**Regolazione e Controllo dei Sistemi Meccanici – 18-09-2002**
**Solo Vecchio Ordinamento**

| | |
|---|---|
| Nome e Cognome: | |
| Anno di frequenza: | |
| Numero di matricola | |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |
| – | – | $= \alpha - 1$ | $= \beta - 1$ | $= \gamma - 1$ | $= \delta - 1$ |

• Si consideri il modello linearizzato di un sistema dinamico dato nella forma

$$G(s) = \frac{10}{(2\alpha s + 1)^2 (0.001\beta s + 1)}$$

**A)** Progettare un controllore che realizzi, in prima approssimazione le seguenti specifiche:

- errore a regime al gradino nullo;
- errore a regime alla rampa $\leq 1$;
- margine di fase $\geq \pi/4$;
- banda passante in anello chiuso compresa tra 200 e 2000 rad/sec.

**B** Scrivere le matrici **A**, **B**, **C**, **D** di una realizzazione nello spazio degli stati del sistema t.d.

$$G(z) = \frac{z + \delta}{(z^2 - 2z + 2)(z - 0.05\gamma)}$$

e discuterne la stabilità, la raggiungibilità e la osservabilità.

**C** Calcolare la risposta del sistema

$$G(s) = \frac{2s + 1}{s^2 + 0.1s + 1}$$

sottoposto ad un ingresso permanente $u = \sin(t) + 2\cos(3t)$, $t > 0$, e condizioni iniziali nulle, una volta che si sia esaurito il transitorio.

**D** Trovati i punti di equilibrio con ingresso nullo per il sistema

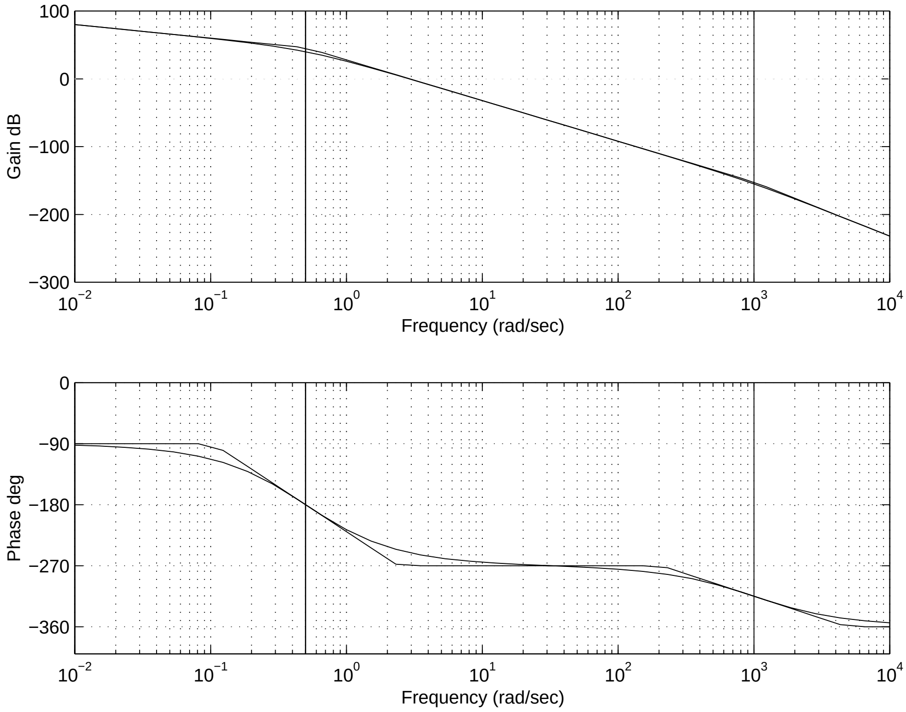
$$\gamma \ddot{x} + \alpha \dot{x}^2 - \tan(x) = u,$$

discuterne la stabilità. Trovare inoltre una legge di retroazione $u = u(x)$ tale che il sistema risulti globalmente asintoticamente stabilizzato.

**Soluzione**

**A)** Poiché il sistema é a fase minima, si puo' procedere semplicemente con la sintesi sui diagrammi di Bode. Fissiamo un controllore $C(s) = \frac{K}{s^t}C_0(s)$, con $C_0(0) = 1$. Per le specifiche statiche è richiesto un polo semplice nell'origine, quindi poniamo $t = 1$. La costante $K$ viene determinata in base al requisito sull'errore a regime sulla rampa: tale errore è pari a $\frac{1}{10K}$, quindi occorre che sia $K \geq 10$. Scegliamo $K = 10$.

Il sistema (dopo la compensazione statica) ha un diagramma di Bode rappresentato nella figura seguente.




