

## Esercitazione Scritta di Controlli Automatici — 24-03-2003

Si consideri il modello dinamico di un sistema composto da una sbarretta e da una sfera come illustrato in fig.1 ("Ball and Beam"):

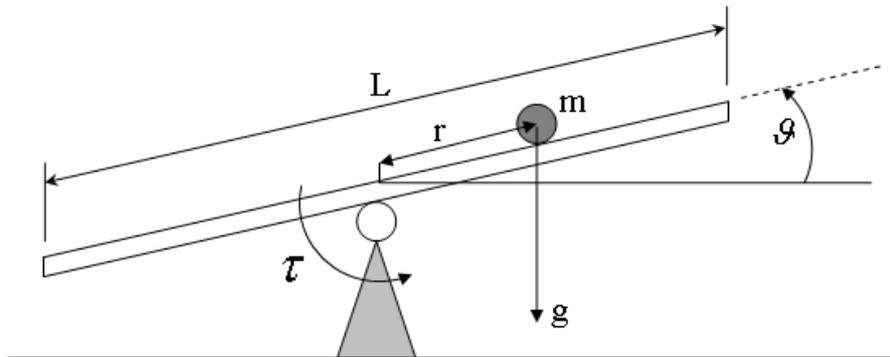


Figure 1: Modello del sistema

e descritto dalle equazioni

$$\begin{cases} (I + mr^2)\ddot{\theta} + mgr \cos(\theta) + 2mrr\dot{\theta} &= \tau \\ (m + \frac{J}{R^2})\ddot{r} + mg \sin(\theta) - mr\dot{\theta}^2 &= 0 \end{cases}$$

dove  $I = 0.5 \text{ kgm}^2$  è il momento di inerzia della sbarretta,  $m = 2 \text{ kg}$  e  $J = 25 \cdot 10^{-3} \text{ kgm}^2$ , rispettivamente, la massa e il momento di inerzia della pallina,  $\tau$  la coppia di ingresso ed  $R = 5 \text{ cm}$  è il raggio della pallina. La misura disponibile è la distanza  $r$  del centro della sferetta dal centro della sbarra.

- A** Si derivi il modello linearizzato del sistema attorno al punto di equilibrio  $\hat{r} \equiv 0$ ,  $\hat{\theta} \equiv 0$ ,  $\hat{\dot{\theta}} \equiv 0$ ,  $\hat{\dot{r}} \equiv 0$  con ingresso nominale  $\hat{\tau}$  nullo;
- B** Si studi la controllabilità del modello linearizzato considerando come ingresso la coppia  $\tau$ . Si descriva l'eventuale sottosistema non raggiungibile, e se ne dia una interpretazione fisica;
- C** Si studi la osservabilità del modello linearizzato considerando come uscita la posizione  $r$ . Si descriva l'eventuale sottosistema non osservabile, e se ne dia una interpretazione fisica;
- D** Si progetti un controllore che, usando la misura del valore di uscita  $r$ , regoli la coppia  $\tau$  in modo da garantire l'asintotica stabilità del punto di equilibrio.
- E** Si valuti un insieme di punti dai quali, adottando la legge di controllo progettata in precedenza, è garantita la convergenza del sistema sulla configurazione desiderata.
- F** Si effettui una simulazione del sistema ottenuto connettendo il controllore progettato nel punto precedente con il modello nonlineare del sistema, e si cerchi di valutare sperimentalmente la regione di asintotica stabilità.

## Soluzione

A) Scegliendo come variabili di stato  $(r, \dot{r}, \theta, \dot{\theta})$  il sistema in forma di stato risulta

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{mg}{M} \sin(x_3) + \frac{m}{M} x_1 x_4^2 \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= -mg \frac{x_1 \cos(x_3)}{I+mx_1^2} - 2m \frac{x_1 x_2 x_4}{I+mx_1^2} + \frac{\tau}{I+mx_1^2} \\ y &= x_1\end{aligned}$$

dove  $M = m + \frac{J}{R^2}$ .

