

Numero di matricola

-	-	$= \alpha - 1$	$= \beta - 1$	$= \gamma - 1$	-

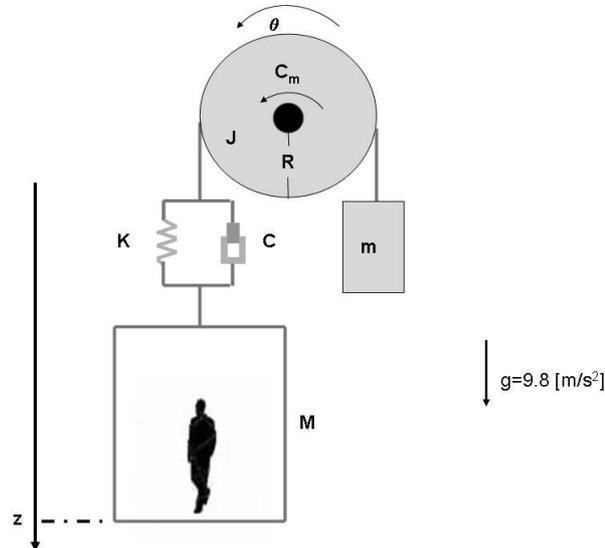


Figure 1: Modello dell' ascensore

Si consideri il modello dinamico di un ascensore illustrato in fig.1 e descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} J\ddot{\theta} = KR(z - \theta R) + CR(\dot{z} - \dot{\theta}R) + C_m(t) - mgR \\ M\ddot{z} = -K(z - \theta R) - C(\dot{z} - \dot{\theta}R) + Mg \end{cases}$$

dove  $R = 0.25[m]$  è il raggio della puleggia,  $J = 10 + \frac{\alpha}{100}[Kgm^2]$  il suo momento di inerzia,  $M = 1000[Kg]$  la massa della cabina,  $m = 500 + \frac{\alpha}{10}[kg]$  la massa del contrappeso,  $C = 100 + \frac{\beta}{20}[Nsec/m]$  e  $K = 500 + \frac{\gamma}{10}[N/m]$  rispettivamente il coefficiente di smorzamento viscoso e la costante elastica del cavo.

Si desidera controllare la quota  $z$  della cabina, agendo sulla coppia motrice  $C_m(t)$  in modo da compensare la forza di gravità e verificare le seguenti specifiche:

- A Errore a regime nullo nell'inseguimento di riferimenti di posizione e velocità assegnati.
- B Inseguimento di un profilo di accelerazione costante unitario con un errore minore di  $0.1 m/sec^2$ .
- C Supponendo che la massa  $M$  abbia un' incertezza del 10% rispetto al suo valore nominale dovuta, alla presenza di un utente, la quota a regime vari entro  $\pm 1cm$ .
- D Risposta al gradino con sovraelongazione minore del 5% e con un tempo di assestamento non superiore a  $0.15 sec$ .
- E Attenuazione di un fattore superiore a 1000 dei disturbi di misura con contenuto frequenziale maggiore di  $1.5kHz$ .

### Soluzione

Il sistema descritto risulta in forma lineare e può essere messo in forma di stato dopo aver valutato il punto di equilibrio facendo attenzione alla presenza dell'accelerazione di gravità. L'ingresso di equilibrio del sistema risulta essere  $C_m = gR(m - M)$ , che porta il sistema nella configurazione  $\bar{\theta} = 0$  (scelto in modo arbitrario) e  $z\bar{e}ta = Mg/K$ . Effettuando un opportuno cambiamento di variabili  $x_1 = \theta - \bar{\theta}$ ,  $x_2 = z - \bar{z}$ ,  $x_3 = \dot{\theta} = \dot{x}_1$  e  $x_4 = \dot{z} = \dot{x}_2$ . Si ottiene il seguente sistema dove,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-KR^2}{J} & \frac{KR}{J} & \frac{-CR^2}{J} & \frac{CR}{J} \\ \frac{KR}{M} & \frac{-K}{M} & \frac{CR}{M} & \frac{-C}{M} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{J} \\ 0 \end{bmatrix},$$

e  $\mathbf{C} = [0 \ 1 \ 0 \ 0]$ .

La funzione di trasferimento per il sistema risulta

$$G(s) = \frac{R(Cs + K)}{s^2[JM s^2 + (JC + CR^2M)s + (KJ + KR^2M)]}$$

Sostituendo i valori numerici (con i parametri  $\alpha, \beta, \gamma$  nulli) si ottiene:

$$G(s) = 1.25 \cdot 10^{-3} \frac{(s + 10)}{s^2(s^2 + 0.3625s + 3.625)}$$

Il sistema ha uno zero in  $s_z = -10$  due poli in  $s_p = 0$  e due poli complessi coniugati in  $s_{p1,2} = -0.1813 \pm 1.8953j$ . Poichè il sistema risulta a fase minima, il progetto del controllore può essere affrontato operando sui diagrammi di Bode.