La pulsazione di taglio $\omega'_T$ si trova sempre nel tratto a pendenza $-3$. Se il controllore ha due zeri in corrispondenza del polo $-\frac{1}{2\alpha}$, la pendenza in corrispondenza della pulsazione di taglio diventa $-1$, ed é quindi compatibile con il margine di fase, ma la pulsazione di taglio risulta pari a 100 rad/sec. Occorre dunque un azione anticipatrice, ottenuta tramite l'introduzione di una coppia zero–polo che sposti a destra la frequenza di taglio. Per $\beta < 5$ si puó scegliere ad esempio come frequenza di taglio proprio quella corrispondente al polo preesistente $-\frac{1000}{\beta}$ e dunque porre lo zero in $-10$ ed il polo in $-\frac{100}{\beta}$, ottenendo in corrispondenza della pulsazione di taglio il caratteristico "ginocchio," ovvero il passaggio dalla pendenza $-1$ alla pendenza $-2$, cui corrisponde il margine di fase richiesto. Se $\beta \geq 5$, $100 \leq \frac{1000}{\beta} \leq 200$; introducendo comunque uno zero in $-10$, si ha che la frequenza di taglio si sposta in $1000 \leq \frac{10000}{\beta} \leq 2000$ ed in tale pulsazione si puó collocare un polo in modo da formare comunque il "ginocchio." In entrambe le soluzioni, per rendere fisicamente realizzabile il controllore, manca un ulteriore polo, che puó essere collocato in alta frequenza, per esempio in $-50000$. Il controllore avrá dunque per $\beta < 5$ funzione di trasferimento pari a

$$C(s) = 10\frac{(2\alpha s + 1)^2(0.1s + 1)}{s(0.01\beta s + 1)(0.00002s + 1)}$$

mentre per $\beta \geq 5$ si ha:

$$C(s) = 10\frac{(2\alpha s + 1)^2(0.1s + 1)}{s(0.0001\beta s + 1)(0.00002s + 1)}$$

**B)** Esprimendo la funzione di trasferimento nella forma:

$$G(z) = \frac{z + \delta}{z^3 + (0.05\gamma - 2)z^2 + (2 - 0.1\gamma)s + 0.1\gamma}$$

si puó scrivere una rappresentazione di stato ad esempio in forma canonica di controllo, ossia

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0.1\gamma & (0.1\gamma - 2) & (2 - 0.05\gamma) \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \delta & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{D} = 0$$

Il sistema presenta un polo reale negativo in $-0.05\gamma$ ed una coppia di poli complessi coniugati immaginari puri in $1 \pm i = \sqrt{2}e^{\pm i\pi/4}$. I poli complessi coniugati hanno modulo maggiore di 1, pertanto rendono il sistema instabile. Il sistema scritto in una delle forme canoniche (di raggiungibilità o di osservabilità) ha, per definizione, la corrispondente proprietà caratteristica, mentre risulta avere anche l'altra se e solo se é una realizzazione minima, ovvero se non ci sono cancellazioni nella f.d.t.. Pertanto, usando ad esempio la realizzazione di cui sopra, oltre ad essere completamente raggiungibile, é anche completamente osservabile, in quanto, per qualunque valore dei parametri $\gamma$ e $\delta$ non é possibile alcuna cancellazione.

**C)** Si tratta semplicemente di trovare la risposta armonica per le pulsazioni coinvolte. Calcolando $G(\jmath 1) = 20 - \jmath 10$, e $G(\jmath 3) = -0.1 - \jmath 0.75$, si trova $y_r(t) = 22.37 \sin(t - 0.46) + 1.52 \cos(3t - 1.70)$.

**D)** Ponendo $z_1 = x$ e $z_2 = \dot{x}$ si ottiene la rappresentazione nello spazio degli stati

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= \tfrac{1}{\gamma}\tan(z_1) - \tfrac{\alpha}{\gamma} z_2^2 + \tfrac{1}{\gamma} u \end{aligned}$$

I punti di equilibrio sono rappresentati da tutte le coppie $z_1 = k\pi$, $z_2 = 0$ con $k$ intero. Per studiare la stabilitá degli equilibri si puó utilizzare il metodo indiretto di Lyapunov, che richiede di scrivere la matrice dinamica del modello linearizzato. Questa vale

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{\gamma} & 0 \end{bmatrix}$$

in ogni equilibrio, dunque gli equlibri sono tutti instabili. Al fine di trovare un ingresso stabilizzante, si osservi nella seconda equazione della forma di stato che tutte le nonlinearità del sistema possono essere cancellate ponendo $u = \alpha z_2^2 - \tan(z_1) + v$. Si ottiene cosi̇̀ un sistema linearizzato esattamente (non si fa alcuna approssimazione) che è descritto da

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\gamma} \end{bmatrix} v$$

il quale è in forma canonica di controllo, con autovalori nulli. La ulteriore retroazione lineare $v = -k_1 z_1 - k_2 z_2$ con $k_1, k_2 > 0$ rende il sistema quindi asintoticamente stabile globalmente (infatti il sistema originale è esattamente equivalente a quello linearizzato, per il quale la stabilità locale implica quella globale).