

Esercitazione Scritta di Controlli Automatici — 10-01-06

Il velivolo VTOL (Vertical Takeoff and Landing) riportato in figura 1 può decollare e atterrare lungo la verticale.

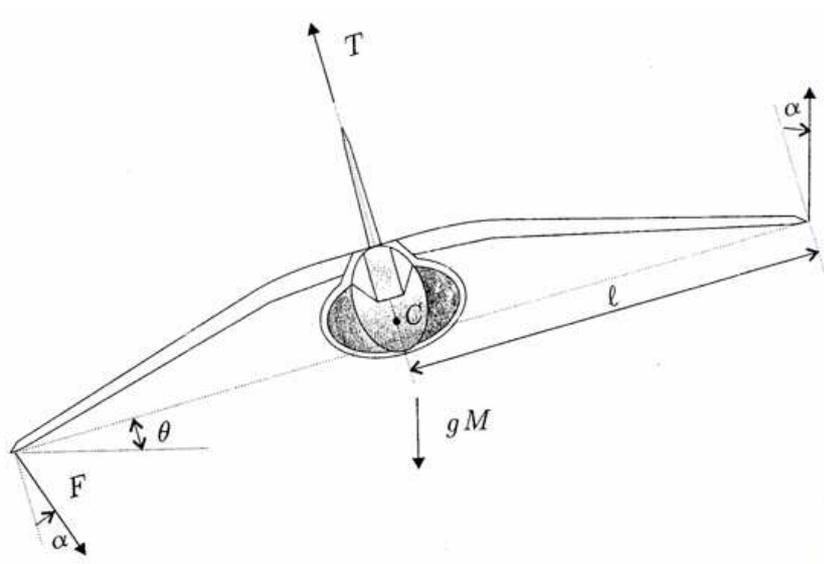


Figure 1: Modello di velivolo in grado di decollare e atterrare verticalmente

Un modello dinamico del velivolo è dato da

$$\begin{cases} M\ddot{y} = -\sin(\theta)T + 2\cos(\theta)\sin(\alpha)F \\ M\ddot{z} = \cos(\theta)T + 2\sin(\theta)\sin(\alpha)F - gM \\ J\ddot{\theta} = 2l\cos(\alpha)F \end{cases}, \quad (1)$$

dove y , z e θ rappresentano rispettivamente la posizione verticale e orizzontale del centro di massa del velivolo e l'angolo formato dal velivolo rispetto all'orizzonte. T è il *thrust*, cioè la spinta del getto centrale rivolta verticalmente in assi-corpo, e F è la spinta dei getti laterali che agiscono in direzione opposta sulla punta delle ali, come rappresentato in figura. La direzione della spinta F forma un angolo α con la direzione ortogonale alle ali. Infine, M rappresenta la massa del velivolo, J il suo momento di inerzia e l la lunghezza dell'ala.

- A** Si determinino gli equilibri del sistema.
- B** Si determini la matrice dinamica del sistema linearizzato in un punto di equilibrio.
- C** Si determini se è possibile stabilizzare il velivolo nell'equilibrio utilizzando la sola forza F , la sola forza T o utilizzando entrambe le forze.
- D** Si determini se è possibile stabilizzare il velivolo nell'equilibrio utilizzando le misure della sola z , della sola y , o utilizzando entrambe le misure.

Si considerino ora i seguenti valori numerici: $M = 3 \cdot 10^4 \text{kg}$, $J = 10^4 \text{kg m}^2$, $\alpha = \frac{\pi}{6}$ e $l = 5 \text{m}$.

- E** Disponendo dei controlli T e F e delle misure di y e z , progettare un compensatore basato su regolatore che renda l'equilibrio asintoticamente stabile.
- F** Si realizzi una simulazione numerica del comportamento del sistema ottenuto connettendo il compensatore ottenuto al passo precedente con il sistema non lineare e si commentino i risultati ottenuti.

Soluzione

A Per determinare i punti di equilibrio del sistema si pongono uguali a zero le velocità e le accelerazioni del velivolo, da cui si trova immediatamente che z_{eq} e y_{eq} possono assumere un qualsiasi valore costante, $\theta_{eq} = 0$ e gli ingressi di equilibrio sono $F_{eq} = 0$ e $T_{eq} = Mg$.