A L'errore a regime per un riferimento di posizione e di velocità costanti assegnate è nullo essendo il sistema di tipo 2.

B Applicando il teorema del valore finale nel caso di un profilo costante di accelerazione assegnato si ottiene:

$$\lim_{s \rightarrow 0} sE(s) < 0.1;$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + CG} \frac{1}{s^3} < 0.1;$$

Poichè il sistema possiede due poli nell'origine la relazione precedente diventa:

$$K_c > 2900$$

C La specifica sull'incertezza del parametro  $M$  può essere studiata mediante la valutazione della funzione sensibilità. Partendo dall'espressione nominale dell'uscita del sistema ad anello chiuso  $Y_c = G_c R = \frac{CG}{1+CG} R$  e considerandone la perturbazione  $Y_c + \Delta Y_c = (G_c R + \Delta G_c) R = G_c R + \Delta G_c R$  da cui si ottiene

$$\Delta G_c = \frac{\partial G_c(M)}{\partial M} \Delta M$$

$$\Delta G_c = - \frac{C \frac{\partial G(M)}{\partial M}}{(1 + CG)^2}$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \left| \frac{C \frac{\partial G(M)}{\partial M}}{(1 + CG)^2} \right| \frac{M}{100}$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\partial G(M)}{\partial M} = - \frac{kR^3}{J + R^2M} = -0.11$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \left| \frac{0.11K_c}{(1 + K_c G)^2} \right| < \frac{0.01}{0.11}$$

Poichè  $G(s)$  ha due poli nell'origine questa condizione risulta verificata per ogni valore di  $K_c$ .

D La specifica sulla sovraelongazione ammette che il sistema in anello chiuso sia approssimabile con un sistema del secondo ordine con un coefficiente di smorzamento pari a  $\delta \approx 0.7$  (valutabile dalla relazione  $s = e^{\frac{-\pi \delta}{\sqrt{1-\delta^2}}}$ ). Sul diagramma di Bode significa imporre approssimativamente un margine di fase di  $70^\circ$ . Inoltre la condizione sul tempo di assestamento impone che la pulsazione naturale dei

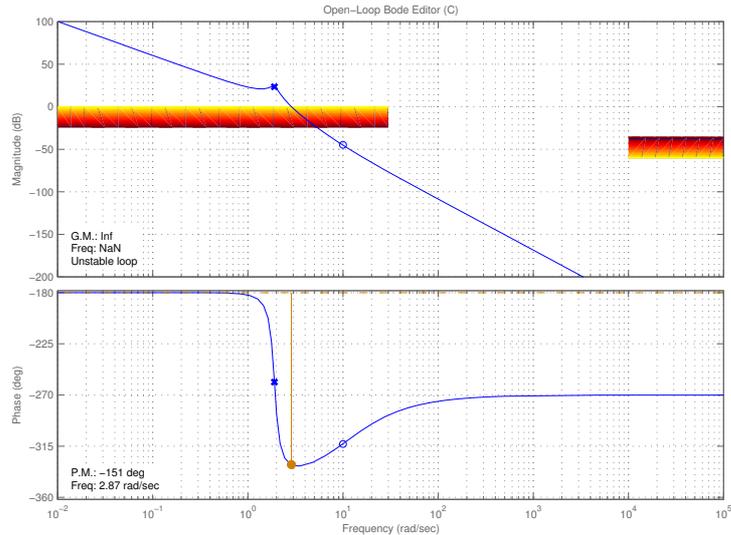


Figure 2: Diagramma di Bode del guadagno di anello con controllore costituito da un guadagno  $K_c = 3000$ .

poli dominanti sia  $\omega_n = \frac{3}{\delta T_a} \approx 30 \text{ rad/sec}$ . Tale specifica si riflette nell'imporre che il diagramma di Bode delle ampiezze di  $\tilde{C}(j\omega)G(j\omega)$  intersechi l'asse a 0db per pulsazioni superiori a  $30 \text{ rad/sec}$ .

Il controllore finora progettato non verifica questa specifica come si può notare dai diagrammi di Bode riportati in figura 2

Per rispettare questa specifica introduciamo una coppia di zeri complessi coniugati in  $-0.2 \pm j0.2$  (rete anticipatrice). Il controllore progettato fino a questo punto ha la forma:

$$C(s) = K_c \frac{1 + 5s + (3.5s)^2}{d(s)}$$

dove il denominatore  $d(s)$  è necessario per rendere il controllore causale. Tale controllore rispetta la specifica come si può notare dalla figura 3.