Usando le seguenti matrici

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{m}{M} x_4^2 & 0 & -\frac{mg}{M} \cos(x_3) & 2\frac{m}{M} x_1 x_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{N}{(I+mx_1^2)^2} & -2m \frac{x_1 x_4}{I+mx_1^2} & mg \frac{x_1 \sin(x_3)}{I+mx_1^2} & -2m \frac{x_1 x_2}{I+mx_1^2} \end{bmatrix}; \\ \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{I+mx_1^2} \end{bmatrix}; \\ \frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} &= [1 \ 0 \ 0 \ 0].\end{aligned}$$

dove  $N = (-mg \cos(x_3) - 2mx_2 x_4)(I + mx_1^2) - 2mx_1(\tau - mgx_1 \cos(x_3) - 2mx_1 x_2 x_4)$ , è possibile linearizzare il sistema attorno al punto di equilibrio ottenendo

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{mg}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{mg}{I} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{I} \end{bmatrix} \\ \mathbf{C} &= [1 \ 0 \ 0 \ 0] & \mathbf{D} &= 0\end{aligned}$$

B) La matrice di raggiungibilità del sistema

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{mg}{MI} \\ 0 & 0 & -\frac{mg}{MI} & 0 \\ 0 & \frac{1}{I} & 0 & 0 \\ \frac{1}{I} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ha rango pieno pertanto il sistema così ottenuto è completamente raggiungibile. Il sottosistema non raggiungibile è vuoto; ciò implica che nell'intorno dell'origine è possibile far inseguire alla sfera (ed anche alla sbarretta) qualsiasi profilo.

C) La matrice di osservabilità del sistema

$$\mathbf{O} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{mg}{MI} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{mg}{MI} \end{bmatrix}$$

ha rango pieno pertanto il sistema così ottenuto è completamente osservabile. Il sottosistema non osservabile è vuoto; ciò implica che nell'intorno dell'origine conoscendo la distanza del centro della sfera dal perno della sbarra è possibile ricostruire lo stato del sistema.

D) Sostituendo i valori numerici nelle matrici precedenti si ottiene

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4.9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -39.24 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix},$$

Nel progetto di un controllore per il sistema dinamico precedente, peraltro instabile ad anello aperto, si può procedere adottando il principio di separazione dei regolatori-compensatori. Scegliamo ad esempio di porre gli autovalori in anello chiuso in  $p = [-1, -1, -1, -1]$ , in modo da avere una risposta con piccola sovraelongazione per ingressi a gradino. La retroazione dallo stato stimato che alloca i poli di  $\mathbf{A} - \mathbf{BK}$  (il segno negativo dovuto alla sintassi del comando Matlab `K=acker(A,B,p)`) nelle posizioni desiderate è data da  $\mathbf{K} = [-19.7219, -0.4077, 3, 2]$ .

I poli dell'osservatore possono essere posti ad esempio in  $q = [-2, -2, -2, -2]$ . Il valore della matrice  $\mathbf{L}$  di iniezione delle uscite sugli stati che pone gli autovalori di  $\mathbf{A} - \mathbf{LC}$  in  $q$  calcolato mediante il comando `L=transpose(acker(A',C',q))` è dato da  $\mathbf{L} = [8, 24, -6.5240, -42.50]'$ .

Il compensatore basato sul regolatore appena progettato si costruisce col comando `rsys=reg(sys,K,L)`. Nel caso numerico in considerazione, il compensatore risulta dato dal sistema

$$\mathbf{A}_r = \begin{bmatrix} -8 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & -4.905 & 0 \\ 6.524 & 0 & 0 & 1 \\ 42.71 & 0.8155 & -6 & -4 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B}_r = \begin{bmatrix} 8 \\ 24 \\ -6.524 \\ -42.5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_r = [ 19.72 \quad 0.4077 \quad -3 \quad -2 ]; \quad \mathbf{D}_r = 0;$$

ovvero dalla f.d.t.

$$C(s) = \frac{272.1s^3 + 1242s^2 + 3541s + 1.008 \cdot 10^4}{s^4 + 12s^3 + 62s^2 + 180s + 513.5}$$

(si faccia attenzione al fatto che il regolatore costruito con il comando `reg` presuppone retroazione positiva).