Si scelgano come variabili di stato le variabili $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (y - y_{eq}, z - z_{eq}, \theta, \dot{y}, \dot{z}, \dot{\theta})$ e come ingressi $\tilde{T} = T - T_{eq}$. Nelle nuove coordinate si ha:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_4 \\ \dot{x}_2 = x_5 \\ \dot{x}_3 = x_6 \\ \dot{x}_4 = -\sin(x_3)\frac{1}{M}(\tilde{T} + Mg) + \cos(x_3)\frac{2\sin(\alpha)}{M}F \\ \dot{x}_5 = \cos(x_3)\frac{1}{M}(\tilde{T} + Mg) + \sin(x_3)\frac{2\sin(\alpha)}{M}F - g \\ \dot{x}_6 = \frac{2l}{J}\cos(\alpha)F \end{cases} \quad (2)$$

B La matrice dinamica del sistema linearizzato risulta quindi

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

C Per studiare la stabilizzabilità del sistema con i diversi ingressi, si osservi che gli autovalori della matrice dinamica sono tutti nell'origine. Le matrici degli ingressi relative a T ed F nel modello linearizzato sono date da

$$B_T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_F = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2\frac{\sin(\alpha)}{M} \\ 0 \\ 2\frac{l\cos(\alpha)}{J} \end{bmatrix},$$

e le relative matrici di raggiungibilità sono

$$R_T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{M} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{M} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{rank } R_T = 2,$$

$$R_F = \begin{bmatrix} 0 & 2\frac{\sin(\alpha)}{M} & 0 & -2\frac{gl\cos(\alpha)}{J} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\frac{l\cos(\alpha)}{J} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2\frac{\sin(\alpha)}{M} & 0 & -2\frac{gl\cos(\alpha)}{J} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2\frac{l\cos(\alpha)}{J} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{rank } R_T = 4.$$

Ciascun ingresso preso singolarmente non rende quindi il sistema completamente raggiungibile. Non essendo le dinamiche dei sottosistemi non raggiungibili asintoticamente stabili, il sistema non è stabilizzabile con nessuno dei due ingressi singolarmente. L'utilizzo di entrambe gli ingressi (con matrice $B = [B_T \ B_F]$) dà luogo ad una matrice di raggiungibilità $R = [B, AB, \dots, A^5 B]$ il cui rango è sei, garantendo così la completa raggiungibilità e quindi la stabilizzabilità.

D I due sensori descritti sono in grado di misurare, rispettivamente, x_1 e x_2 . Le matrici di uscita del linearizzato risultano quindi:

$$C_y = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

e

$$C_z = [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0].$$

Poiché la retroazione delle uscite lascia inalterate le posizioni degli autovalori interni al sottospazio di inosservabilità, ed essendo come prima osservato non asintoticamente stabili gli autovalori del sistema non controllato, anche la completa osservabilità del sistema è necessaria alla stabilizzabilità se si utilizzano le misure delle uscite (e non gli stati).

Avendosi

$$O_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -g \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{rank } O_y = 4,$$

e

$$O_z = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{rank } O_z = 2,$$

si evince che entrambe le misure sono necessarie. Esse sono anche sufficienti avendosi (detta C la matrice relativa alle due uscite) $\text{rank } [C^T \ A^T C^T, \dots, A^{5T} C^T] = 6$.

E Il regolatore si progetta determinando una matrice di retroazione K che sposti gli autovalori della matrice A nella posizione desiderata. Non essendo possibile utilizzare uno solo degli ingressi per allocare tutti i poli del sistema, si può procedere utilizzando una prima retroazione K_1 tale che il sistema retroazionato con matrice dinamica $A_1 = A + BK_1$ sia completamente raggiungibile con uno solo dei due ingressi. Questo si può fare ad esempio tramite il lemma di Heymann, oppure scegliendo una matrice K_1 generica e verificando la proprietà (quasi ogni scelta di K_1 -eccettuato cioè un insieme di matrici a misura nulla- rende infatti il sistema completamente raggiungibile con uno solo dei due ingressi). Si procede poi a determinare una matrice di retroazione K_2 sul sistema (A_1, B_1) in modo tale da spostare gli autovalori nella posizione desiderata. Lo stesso procedimento si può usare per il calcolo della matrice di iniezione delle uscite, riferendosi al sistema duale (A^T, C^T) .

