

Esercitazione Scritta di Controlli Automatici — 27 Gennaio 2003

Si consideri un modello cinematico semplificato di veicolo a trazione posteriore illustrato in fig.1 e

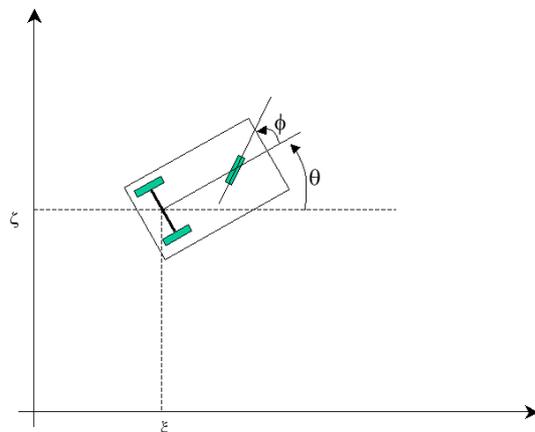


Figure 1: Modello del veicolo

descritto dalle equazioni

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= \cos \theta v \\ \dot{\zeta} &= \sin \theta v \\ \dot{\theta} &= \frac{\tan \phi}{L} v \\ \dot{\phi} &= \omega\end{aligned}$$

dove L indica la distanza tra gli assi delle ruote, v la velocità longitudinale dell'asse posteriore, e ω la velocità angolare di sterzata. La misura disponibile è la distanza ζ del centro dell'asse posteriore dall'asse delle ascisse nel riferimento di figura.

Si consideri il problema di guidare automaticamente il veicolo, in modo da eseguire un moto rettilineo sull'asse $\zeta = 0$.

- A** Si derivi il modello linearizzato del sistema attorno al moto di riferimento $\hat{\zeta} \equiv 0$, $\hat{\theta} \equiv 0$, $\hat{\phi} \equiv 0$, $\hat{\xi}(t) = \xi(0) + Vt$;
- B** Si studi la controllabilità del modello linearizzato considerando come unico ingresso la velocità di sterzata (si suppone quindi che il veicolo proceda con velocità costante $v(t) = V$). Si descriva l'eventuale sottosistema non raggiungibile, e se ne dia una interpretazione fisica;
- C** Si studi la osservabilità del modello linearizzato considerando come uscita la posizione ζ . Si descriva l'eventuale sottosistema non osservabile, e se ne dia una interpretazione fisica;
- D** Si progetti un controllore che, usando la misura del valore di uscita ζ , regoli la velocità ω dell'angolo di sterzo in modo da rendere asintoticamente stabile il moto del veicolo lungo l'asse orizzontale, prescindendo dalla ascissa del veicolo stesso (il problema è analogo alla guida di un autoveicolo che si muove a velocità di crociera costante V , rispetto alla mezzeria di una carreggiata).
- E** Si descriva in dettaglio una procedura per analizzare la stabilità del sistema ottenendo il controllore progettato nel punto precedente con il modello nonlineare del veicolo, al fine di valutare quali configurazioni iniziali del veicolo possono essere ricondotte al moto specificato dal controllore progettato (stima della regione di asintotica stabilità).
- F** Si effettui una simulazione del sistema ottenuto connettendo il controllore progettato nel punto precedente con il modello nonlineare del veicolo, e si cerchi di valutare sperimentalmente la regione di asintotica stabilità.

Soluzione

A Nel moto di riferimento descritto in specifica, gli ingressi nominali sono ovviamente $\hat{v} = V$ e $\hat{\omega} = 0$. Introduciamo quindi le variabili $x_1 = \xi - \hat{\xi} = \xi - (\xi(0) + Vt)$, $x_2 = \zeta - \hat{\zeta} = \zeta$, $x_3 = \theta - \hat{\theta} = \theta$, $x_4 = \phi - \hat{\phi} = \phi$, e i controlli $u_1 = v - \hat{v} = v - V$, $u_2 = \omega - \hat{\omega} = \omega$. In queste variabili si può scrivere il sistema $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \mathbf{u})$, $y = h(\mathbf{x})$ con

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \cos x_3(u_1 + V) - V \\ \dot{x}_2 &= \sin x_3(u_1 + V) \\ \dot{x}_3 &= \frac{1}{L} \tan x_4(u_1 + V) \\ \dot{x}_4 &= u_2 \\ y &= x_2\end{aligned}$$

e linearizzare usando le matrici

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\sin x_3(u_1 + V) & 0 \\ 0 & 0 & \cos x_3(u_1 + V) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L \cos^2 x_4}(u_1 + V) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \\ \frac{\partial f(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} &= \begin{bmatrix} \cos x_3 & 0 \\ \sin x_3 & 0 \\ \frac{1}{L} \tan x_4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \\ \frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} &= [0 \ 1 \ 0 \ 0].\end{aligned}$$

Il linearizzato lungo il moto desiderato si ottiene valutando queste matrici nell'origine (che è un punto di equilibrio per $u_1 = u_2 = 0$) e risulta in $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$, $y = \mathbf{C}\mathbf{x}$, con

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & V & 0 \\ 0 & 0 & 0 & V/L \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

e $\mathbf{C} = [0 \ 1 \ 0 \ 0]$.

