Regolazione e Controllo (solo V.O.) — II Parte — 7 Settembre 2004

Numero di matricola

$-$	$-$	$= 10\alpha - 1$	$= 10\beta - 1$	$= 10\gamma - 1$	$-$

A) Si considerino i sistemi meccanici di fig.1 e se ne discutano qualitativamente le proprietà di stabilità, motivando con considerazioni fisiche opportune le risposte (non è necessaria una trattazione analitica). Tutti i sistemi sono dotati di massa. Per i sistemi 5, 6 e 7, si consideri impossibile lo strisciamento sul piano.

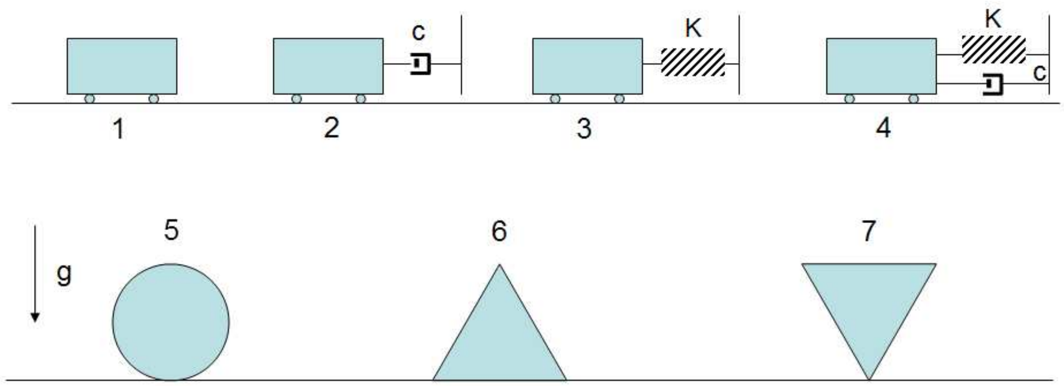

Figure 1: Sistemi meccanici elementari. Gli elementi elastici e gli smorzatori hanno caratteristica lineare non precisata.

B) Con riferimento alla fig.2, si discuta la raggiungibilità e la osservabilità del sistema sottoposto ad ingresso f al variare della costante elastica della molla, nei due casi in cui la misura disponibile sia alternativamente la posizione della prima o della seconda massa.

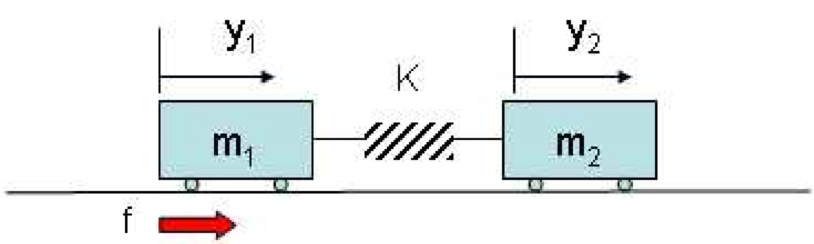

Figure 2: Sistema meccanico da studiare

C) Per il sistema del punto precedente con $m_1 = m_2 = 10 + \alpha$ kg, $K = 1000 + \beta$ N/m, ingresso f e uscita y_1 si tracci il diagramma di Bode e si dia una spiegazione meccanica delle caratteristiche salienti.

Soluzione

A) Lo stato di equilibrio del sistema 1) rappresentato in figura è instabile in assenza di attrito di strisciamento. Infatti, condizioni iniziali arbitrariamente piccole, ma non nulle, portano il sistema a divergere (in particolare, una velocità iniziale non nulla genera un moto uniforme e quindi la divergenza della posizione). Analiticamente, il sistema è lineare e può essere considerato esso stesso instabile: ha infatti un autovalore in zero con molteplicità algebrica pari a due e geometrica pari a uno.

L'equilibrio del sistema 2) è marginalmente stabile. Infatti, stabiliti limiti arbitrari agli stati (posizioni e velocità), è sempre possibile trovare condizioni iniziali non nulle ma sufficientemente piccole, tali che i limiti non siano mai superati nella evoluzione libera del sistema. In termini analitici, il sistema lineare 2) ha un autovalore in zero e un autovalore reale negativo.