La scelta della posizione dei poli in anello chiuso può venir fatta secondo criteri diversi, tra cui quello di ottimizzare una funzione di costo quadratica nella evoluzione dello stato e nei controlli, secondo la procedura LQR.

Ad esempio, sia $sys = ss(A, B, C, D)$, con D matrice 2×2 identicamente nulla, Q ed R , le matrici peso del funzionale, sono due matrici di dimensione 6×6 e 2×2 rispettivamente. Q è stata scelta diagonale, con elementi sulla diagonale pari a 10 mentre R coincide con la matrice identità. Il risultato ottenuto è

$$K = 10^3 \begin{bmatrix} 0 & 0.0032 & 0 & 0 & 0.4356 & -0 \\ -0.0032 & 0 & 0.6568 & -0.0208 & 0 & 1.2323 \end{bmatrix}$$

che piazza i poli in $p = (-0.3708 + 0.1470i, -0.3708 - 0.1470i, -0.1624 + 0.3772i, -0.1624 - 0.3772i, -0.0073 + 0.0073i, -0.0073 - 0.0073i)$ mediante la retroazione $A - BK$.

La parte relativa alla ricostruzione dello stato può essere fatta con un osservatore di Kalman, robusto rispetto ai disturbi di attuazione e di misura ottenuto con il comando `[KEST,L] = kalman(sys,Q,R)`. Ad esempio la matrice Q si sceglie pari alla matrice identica 2×2 , scalata di un fattore 10^3 e la matrice R pari alla matrice identica 2×2 . La matrice di iniezione delle uscite L ottenuta è la seguente

$$L = \begin{bmatrix} 1.8812 & 0 \\ 0 & 0.0459 \\ -0.0995 & 0 \\ 1.7695 & 0 \\ 0 & 0.0011 \\ -0.0274 & 0 \end{bmatrix}$$

Infine, il compensatore basato sul regolatore si ottiene con il comando matlab `rsys= reg(sys,K,L)`. La matrice di trasferimento $R(s)$ del regolatore (ottenibile con il comando `tf(rsys)`) risulta

Transfer function from input 1 to output...

```

-2.885e-015 s^5 - 2.599e-015 s^4 - 1.083e-015 s^3 - 2.432e-016 s^2 - 2.945e-017 s - 8.166e-020
#1: -----

