

Esercitazione Scritta di Controlli Automatici — 14-02-2005

A Si consideri il sistema dinamico riportato in figura 1. Si studino i punti di equilibrio del sistema e

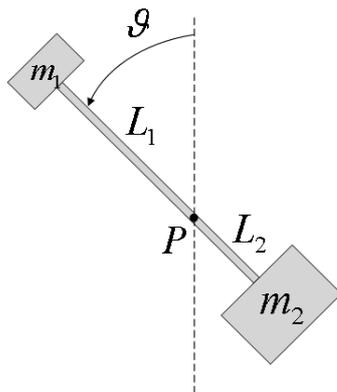


Figure 1: Sistema dinamico.

la loro stabilità supponendo  $m_2 \geq m_1$  al variare delle lunghezze  $L_1$  ed  $L_2$ . Discutere se e come cambiano gli equilibri del sistema e la relativa stabilità supponendo la presenza di attrito viscoso attorno al perno  $P$ .

B Il veicolo riportato in figura 2 può avanzare in direzione perpendicolare all'asse delle ruote e ruotare attorno al centro dell'asse stesso.

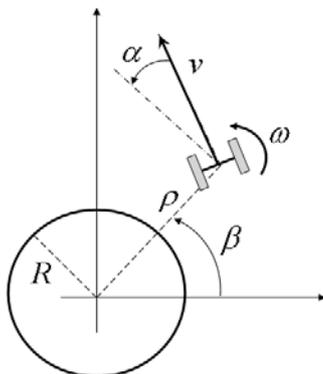


Figure 2: Modello di veicolo da controllare

Si consideri il modello cinematico del veicolo nelle coordinate  $X = [\rho, \alpha, \beta]^T$  indicate in figura, supponendo  $\rho \neq 0$ :

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \rho \sin(\alpha)v \\ \dot{\alpha} = \cos(\alpha)v - \omega \\ \dot{\beta} = \cos(\alpha)v \end{cases} \quad (1)$$

dove  $v$  e  $\omega$  indicano le velocità di avanzamento lineare ed angolare del veicolo.

Si consideri di mantenere la velocità di avanzamento costante  $v = 5\text{m/s}$ . Si progetti una legge di controllo in retroazione della velocità angolare  $\omega$  (supponendo misurabili tutte le variabili  $X$ ) tale da far raggiungere al veicolo il percorso circolare di raggio  $R = 10\text{m}$  indicato in figura. Si discutano inoltre le condizioni iniziali dalle quali è possibile raggiungere lo scopo desiderato.

[Suggerimento: Si utilizzi una funzione di Lyapunov di controllo, osservando che nessuna richiesta è fatta sulla evoluzione della variabile  $\beta$ .]

C Si realizzi una simulazione numerica del comportamento del sistema ottenuto applicando la legge di controllo ottenuta al passo precedente con il sistema non lineare e si commentino i risultati ottenuti.

## Soluzione

A Da una analisi fisica del sistema dinamico, si ottengono i seguenti casi:

- $m_1 L_1 = m_2 L_2$ : in tal caso ogni possibile configurazione del sistema è di equilibrio. Ogni punto di equilibrio è instabile: una condizione iniziale con velocità angolare  $\dot{\theta} \geq 0$  porta alla divergenza delle traiettorie (moto perpetuo);
- $\theta = 0$ : se  $m_1 L_1 > m_2 L_2$  l'equilibrio è instabile, in quanto sia una posizione angolare iniziale  $\theta \geq 0$  che una velocità angolare iniziale  $\dot{\theta} \geq 0$  portano il sistema fuori dall'equilibrio. Se  $m_1 L_1 < m_2 L_2$  l'equilibrio è marginalmente stabile: in tal caso i momenti generati dalla massa  $m_2$  sono maggiori dei rispettivi momenti generati da  $m_1$  e quindi, il sistema perturbato rispetto alle condizioni iniziali oscillerà indefinitamente intorno alla configurazione  $\theta = 0$ ;
- $\theta = \pm\pi$ : se  $m_1 L_1 < m_2 L_2$  l'equilibrio è instabile. Se  $m_1 L_1 > m_2 L_2$  l'equilibrio è marginalmente stabile. Fisicamente valgono le stesse osservazioni fatte per il punto precedente.