**E)** Il sistema costituito dalla connessione in retroazione del regolatore  $C(s)$  con l'impianto  $P(s)$ , è descritto dalle equazioni

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{mg}{M} \sin(x_3) + \frac{m}{M} x_1 x_4^2 + \frac{mg}{M} x_3 \\ 0 \\ -mg \frac{x_1 \cos(x_3)}{I+mx_1^2} - 2m \frac{x_1 x_2 x_4}{I+mx_1^2} + \frac{\tau}{I+mx_1^2} + \frac{mg}{I} x_1 \end{bmatrix} + \mathbf{BK}x_r;$$

$$\dot{\mathbf{x}}_r = \mathbf{A}_r \mathbf{x}_r + \mathbf{B}_r \mathbf{C} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

dove  $\tau = Kx_r$ . Indicando con  $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^6$  lo stato complessivo,  $\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}_f \mathbf{z} + \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{z})$ , con

$$\mathbf{A}_f = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{BK} \\ \mathbf{B}_r \mathbf{C} & \mathbf{A}_r \end{bmatrix}; \quad \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{mg}{M} \sin(x_3) + \frac{m}{M} x_1 x_4^2 + \frac{mg}{M} x_3 \\ 0 \\ -mg \frac{x_1 \cos(x_3)}{I+mx_1^2} - 2m \frac{x_1 x_2 x_4}{I+mx_1^2} + \frac{\tau}{I+mx_1^2} + \frac{mg}{I} x_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Notare che, quando il termine di errore  $\tilde{\mathbf{f}}(\cdot) = 0$ , il sistema non-lineare coincide con quello linearizzato stabilizzato. Il sistema linearizzato può essere anche rapidamente ottenuto con il comando `fsys=feedback(series(sys,rsys),1,+1)`. La matrice dinamica  $\mathbf{A}_f \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$  di questo sistema (che si può ottenere con il comando `[Af,Bf,Cf,Df]=ssdata(fsys)`) avrà gli autovalori nelle posizioni scelte in precedenza (quattro in  $-1$  e quattro in  $-2$  nel nostro esempio). Per il sistema linearizzato, si può agevolmente trovare una funzione di Lyapunov del tipo  $V_Q = \mathbf{z}^T \mathbf{P}_Q \mathbf{z}$ , con  $\mathbf{P}_Q$  soluzione della equazione di Lyapunov  $\mathbf{P}_Q \mathbf{A}_f + \mathbf{A}_f^T \mathbf{P}_Q = -\mathbf{Q}$  (ad esempio col comando `Pq=lyap(Af',Q)`), per qualche  $\mathbf{Q}$  simmetrica positiva definita.

Per stimare (per difetto) la regione di asintotica stabilità del sistema nonlineare stabilizzato, si deve quindi valutare la regione in cui vale la disequazione  $\dot{V}_Q = -\mathbf{z}^T \mathbf{Q} \mathbf{z} + 2\mathbf{z}^T \mathbf{P}_Q \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{z}) < 0$ , e trovare la più grande curva di livello di  $V_Q$  interamente contenuta in quella regione. La disequazione può essere studiata numericamente generando numeri casualmente distribuiti sulla curva  $V_Q = R$  e guardando al segno di  $\dot{V}_Q$  al variare di  $R$ , ad esempio con la semplice procedura

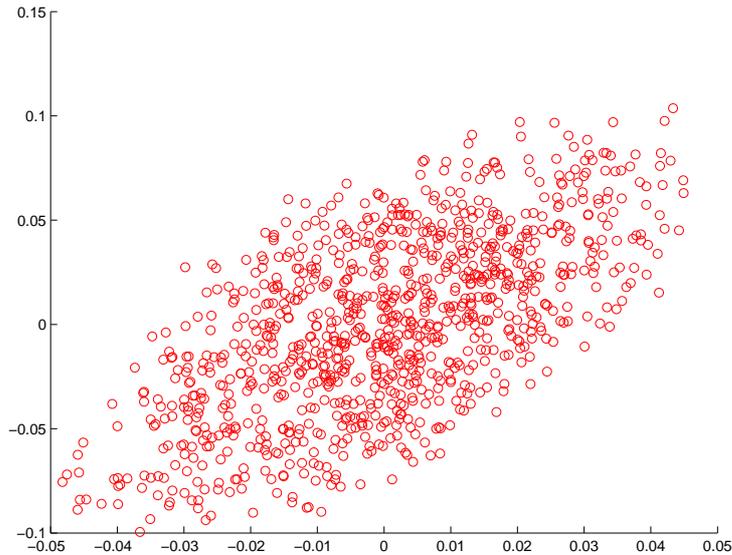


Figure 2: Sezione nel piano  $z_2, z_3$  della stima della RAS ottenuta con  $\mathbf{Q} = \mathbf{I}_6$ .