```

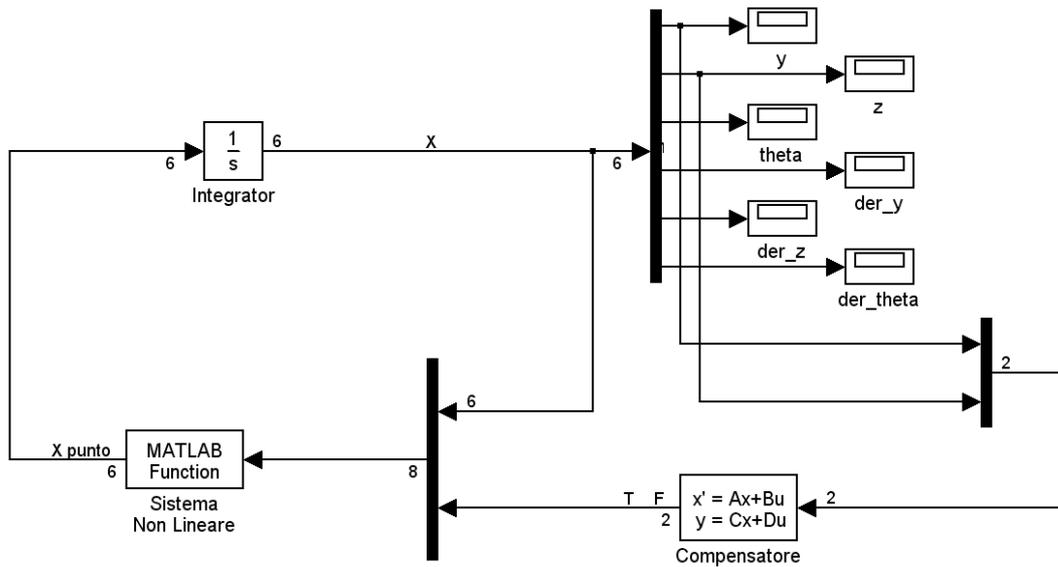


Figure 2: Schema Simulink del sistema non lineare controllato con il regolatore.

```

s^6 + 3.008 s^5 + 4.524 s^4 + 4.381 s^3 + 2.932 s^2 + 0.1692 s + 0.004885
-----
141.9 s^5 + 52.46 s^4 + 11.58 s^3 + 1.453 s^2 + 0.06713 s + 0.00155
#2: -----
s^6 + 3.008 s^5 + 4.524 s^4 + 4.381 s^3 + 2.932 s^2 + 0.1692 s + 0.004885

Transfer function from input 2 to output...
-0.6044 s^5 - 1.785 s^4 - 2.635 s^3 - 2.5 s^2 - 1.63 s - 0.008917
#1: -----
s^6 + 3.008 s^5 + 4.524 s^4 + 4.381 s^3 + 2.932 s^2 + 0.1692 s + 0.004885

1.562e-014 s^5 + 2.348e-014 s^4 + 1.949e-014 s^3 + 9.455e-015 s^2 + 3.381e-016 s + 5.184e-018
#2: -----
s^6 + 3.008 s^5 + 4.524 s^4 + 4.381 s^3 + 2.932 s^2 + 0.1692 s + 0.004885

```

F Lo schema simulink per la simulazione del sistema non lineare controllato con il regolatore progettato sul linearizzato è riportato in figura 2. Nel blocco *Sistema non lineare* si trova la dinamica non lineare del sistema traslato. Il blocco *Compensatore* contiene la forma di stato del compensatore progettato. Nel blocco *Integratore* si inseriscono i valori iniziali del moto di equilibrio che si vanno poi a perturbare per simulare il comportamento del sistema al di fuori del punto di equilibrio.

Nella figura 3 sono indicati gli andamenti delle variabili di stato del sottosistema dinamico regolato con equilibrio nell'origine.

La condizione iniziale per queste simulazioni è stata fissata a $[1, -1, 0, 0, 0, 0]^T$.

Discussione su fase non minima Il sistema regolato risulta a fase non minima per ogni scelta di $\alpha > 0$. Le funzioni di trasferimento del sistema regolato nel caso discusso nella soluzione del compito risulta

```

Zero/pole/gain from input 1 to output...
0.0047296 (s+0.1606) (s+15.96) (s-15.96) (s^2 + 0.1487s + 0.03724)
#1: -----
(s^2 + 0.7417s + 0.1591) (s^2 + 1.33s + 0.5177) (s^2 + 0.3248s + 0.1687) (s^2 + 0.5516s + 0.5184)

-9.6155e-020 (s+0.002838) (s^2 - 0.0003036s + 4.513e-008) (s^2 + 0.0003035s + 4.723e-008) (s^2 + 0.6351s + 0.1273) (s^2 + 0.2631s + 0.07837)
#2: -----
(s^2 + 0.01452s + 0.0001054) (s^2 + 0.04591s + 0.001054) (s^2 + 0.7417s + 0.1591) (s^2 + 1.33s + 0.5177) (s^2 + 0.3248s + 0.1687)
(s^2 + 0.5516s + 0.5184)

Zero/pole/gain from input 2 to output...
5.2067e-019 s^2 (s+0.8395) (s+15.96) (s-15.96) (s^2 + 0.0374s + 0.0005929) (s^2 + 0.6262s + 0.6669)
#1: -----
(s^2 + 0.01452s + 0.0001054) (s^2 + 0.04591s + 0.001054) (s^2 + 0.7417s + 0.1591) (s^2 + 1.33s + 0.5177) (s^2 + 0.3248s + 0.1687)
(s^2 + 0.5516s + 0.5184)

-2.0145e-005 (s+0.005515)
#2: -----
(s^2 + 0.01452s + 0.0001054) (s^2 + 0.04591s + 0.001054)