L'equilibrio del sistema 3) è anch'esso marginalmente stabile: se inizializzato in uno stato non di equilibrio, ha un moto oscillatorio non smorzato, che è può essere limitato a regioni arbitrariamente piccole dello spazio di stato scegliendo condizioni iniziali sufficientemente prossime all'equilibrio. Il sistema ha due autovalori immaginari puri.

Il punto di equilibrio del sistema 4) rappresentato in figura è asintoticamente stabile: l'effetto della molla è quello di fare oscillare il sistema attorno all'origine, mentre lo smorzatore causa la continua dissipazione di energia e la diminuzione della velocità, quindi attenua l'ampiezza delle oscillazioni. Lo stato del sistema tende quindi asintoticamente all'origine. Il sistema ha due autovalori a parte reale negativa.

In assenza di attrito di rotolamento, lo stato di equilibrio del sistema 5) rappresentato in figura è instabile. Infatti, anche in presenza di attrito di strisciamento tra le superfici in contatto, è sufficiente che all'istante iniziale la velocità di rotazione sia non nulla perché il sistema si allontani indefinitamente dallo stato di equilibrio con velocità costante. Nel caso invece in cui sia presente attrito di rotolamento l'equilibrio è marginalmente stabile: infatti l'attrito volvente introduce nel sistema una dissipazione di energia che fa diminuire la velocità, e quindi rende possibile limitare le traiettorie a regioni arbitrariamente piccole dello spazio di stato scegliendo opportune condizioni iniziali.

Nel caso del sistema 6), è necessario considerare moti perturbati che consistono di rotazioni attorno agli spigoli con transizioni modellabili come urti col piano. Se gli urti sono perfettamente elastici, l'equilibrio è marginalmente stabile, in quanto il corpo si manterrebbe indefinitamente in oscillazione (di ampiezza limitata e proporzionale alle condizioni iniziali). Se gli urti sono anelastici, l'equilibrio è asintoticamente stabile.

Lo stato di equilibrio del sistema 7) rappresentato in figura è instabile, poiché se lo stato iniziale non coincide esattamente con quello di equilibrio il sistema si allontana indefinitamente da quest'ultimo.

B) Indicando con y_1 e y_2 le posizioni delle due masse m_1 e m_2, le equazioni del moto del sistema sono le seguenti:

$$m_1\ddot{y}_1 + k(y_1 - y_2) = f$$
$$m_2\ddot{y}_2 + k(y_2 - y_1) = 0$$

Applicando la trasformata di Laplace alle equazioni appena scritte si ottengono le due relazioni:

$$Y_1(s) = \frac{m_2 s^2 + k}{s^2[m_1 m_2 s^2 + (m_1 + m_2)k]} F(s)$$

$$Y_2(s) = \frac{k}{s^2[m_1 m_2 s^2 + (m_1 + m_2)k]} F(s)$$

Si consideri il caso in cui la misura disponibile sia la posizione y_1 della massa m_1; la funzione di trasferimento che descrive il sistema è la seguente:

$$Y_1(s) = \frac{m_2 s^2 + k}{s^2[m_1 m_2 s^2 + (m_1 + m_2)k]} F(s).$$

Per $k \neq 0$ la funzione di trasferimento non presenta cancellazioni polo - zero, quindi il sistema è completamente raggiungibile e osservabile. Per $k = 0$, invece, i due stati y_1 e $\dot{y}_1$ sono sia osservabili che raggiungibili, mentre gli stati y_2 e $\dot{y}_2$ sono non raggiungibili e non osservabili. Questo fatto è evidente fisicamente, dato che la seconda massa è completamente distaccata dalla prima se $k = 0$, quindi i suoi stati non possono essere influenzati dalla forza di ingresso, né le sue evoluzioni libere possono avere influenza su misure fatte sulla prima massa.

In termini analitici, eseguendo la cancellazione nella corrispondente funzione di trasferimento si ottiene $Y_1(s) = \frac{1}{m_1 s^2} F(s)$. Questa relazione esprime nel dominio delle frequenze la legge del moto della massa m_1 soggetta alla sola forza f; inoltre la funzione di trasferimento non presenta cancellazioni polo - zero. I due stati y_1 e $\dot{y}_1$ sono quindi sia raggiungibili che osservabili. Gli stati y_2 e $\dot{y}_2$ sono invece non raggiungibili e non osservabili. Infatti nella funzione di trasferimento che si ottiene dopo la cancellazione polo - zero non compare in nessun modo la dinamica della massa m_2.

