

Numero di matricola

-	-	-	$= 10\alpha - 1$	$= 10\beta - 1$	$= 10\gamma - 1$

Si consideri la macchina di prova per pneumatici rappresentata in fig.1. Il dispositivo è costituito da un tappeto scorrevole, in moto con velocità V costante, sul quale viene appoggiato il pneumatico che si desidera testare. Il pneumatico è collegato, per mezzo di un giunto viscoso, ad un volano, sul quale agisce la coppia di controllo T . Si indichi con J_1 il momento di inerzia assiale del pneumatico, con Ω_1 la sua velocità angolare, con J_2 il momento di inerzia assiale del volano, con Ω_2 la sua velocità angolare. Sia c il coefficiente di attrito viscoso del giunto, R il raggio del pneumatico.

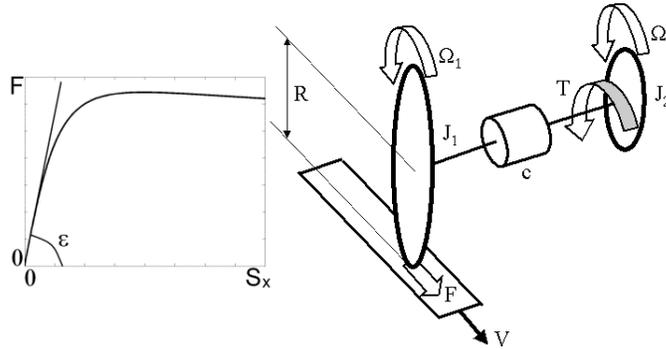


Figure 1: Schema di una macchina di prova per pneumatici.

Il sistema risulta descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} J_1 \dot{\Omega}_1 + c(\Omega_1 - \Omega_2) = FR, \\ J_2 \dot{\Omega}_2 + c(\Omega_2 - \Omega_1) = T. \end{cases}$$

In prima approssimazione, la forza F che il tappeto esercita sul pneumatico è una funzione lineare dello scorrimento S_x , definito come $S_x = 1 - \frac{\Omega_1 R}{V}$, secondo la relazione $F = S_x \tan \varepsilon$.

Si considerino i seguenti valori numerici: $J_1 = 0.7 + \frac{\alpha}{100} \text{ kgm}^2$, $J_2 = 1.4 + \frac{\beta}{100} \text{ kgm}^2$, $R = 0.3 \text{ m}$, $c = 35 + \frac{\gamma}{10} \frac{\text{Nms}}{\text{rad}}$, $V = 20 \text{ m/s}$, $\tan \varepsilon = 12500 \text{ N}$. Si desidera controllare la velocità angolare del pneumatico Ω_1 agendo sulla coppia di controllo T .

- A) Si ricavi la configurazione di equilibrio per il sistema, nel caso in cui la coppia T sia costante e pari a $\bar{T} = -600 \text{ Nm}$.
- B) Si studi l'evoluzione del sistema in un intorno della configurazione di equilibrio ottenuta al punto precedente. Si determini un'opportuna rappresentazione in forma di stato del sistema e si discuta la stabilità dell'equilibrio.
- C) Si determini la funzione di trasferimento tra la variazione dell'ingresso T e la variazione dell'uscita Ω_1 rispetto al punto di equilibrio.
- D) Si traccino i diagrammi di Bode asintotici di ampiezza e fase della funzione di trasferimento ottenuta.
- E) Si consideri il progetto di un controllore in retroazione per la funzione di trasferimento ricavata al punto C) in modo da soddisfare le specifiche riportate nel seguito. Si descriva esplicitamente la procedura di progetto del controllore, commentando i passaggi effettuati durante le varie fasi di progetto; si corredi la trattazione con i diagrammi di Bode utilizzati e si riporti l'espressione analitica del controllore ricavato.
 - E1) Partendo dalla configurazione di equilibrio precedentemente ottenuta, il pneumatico raggiunga a regime esattamente la velocità angolare $\hat{\Omega}_1 = 58 \text{ rad/s}$. Nel raggiungere questo valore, la velocità angolare del pneumatico non deve superare la quota $\hat{\Omega}_1 = 58.6 \text{ rad/s}$. Si deve garantire inoltre che, dopo al più 0.2 secondi, la velocità angolare rimanga confinata nella fascia di $\pm 5\%$ del valore di regime.
 - E2) Si ipotizzi che il trasduttore di misura della velocità angolare Ω_1 sia affetto da rumore sinusoidale per frequenze superiori a 320 Hz . Si cerchi di attenuare tali disturbi di un fattore pari a 10^3 .

Opzionale) Si simuli l'evoluzione del sistema in anello chiuso e si verifichi che il controllore progettato soddisfa tutte le specifiche.