```

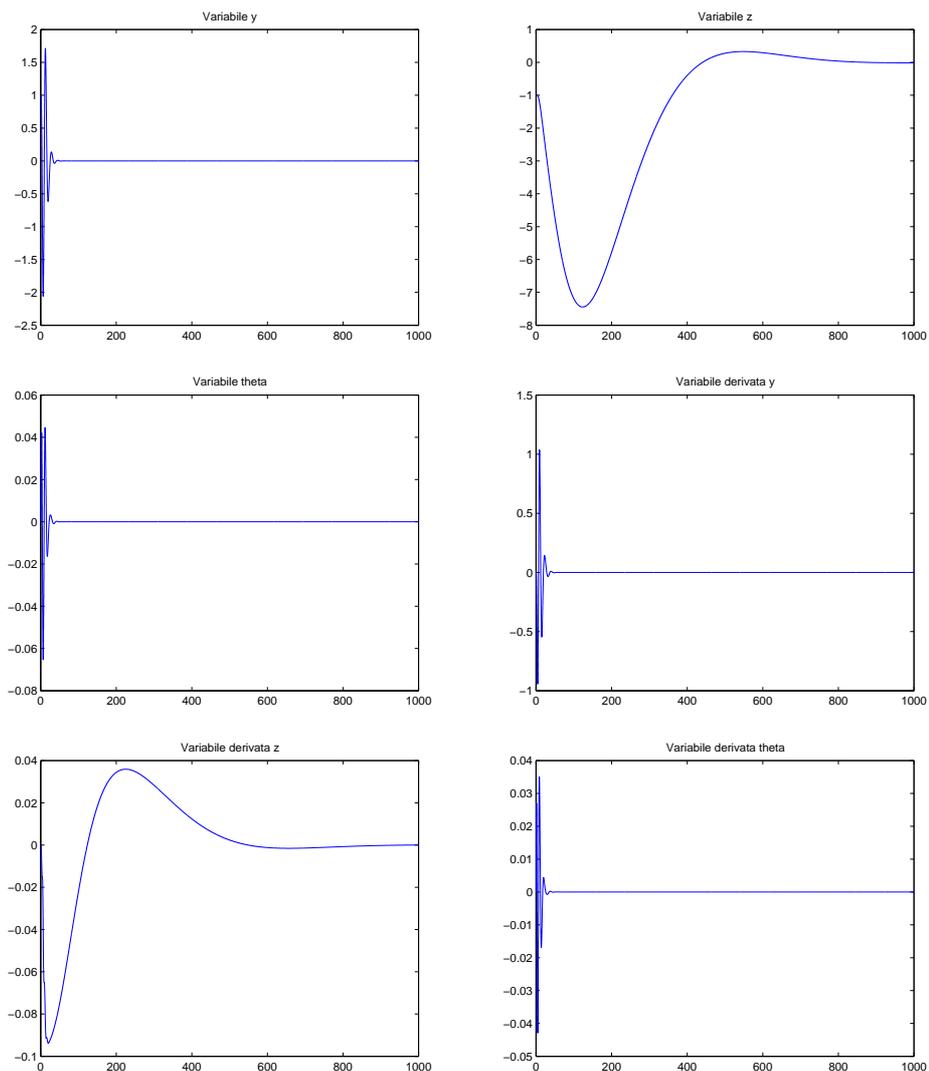


Figure 3: Andamento delle variabili di stato traslate nel caso di stabilizzazione tramite controllo basato sul regolatore.