Si consideri ora il caso in cui l'uscita disponibile sia la posizione y_2 della massa m_2; la funzione di trasferimento che descrive il sistema è la seguente:

$$Y_2(s) = \frac{k}{s^2[m_1 m_2 s^2 + (m_1 + m_2)k]} F(s)$$

Per $k \neq 0$ la funzione di trasferimento non presenta cancellazioni, quindi il sistema è completamente raggiungibile e osservabile. Per $k = 0$ invece la funzione di trasferimento è nulla. D'altra parte, osservando attentamente la fisica del sistema, è possibile arrivare alla conclusione che gli stati y_1 e $\dot{y}_1$ sono raggiungibili e non osservabili, mentre gli stati y_2 e $\dot{y}_2$ sono non raggiungibili e osservabili. Non vi è quindi alcuna connessione tra l'ingresso e l'uscita, il ché è rappresentato da una f.d.t. nulla.

C) I diagrammi di Bode della funzione di trasferimento tra l'ingresso f e l'uscita y_1 sono riportati in fig.3. Si noti in particolare che per la pulsazione $\omega = \sqrt{\frac{k}{m_2}}$ il sistema filtra completamente in

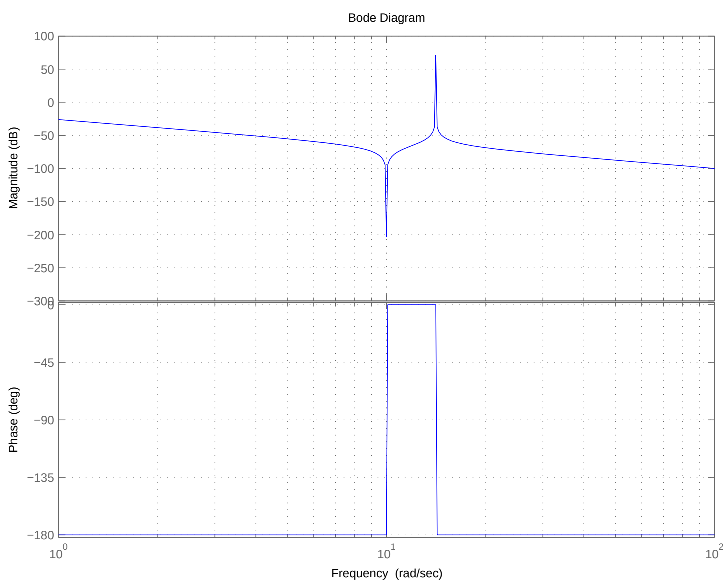

Figure 3: Diagrammi di Bode della funzione di trasferimento $\frac{Y_1(s)}{F(s)}$

uscita il contributo di una forza sinusoidale $f(t) = \sin(\omega t)$, essendo nulla a regime l'ampiezza delle oscillazioni della massa m_1. Per questo valore della pulsazione la massa m_2 si comporta quindi da 'smorzatore dinamico'. Gli smorzatori dinamici possono essere utilmente impiegati per sopprimere gli effetti di vibrazioni imposte a meccanismi, nel caso che le vibrazioni abbiano una frequenza dominante ben precisa e nota. Si osservi che, per pulsazioni $\bar{\omega} = \sqrt{\frac{k(m_1+m_2)}{m_1 m_2}}$, il sistema presenta invece una risonanza ideale, che quindi amplificherebbe infinitamente una vibrazione imposta al meccanismo proprio su quella frequenza. La presenza della risonanza può ovviamente rappresentare un inconveniente importante nel caso in cui la forzante contenga componenti risonanti su $\bar{\omega}$. La distanza tra le pulsazioni ω e $\bar{\omega}$ aumenta con l'inverso del rapporto tra le masse m_1/m_2, il che implica che, per tenere ben separate le pulsazioni, è necessario impiegare masse aggiunte m_2 di valore paragonabile a quello della massa vibrante originale.