Le ipotesi fisiche sono verificate dal modello dinamico del sistema meccanico sotto esame. Si consideri infatti l'equazione dinamica del sistema:

$$J\ddot{\theta} - m_1 g L_1 \sin \theta + m_2 g L_2 \sin \theta = 0,$$

dove  $J$  è il momento di inerzia ( $J = m_1 L_1^2 + m_2 L_2^2 > 0$ ) e  $g$  è l'accelerazione di gravità. All'equilibrio si avrà:

$$-(m_1 L_1 - m_2 L_2)g \sin \theta = 0.$$

Per studiare la stabilità del sistema è necessario applicare la teoria di Lyapunov. Si consideri per prima cosa lo jacobiano del sistema  $X = [\theta, \dot{\theta}]^T = [\bar{\theta}, \dot{\bar{\theta}}]^T$ :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ K \cos \theta & 0 \end{bmatrix}$$

dove  $K = \frac{1}{J}(m_1 L_1 - m_2 L_2)g$ . Gli autovalori del sistema, nella generica configurazione di equilibrio  $[\bar{\theta}, \dot{\bar{\theta}}]^T$ , saranno:

$$\lambda^2 - K \cos \bar{\theta} = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \sqrt{K \cos \bar{\theta}}.$$

Si analizzino i casi presentati precedentemente:

- ( $m_1 L_1 = m_2 L_2$ ): ogni configurazione è un punto di equilibrio per il sistema. In questo caso si ha  $K = 0$  e gli autovalori saranno coincidenti ed entrambi nell'origine. Il metodo indiretto di Lyapunov non dice niente sulla stabilità dell'equilibrio. Notando però la dinamica del sistema  $J\ddot{\theta} = 0$ , si evince che per  $\bar{x}_2 \neq 0$  si ha instabilità (non ci sono termini dissipativi);
- $\theta = 0$ : in questo caso  $\bar{\theta} = 0$ , da cui segue che per  $K > 0$ , ossia  $m_1 L_1 > m_2 L_2$ , il sistema è instabile perché si ha almeno una radice reale positiva. Nel caso in cui  $K < 0$ , si hanno due radici immaginarie pure  $\lambda_{1,2} = j\sqrt{|K|}$ , che non ci permettono di concludere niente sulla stabilità del sistema. Se non è possibile applicare il metodo indiretto di Lyapunov, si applichi il modello diretto di Lyapunov: si consideri la candidata di Lyapunov data dalla energia meccanica del sistema:

$$\mathbf{V}(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 - K(1 - \cos \theta),$$

p.d. per  $K < 0$ . La derivata direzionale sarà:

$$L_f \mathbf{V}(\theta, \dot{\theta}) = \dot{\theta}K \sin \theta - K \sin \theta \dot{\theta} = 0,$$

che è n.s.d. Si noti che non è possibile applicare Krasowskii, in quanto tutte le traiettorie del sistema sono contenute nell'insieme invariante massimo. Si conclude così per la semplice stabilità di questo equilibrio;

- $\theta = \pm\theta$ : seguono le dimostrazioni precedenti, ma con il segno invertito.

Se si aggiunge dell'attrito viscoso sul perno, gli equilibri instabili rimangono tali per le configurazioni non banali  $K \neq 0$ , mentre gli equilibri marginalmente stabili diventano asintoticamente stabili. L'intuizione fisica è verificata dallo studio sul modello semplificato riportato precedentemente:

$$J\ddot{\theta} - m_1gL_1 \sin \theta + m_2gL_2 \sin \theta + b\dot{\theta} = 0,$$

con  $b > 0$  attrito viscoso generico. In questo caso, il modello linearizzato attorno ad una configurazione di equilibrio generica  $X = [\theta, \dot{\theta}]^T = [\bar{\theta}, \dot{\bar{\theta}}]^T$  è:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ K \cos \bar{\theta} & -\frac{b}{J} \end{bmatrix}.$$

Gli autovalori del sistema, nella generica configurazione di equilibrio  $[\bar{\theta}, \dot{\bar{\theta}}]^T$ , saranno:

$$\lambda(\lambda + \frac{b}{J}) - K \cos \bar{\theta} = \lambda^2 + \frac{b}{J}\lambda - K \cos \bar{\theta} = 0,$$

dalle quali si ottiene:

- $(m_1L_1 = m_2L_2)$ : ogni configurazione con  $(\theta, \dot{\theta}) = (\bar{\theta}, 0)$  è un punto di equilibrio per il sistema, con  $K = 0$ . Notando che il sistema diventa lineare in questo caso e che si avranno due autovalori,  $\lambda_1 = -\frac{b}{J}$  e  $\lambda_2 = 0$ , si può concludere sulla semplice stabilità del sistema.
- $\theta = 0$ : per  $K > 0$  si ha un cambiamento di segno e quindi, per equazioni di secondo grado, si ha una radice a parte reale positiva (Cartesio), per la quale si può concludere per l'instabilità della configurazione. Nel caso  $K < 0$  sia ha invece permanenza di segno, quindi entrambe le radici saranno a parte reale negativa, da cui segue l'asintotica stabilità dell'equilibrio;
- $\theta = \pm\theta$ : seguono le dimostrazioni precedenti, ma con il segno invertito.