B) Imporre velocità di crociera costante per il veicolo comporta di non disporre più dell'ingresso u_1 , che viene posto identicamente uguale a zero. Ci riferiremo quindi da ora in poi ad una nuova matrice di ingressi B consistente nella sola seconda colonna di quella scritta in precedenza.

Il sistema così ottenuto non è completamente raggiungibile, come è facile osservare dalla matrice di raggiungibilità, che ha rango 3. È immediato peraltro osservare che la coppia (\mathbf{A}, \mathbf{B}) è già in forma standard di raggiungibilità, eccetto che per il fatto che il sottosistema non raggiungibile è anteposto a quello raggiungibile. Il sottosistema non raggiungibile è dunque semplicemente $\dot{x}_1 = 0$, con l'evidente significato che nel moto a velocità di avanzamento costante, non è possibile raggiungere valori della ascissa arbitrari in tempi arbitrari.

C) Il sistema linearizzato non è completamente osservabile dalla uscita data, come è facile osservare dalla matrice di osservabilità, che ha rango 3. È ancora facile osservare che la coppia (\mathbf{A}, \mathbf{C}) è già in forma standard di osservabilità, eccetto che per il fatto che il sottosistema non osservabile è anteposto a quello osservabile. Il sottosistema $\dot{x}_1 = 0$ è dunque sia inosservabile che irraggiungibile. Il significato fisico della inosservabilità di questo sottosistema è evidente dal fatto che la uscita, consistente nella distanza del centro dell'asse posteriore dalle ascisse, è inalterata dalla posizione lungo le ascisse stesse del veicolo.

D) Il problema di stabilizzazione riguarda ovviamente solo il sottosistema raggiungibile e osservabile, essendo il sottosistema $\dot{x}_1 = 0$ chiaramente corrispondente alla desiderata soluzione $\xi(t) = cost + Vt$ quando si sia raggiunto il desiderato valore $x_3 = 0$. Riscriviamo quindi le matrici del sistema di interesse nella forma

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & V & 0 \\ 0 & 0 & V/L \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = [1 \ 0 \ 0]$$

da cui si trova facilmente che la f.d.t. tra la velocità di sterzata e la distanza dall'asse delle ascisse è data da $P(s) = \frac{V^2}{Ls^3}$, con modi polinomialmente divergenti in anello aperto. È evidente (ad esempio utilizzando il luogo delle radici) che una retroazione statica della uscita sull'ingresso non riesce a stabilizzare il sistema.

Il progetto di un controllore stabilizzante può essere fatto usando le tecniche classiche (su Bode o sul luogo delle radici), ovvero con facilità mediante la tecnica del regolatore.

Scegliamo ad esempio di porre gli autovalori in anello chiuso in $p = [-1, -1, -1]$, in modo da avere una risposta con piccola sovraelongazione per ingressi a gradino (corrispondenti a traslazioni improvvise della linea di mezzeria da inseguire). La retroazione che alloca i poli di $\mathbf{A} - \mathbf{BK}$ (nel caso $V = 1, L = 3$) nelle posizioni desiderate è data da $\mathbf{K} = [3 \ 9 \ 3]$, come si trova facilmente col comando `K=acker(A,B,p)` di `Matlab`.

I poli dell'osservatore possono essere posti ad esempio in $q = [-2, -2, -2]$. Il valore della matrice \mathbf{L} di iniezione delle uscite sugli stati che pone gli autovalori di $\mathbf{A} - \mathbf{LC}$ in q calcolato mediante il comando `L=transpose(acker(A',C',q))` è dato da $\mathbf{L} = [6 \ 12 \ 24]'$. Il compensatore basato sul regolatore appena progettato si costruisce col comando `rsys=reg(sys,K,L)`. Nel caso numerico in considerazione, il compensatore risulta dato dal sistema

$$\mathbf{A}_r = \begin{bmatrix} -6 & 1 & 0 \\ -12 & 0 & 0.33 \\ -27 & -9 & -3 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B}_r = \begin{bmatrix} 6 \\ 12 \\ 24 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_r = [-3 \quad -9 \quad -3]; \quad \mathbf{D}_r = 0;$$

ovvero dalla f.d.t.

$$C(s) = \frac{-198s^2 - 108s - 24}{s^3 + 9s^2 + 33s + 63}$$

(si faccia attenzione al fatto che il regolatore costruito con il comando `reg` presuppone retroazione positiva).