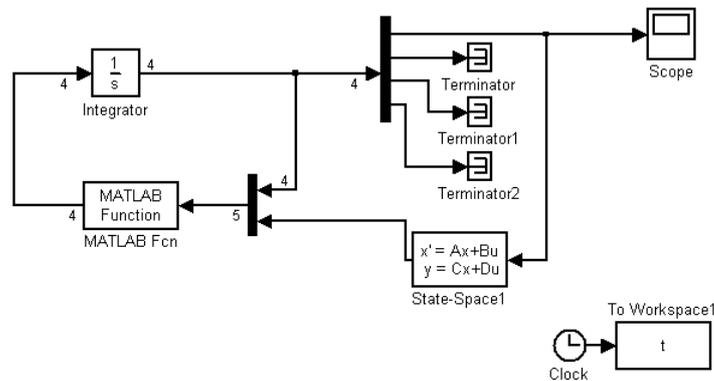


Figure 3: Schema a blocchi per la simulazione

```
function evalvdot(P,Q,R)
M=inv(sqrtm(P));
for i=1:1:500000 % Numero di tentativi casuali
x = (rand(8,1)-0.5);
y=sqrt(R)*x/norm(x); % Vettore di direzione random e lunghezza sqrt(R)
z=M*y; % Punto random sulla curva di livello
vdot=-z'*Q*z+2*z'*P*f(z);
if vdot > 0 disp('Punto forse esterno alla R.A.S.!'), break; end
end
```

Il risultato della applicazione di questa procedura, con  $\mathbf{Q}$  matrice identica e per vari  $R$  indica che, con buona probabilità, la regione  $\mathbf{z}^T \mathbf{P} \mathbf{z} \leq 10^{-2}$  è interna alla regione di asintotica stabilità (si veda il diagramma dei punti trovati fig.2). Altre stime possono poi essere trovate unendo alla stima presente altre regioni che si possono ottenere variando  $\mathbf{Q}$  e ripetendo la procedura ora descritta.

**F** Uno schema simulink del sistema stabilizzato e' riportata in fig.3. dove il blocchetto di simulink em Matlab Function contiene la seguente funzione:

```
function out=ballandbeam(in)
m=2; %parametri del sistema
```

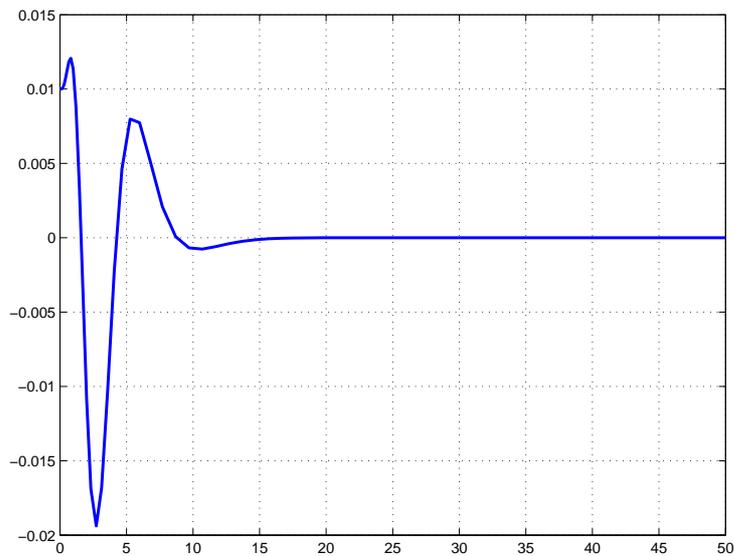


Figure 4: Andamento della grandezza  $r$  con condizioni iniziali  $r = 0.01$ ,  $\dot{r} = 0$ ,  $\theta = 0$  e  $\dot{\theta} = 0$ .

```

J=25*(10^(-3));
I=0.5;
R=5*(10^(-2));
M=4;
g=9.81;

x1=in(1);      %distinguiamo lo stato e tau dall'ingresso
x2=in(2);
x3=in(3);
x4=in(4);
tau=in(5);

out(1)=x2;      %uscite del sistema
out(2)=(x1*(x4^2)-g*sin(x3))*m/M;
out(3)=x4;
out(4)=(tau-2*m*x1*x2*x4-m*g*x1*cos(x3))/(I+m*(x1^2));

```

mentre il blocco *State-Space* contiene le matrici del regolatore precedentemente progettato.

Una simulazione con condizioni iniziali del sistema pari a  $r = 0.01$ ,  $\dot{r} = 0$ ,  $\theta = 0$  e  $\dot{\theta} = 0$ , è riportata in fig.4.