**B** Per il problema della stabilizzazione su una circonferenza, la raggiungibilità della variabile  $\beta$  si perde, dato che qualsiasi punto sulla circonferenza (e quindi qualsiasi  $\beta$ ) è un punto appartenente alla traiettoria di equilibrio. Si trasli pertanto il sistema con equilibrio nell'origine con variabili di stato  $\bar{X} = [\xi, \alpha]^T = [\rho - R, \alpha]^T$ , con modello cinematico (rispetto al sottospazio di interesse):

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\xi + R) \sin(\alpha)v \\ \cos(\alpha)v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \omega \rightarrow \dot{\bar{X}} = f(\bar{X}, \omega) \quad (2)$$

Si scelga una candidata di Lyapunov quadratica (p.d.):

$$\mathbf{V}(\bar{X}) = \frac{1}{2}(\xi^2 + \alpha^2), \quad (3)$$

e si valuti la sua derivata direzionale lungo le traiettorie del sistema:

$$L_f \mathbf{V}(\bar{X}) = \xi(\xi + R) \sin(\alpha)v + \alpha \cos(\alpha)v - \alpha\omega. \quad (4)$$

Per trovare un controllo stabilizzante è necessario trovare un controllo che renda  $L_f \mathbf{V}(\bar{X})$  n.d.. Osservando l'equazione in 4 si nota come i primi due termini siano non definiti in segno. È perciò necessario cancellarne l'effetto con il controllo  $\omega$  ed aggiungere un termine che renda almeno n.s.d. la derivata direzionale. Si consideri il seguente controllo:

$$\omega = \xi(\xi + R) \frac{\sin(\alpha)}{\alpha} v + \cos(\alpha)v + \alpha, \quad (5)$$

ben definito anche per  $\alpha = 0$ , che sostituito in 4 fa ottenere:

$$L_f \mathbf{V}(\bar{X}) = -\alpha^2, \quad (6)$$

n.s.d.. Per concludere sulla asintotica stabilità dell'equilibrio (l'origine, per questo sistema traslato) è necessario applicare Krasowskii-Lasalle:  $\Omega_{\bar{X}} = \{x \in \mathbb{R}^2 | L_f \mathbf{V}(\bar{X}) = 0\}$  contiene i punti  $(\xi, \alpha) = (\xi, 0), \forall \xi$ . Il modello cinematico valutato in questi punti è il seguente:

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\xi(\xi + R) \end{bmatrix}. \quad (7)$$

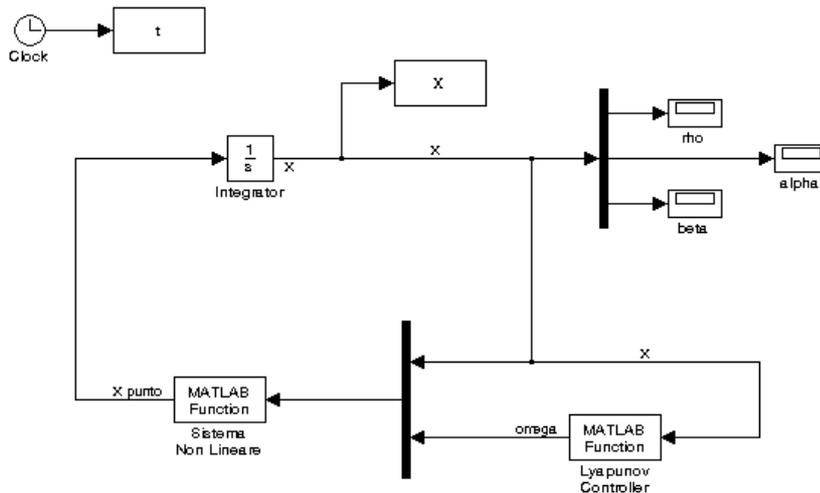


Figure 3: Schema Simulink del sistema non lineare controllato con la tecnica di Lyapunov.

Essendo  $\rho \neq 0$  si ha  $\xi \neq -R$  e quindi  $\dot{\alpha} = 0$  implica  $\xi = 0$ . Concludendo l'unica traiettoria del sistema interamente contenuta nell'insieme invariante massimo  $\Omega_x$  è l'origine. Da questo segue l'asintotica stabilità dell'equilibrio e la stabilizzazione del veicolo sulla circonferenza desiderata.