- E)** Dalla sintesi del controllore per il sistema linearizzato, sappiamo che il sistema costituito dalla connessione in retroazione del regolatore $C(s)$ con l'impianto $P(s)$, è asintoticamente stabile. Possiamo descrivere l'intero sistema con le equazioni

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V(\sin x_3 - x_3) \\ V/L(\tan x_4 - x_4) \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbf{BK}\mathbf{x}_r;$$

$$\dot{\mathbf{x}}_r = \mathbf{A}_r\mathbf{x}_r + \mathbf{B}_r\mathbf{C} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

ovvero, indicando con $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^6$ lo stato complessivo, $\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}_f\mathbf{z} + \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{z})$, con

$$\mathbf{A}_f = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{BK} \\ \mathbf{B}_r\mathbf{C} & \mathbf{A}_r \end{bmatrix}; \quad \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} V(\sin z_2 - z_2) \\ V/L(\tan z_3 - z_3) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Si osservi che questo sistema coincide, per $\tilde{\mathbf{f}}(\cdot) = 0$, col sistema linearizzato stabilizzato. Il sistema linearizzato può essere anche rapidamente ottenuto con il comando

`fsys=feedback(series(sys,rsys),1,+1)`. La matrice dinamica $\mathbf{A}_f \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ di questo sistema (che si può ottenere con il comando `[Af,Bf,Cf,Df]=ssdata(fsys)`) avrà gli autovalori nelle locazioni scelte in precedenza (tre in -1 e tre in -2 nel nostro esempio). Per il sistema linearizzato, si può agevolmente trovare una funzione di Lyapunov del tipo $V_Q = \mathbf{z}^T \mathbf{P}_Q \mathbf{z}$, con \mathbf{P}_Q soluzione della equazione di Lyapunov $\mathbf{P}_Q \mathbf{A}_f + \mathbf{A}_f^T \mathbf{P}_Q = -\mathbf{Q}$ (ad esempio col comando `Pq=lyap(Af',Q)`), per qualche \mathbf{Q} simmetrica positiva definita.

Per stimare (per difetto) la regione di asintotica stabilità del sistema nonlineare stabilizzato, si deve quindi valutare la regione in cui vale la disequazione $\dot{V}_Q = -\mathbf{z}^T \mathbf{Q} \mathbf{z} + 2\mathbf{z}^T \mathbf{P}_Q \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{z}) < 0$, e trovare la più grande curva di livello di V_Q interamente contenuta in quella regione. La disequazione può essere studiata numericamente generando numeri casualmente distribuiti sulla curva $V_Q = R$ e guardando al segno di \dot{V}_Q al variare di R , ad esempio con la semplice procedura

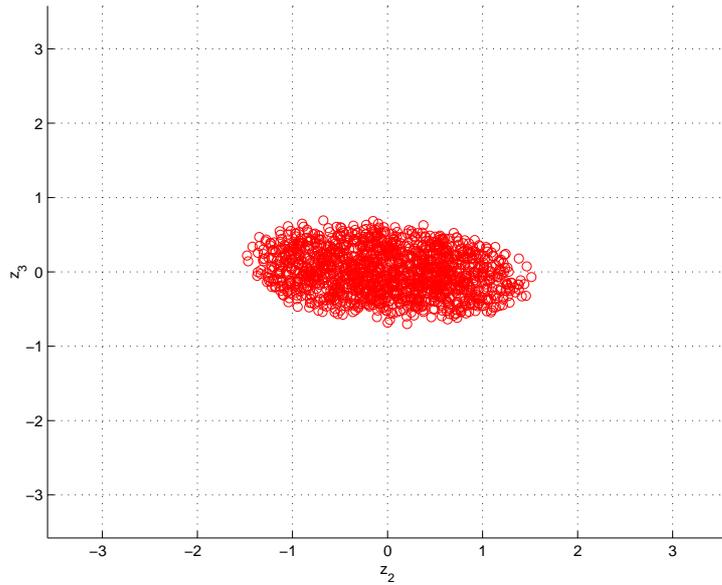


Figure 2: Sezione nel piano z_2, z_3 della stima della RAS ottenuta con $\mathbf{Q} = \mathbf{I}_6$.

```
function evalvdot(P,Q,R)
M=inv(sqrtm(P));
for i=1:1:500000          % Numero di tentativi casuali
x = (rand(6,1)-0.5);
y=sqrt(R)*x/norm(x);    % Vettore di direzione random e lunghezza sqrt(R)
z=M*y;                  % Punto random sulla curva di livello
vdot=-z'*Q*z+2*z'*P*[0,sin(z(2))-z(2),(tan(z(3))-z(3))/3, 0, 0, 0]';
if vdot > 0 disp('Punto forse esterno alla R.A.S.!'), break; end
end
```