Si nota che le funzioni di trasferimento tra i due ingressi e l'uscita y presentano entrambe uno zero positivo $z = 15.96$. Si consideri in particolare la funzione di trasferimento tra l'ingresso T e l'uscita y :

$$G_{Ty} = \frac{0.0047296(s + 0.1606)(s + 15.96)(s - 15.96)(s^2 + 0.1487s + 0.03724)}{(s^2 + 0.7417s + 0.1591)(s^2 + 1.33s + 0.5177)(s^2 + 0.3248s + 0.1687)(s^2 + 0.5516s + 0.5184)}$$

Si hanno tutti i poli e tutti gli zeri a parte reale negativa tranne uno zero in 15.96, nella risposta al gradino di questa funzione di trasferimento si deve riconoscere un andamento iniziale di segno opposto al valore a regime. Visto che il valore a regime è pari a -1 si deve avere che inizialmente la risposta al gradino aumenta. La risposta al gradino di G_{Ty} è riportata in figura 4

Nel caso in cui lo stesso testo del compito venga risolto con $\alpha = 0$, si ottiene un sistema regolato con le seguenti funzioni di trasferimento in cui non sono presenti zeri a parte reale positiva.

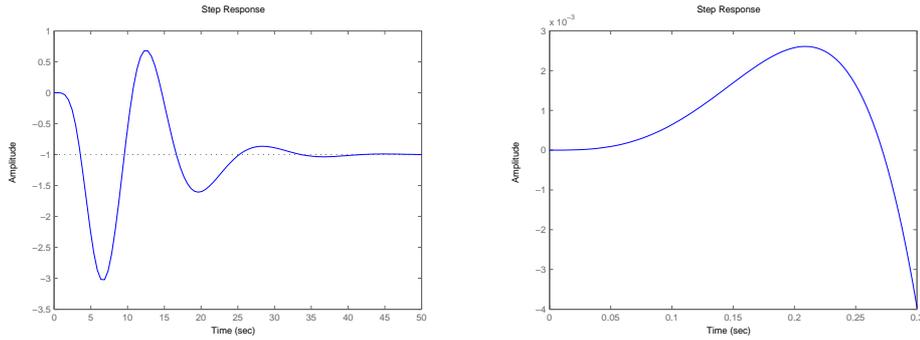


Figure 4: Risposta al gradino di G_{Ty} con ingrandimento nella zona iniziale.

```

Zero/pole/gain from input 1 to output...
          -1.4419 (s+0.1664) (s^2 + 0.1543s + 0.04002)
#1: -----
(s^2 + 0.7684s + 0.1707) (s^2 + 1.379s + 0.5567) (s^2 + 0.3377s + 0.1816) (s^2 + 0.5711s + 0.5567)

#2: 0

Zero/pole/gain from input 2 to output...
#1: 0

          -2.0145e-005 (s+0.005515)
#2: -----
(s^2 + 0.01452s + 0.0001054) (s^2 + 0.04591s + 0.001054)

```

In questo caso la funzione di trasferimento tra l'ingresso T e l'uscita y è a fase minima e risulta

$$\hat{G}_{Ty} = \frac{-1.4419(s + 0.1664)(s^2 + 0.1543s + 0.04002)}{(s^2 + 0.7684s + 0.1707)(s^2 + 1.379s + 0.5567)(s^2 + 0.3377s + 0.1816)(s^2 + 0.5711s + 0.5567)}$$

La risposta al gradino è riportata in figura 5 e come si può notare l'andamento iniziale della risposta al gradino ha lo stesso segno del valore a regime.

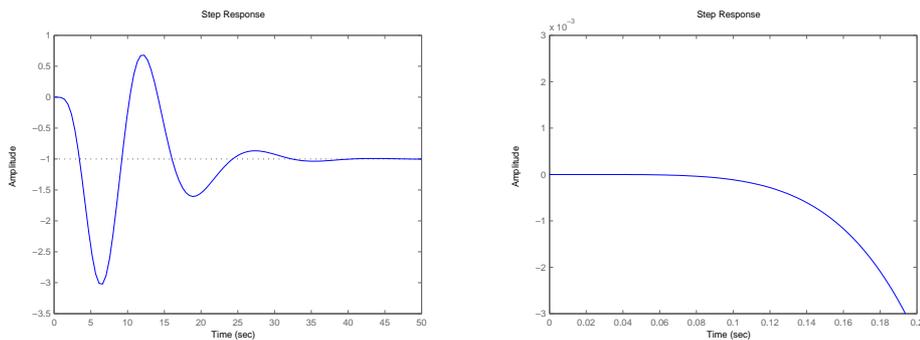


Figure 5: Risposta al gradino di \hat{G}_{Ty} con ingrandimento nella zona iniziale.