Per quanto riguarda la R.A.S. è necessario andare a vedere dove la funzione di Lyapunov e la sua derivata direzionale restano ben definite in segno: in questo caso tutto lo spazio di stato fa parte della R.A.S., tranne il punto  $(\rho, \alpha) = (0, 0)$  dove le equazioni del modello cinematico sono non definite.

C Lo schema simulink per effettuare simulazioni dell'andamento delle variabili di stato del sistema non lineare controllato con la tecnica descritta è riportato in figura 3.

Nel blocco *Lyapunov Controller* viene richiamata la seguente funzione:

```
function out = LyapunovController(in)

// Input parser
rho = in(1);
alpha = in(2);
beta = in(3);

// Parameters
R = 10;
v = 5;

// Coordinates transformation
xi = rho - R;

// Controls
omega = xi * (xi + R) * sin(alpha)/alpha * v + cos(alpha) * v + 10*alpha;

// Output
out(1) = omega;
```

dove il termine  $10\alpha$  al posto di  $\alpha$  è stato aggiunto per migliorare la velocità di convergenza del sistema, a prezzo di una maggiore spesa per il controllo (si noti che la scelta non modifica la stabilità del sistema).

Il blocco *Sistema non lineare* contiene chiaramente il sistema non lineare di partenza.

Simulando il controllore così ottenuto si può notare come ogni punto appartenga alla R.A.S.. Infatti considerando le condizioni iniziali  $X(0) = [20, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}]^T$  si hanno gli andamenti nel tempo riportati in figura 4. Si noti come la variabile  $\beta$ , non raggiungibile, diverge linearmente con velocità  $v/R$ . Infatti,

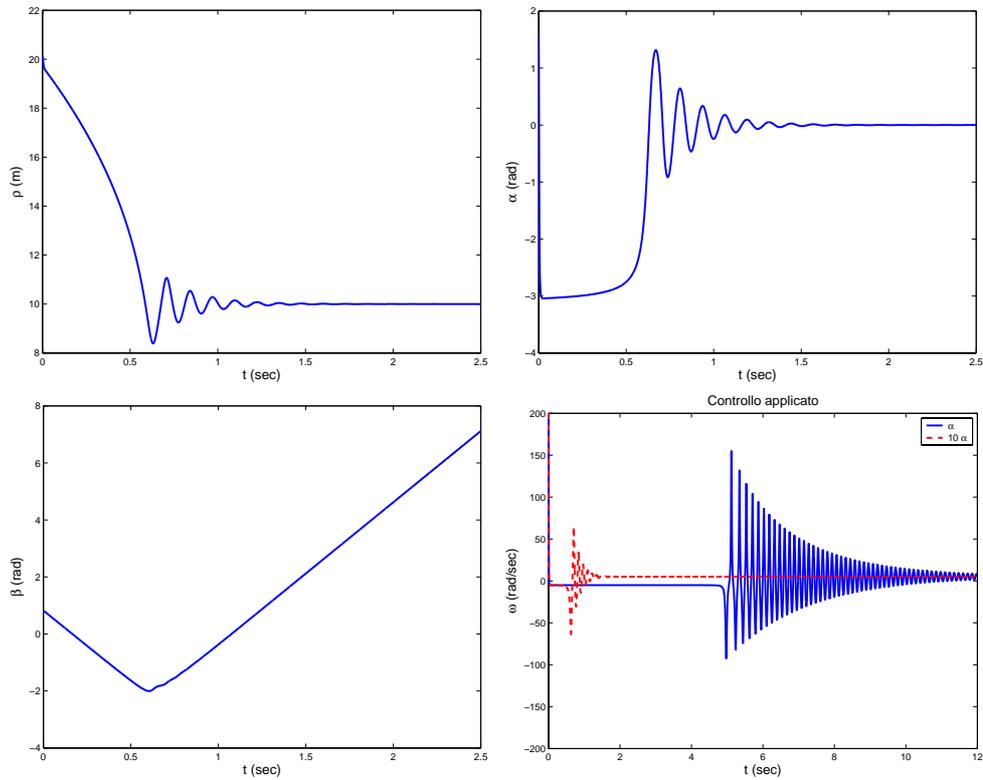


Figure 4: Andamento delle tre variabili di stato (non traslate) nel caso di stabilizzazione ottenuta con una funzione di Lyapunov di controllo. Il sistema converge al moto di equilibrio. Nella figura in basso a destra si noti come l'influenza della costante di guadagno modifichi apprezzabilmente la velocità di convergenza all'equilibrio.

tale variabile tiene conto del numero delle rivoluzioni attorno all'origine compiute dal veicolo. Nella figura in basso a destra si può notare la differenza nell'attuazione se si inserisce o meno il termine di guadagno  $10\alpha$  al posto di  $\alpha$ .