde al sistema nel suo complesso nello spazio di stato, il problema della stabilizzazione è piuttosto semplice. Si procederà dunque come segue:

Si pone il sistema originale in forma di stato, e lo si linearizza attorno all'equilibrio considerato. Si considera nel nostro caso un ingresso u . È facile verificare che il sistema è completamente controllabile dall'ingresso (la forza esterna), ed è osservabile a partire dalle due uscite di misura, x e θ (non lo sarebbe dalla sola θ , come può essere visto dalla cancellazione del polo nell'origine osservata in precedenza). In queste condizioni è possibile procedere al progetto di un regolatore: si progetterà quindi una retroazione degli stati sull'ingresso che alluchi tutti gli autovalori nel semipiano sinistro, ed un osservatore dello stato dalle misure che fornisca una stima dello stato stesso. L'intero sistema viene così reso asintoticamente stabile: si tratterà a questo punto eventualmente solo di scalare i riferimenti in modo che gli equilibri siano nei valori desiderati.