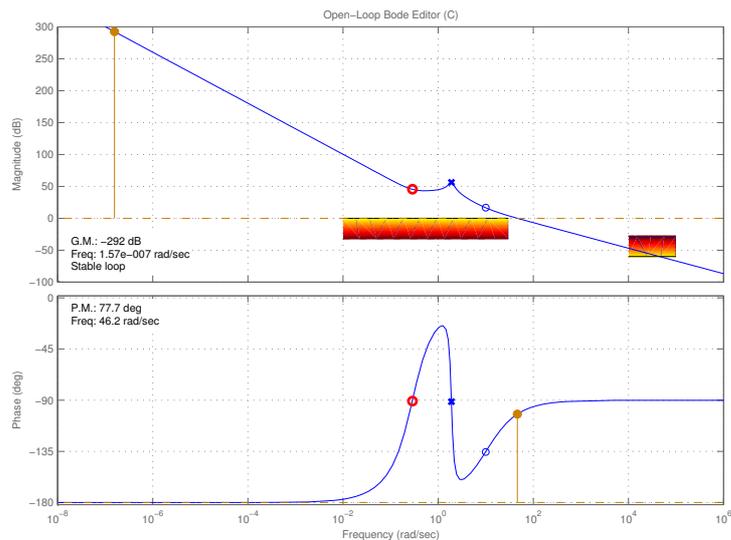


Figure 3: Diagramma di Bode del guadagno di anello con controllore costituito da un guadagno  $K_c$  ed una rete anticipatrice.

E Per soddisfare questa specifica occorre che  $|C(j\omega)G(j\omega)| < 10^{-3} |1 + C(j\omega)G(j\omega)|$  e quindi  $|C(j\omega)G(j\omega)| < -60 \text{ db}$  per pulsazioni superiori a  $\omega \approx 10000 \text{ rad/sec}$ .

Tale condizione può essere verificata introducendo un'azione attenuatrice con un polo in  $s_{p3} =$

-1000. In figura 4 si pu' notare che la specifica in alta frequenza 'erispettata.

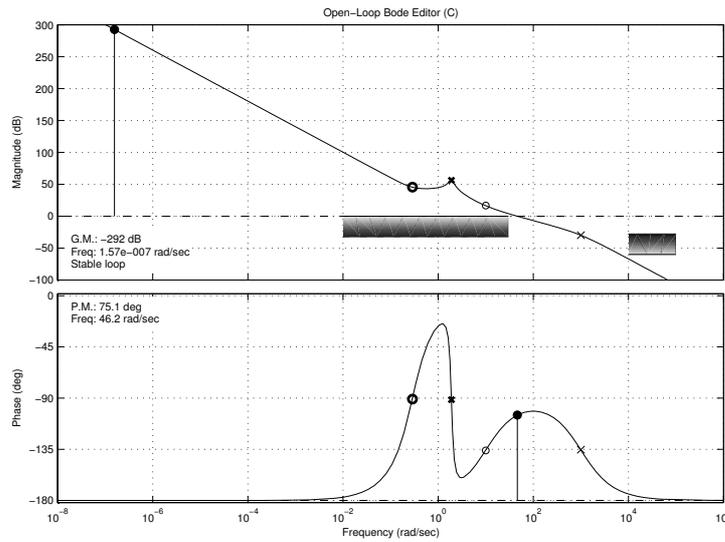


Figure 4: Diagramma di Bode del guadagno di anello con controllore costituito da un guadagno  $K_c$ , una rete anticipatrice e un polo in  $s = -1000$ .

Infine per garantire la causalità del controllore senza violare le specifiche già soddisfatte è necessario inserire un ulteriore polo ad alta frequenza ( $s = -10000$ ). Pertanto il controllore finale ha la seguente forma:

$$C(s) = 3000 \frac{1 + 5s + (3.5s)^2}{(1 + 0.001s)(1 + 0.0001s)}$$

;

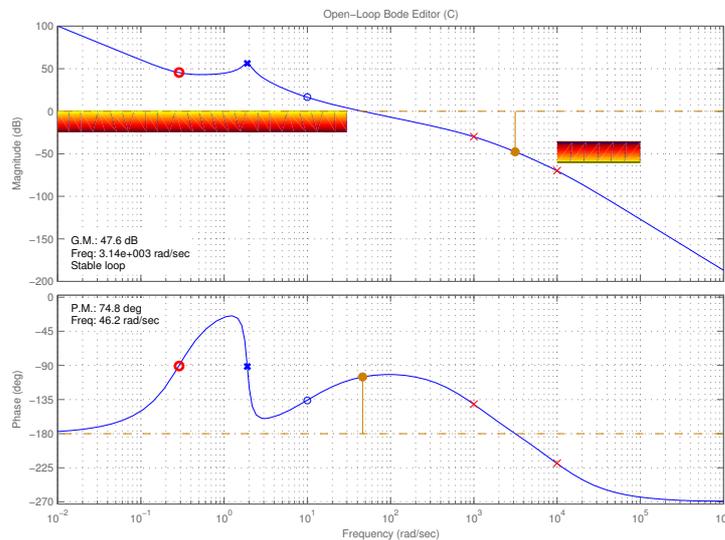


Figure 5: Diagramma di Bode del guadagno di anello con il controllore finale.