Il risultato della applicazione di questa procedura, con \mathbf{Q} matrice identica e per vari R indica che, con buona probabilità, la regione $\mathbf{z}^T \mathbf{P} \mathbf{z} \leq 3.2$ è interna alla regione di asintotica stabilità (si veda il diagramma dei punti trovati fig.2). Altre stime possono poi essere trovate unendo alla stima presente altre regioni che si possono ottenere variando \mathbf{Q} e ripetendo la procedura ora descritta.

F Uno schema simulink del sistema stabilizzato e' riportata in fig.3. Una simulazione con condizioni iniziali del veicolo pari a $\xi(0) = 0$, $\zeta(0) = 0.1$, $\theta(0) = 0$, $\phi(0) = 0$, è riportata in fig.4.

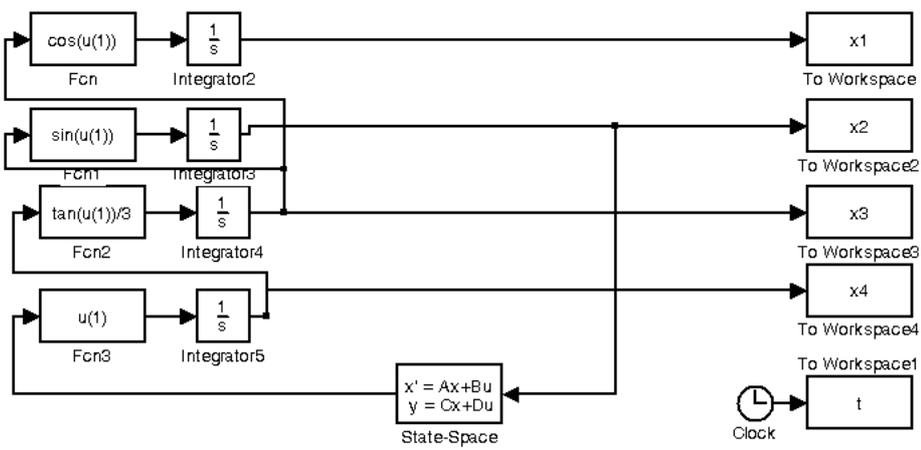


Figure 3: Schema a blocchi per la simulazione

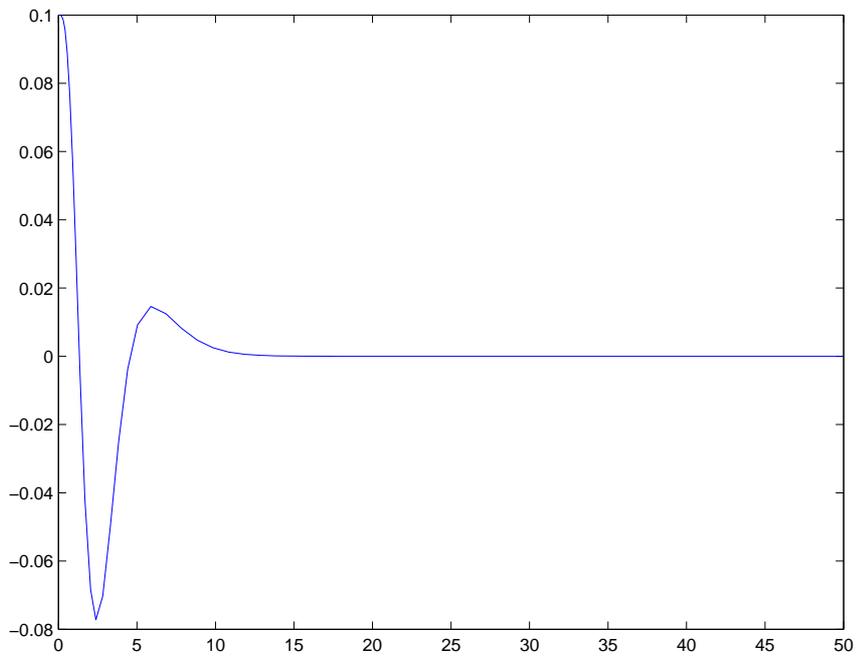


Figure 4: Andamento del veicolo nel piano ξ, ζ con condizioni iniziali $\xi(0) = 0$, $\zeta(0) = 0.1$, $\theta(0) = 0$, $\phi(0) = 0$.