Soluzione

A) Scelte come variabili di stato $x_1 = \Omega_1$ e $x_2 = \Omega_2$, il sistema può essere espresso dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= \frac{c}{J_1}(x_2 - x_1) + \frac{FR}{J_1} \\ \dot{x}_2 &= \frac{c}{J_2}(x_1 - x_2) + \frac{T}{J_2} \end{cases}$$

Al fine di trovare il punto di equilibrio richiesto con un ingresso pari a $T = \bar{T}$ si pongono a zero le derivate delle variabili di stato. Partendo dalla seconda equazione si ha $\dot{x}_2 = 0 \Rightarrow c(\bar{\Omega}_2 - \bar{\Omega}_1) = \bar{T}$. Sostituendo nella prima si ottiene $\dot{x}_1 = 0 \Rightarrow -\bar{T} = \bar{F}R$. In particolare dall'ultima relazione considerando l'espressione della forza F si ha:

$$\left(1 - \frac{\bar{\Omega}_1 R}{V}\right) \tan \varepsilon = -\frac{\bar{T}}{R}. \quad (1)$$

Si ottiene che

$$\bar{\Omega}_1 = \frac{V[\bar{T} + R \tan \varepsilon]}{R^2 \tan \varepsilon} = 56 \text{ rad/s}. \quad (2)$$

ed infine

$$\bar{\Omega}_2 = \frac{\bar{T}}{c} + \bar{\Omega}_1 = \frac{\bar{T}}{c} + \frac{V[\bar{T} + R \tan \varepsilon]}{R^2 \tan \varepsilon} = 38.86 \text{ rad/s}. \quad (3)$$

Si osservi che i valori numerici riportati valgono nel caso α, β, γ nulli.

B) Per studiare l'evoluzione del sistema in un intorno della configurazione di equilibrio ottenuta, è conveniente introdurre le variabili traslate: $\tilde{x} = x - \bar{x}$, $\tilde{u} = T - \bar{T}$, $\tilde{y} = \Omega_1 - \bar{\Omega}_1$. Nelle nuove variabili il sistema risulta descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= A\tilde{x} + B\tilde{u}, \\ \tilde{y} &= C\tilde{x} + D\tilde{u}, \end{aligned}$$

dove

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{c}{J_1} - \frac{\tan \varepsilon R^2}{V J_1} & \frac{c}{J_1} \\ \frac{c}{J_2} & -\frac{c}{J_2} \end{bmatrix};$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J_2} \end{bmatrix};$$

$$C = [1 \quad 0];$$

$$D = 0.$$

Per discutere la stabilità del punto di equilibrio è sufficiente valutare gli autovalori della matrice A . Il polinomio caratteristico della matrice è dato da:

$$\lambda^2 + \left(\frac{c}{J_1} + \frac{c}{J_2} + \tan \varepsilon \frac{R^2}{V J_1}\right) \lambda + \frac{R^2 c}{V J_1 J_2} \tan \varepsilon = 0.$$

Si osservi che non essendoci variazioni di segno ed essendo il polinomio di grado 2 gli autovalori sono a parte reale negativa. Numericamente gli autovalori sono:

```
>> roots([1 155.3571 2009])
ans =
-141.1217
-14.2354
```

Il punto di equilibrio risulta perciò asintoticamente stabile.

C) Essendo la matrice D nulla, il calcolo della $G(s)$ simbolica può essere fatto in base alla relazione:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1} B.$$

Alternativamente la f.d.t. può essere valutata L-trasformando il sistema originario. Si ottiene che:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\frac{c}{J_1 J_2}}{s^2 + \left(\frac{c}{J_1} + \frac{c}{J_2} + \tan \varepsilon \frac{R^2}{V J_1}\right) s + \frac{R^2 c}{V J_1 J_2} \tan \varepsilon}.$$

La funzione di trasferimento è valutabile numericamente con il comando Matlab $\mathbf{G=tf(SS(A,B,C,D))}$. Si ottiene:

$$\mathbf{G}(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{35.71}{s^2 + 155.4s + 2009}$$

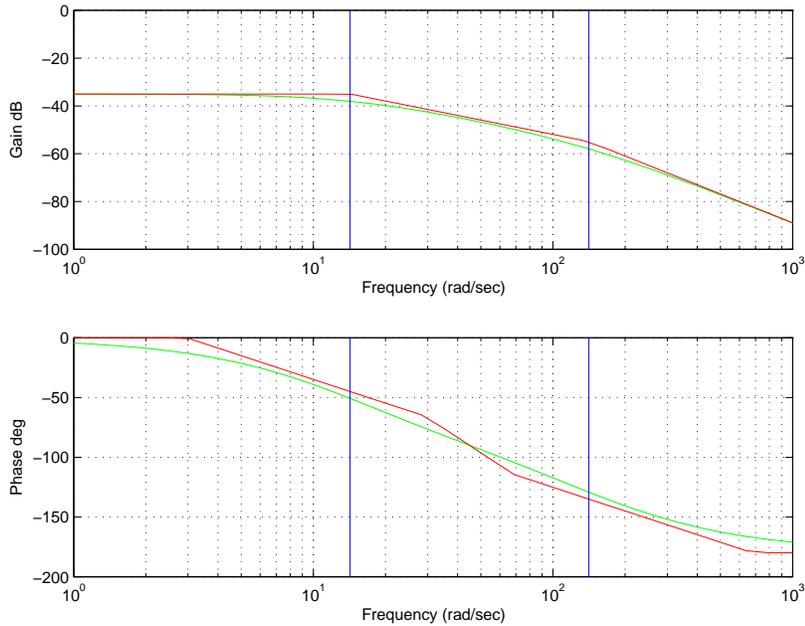


Figure 2: Diagrammi di Bode della f.d.t. $G(s)$

D) I diagrammi di Bode della f.d.t. $G(s)$ sono riportati in fig.2.

E) Il sistema considerato è asintoticamente stabile in anello aperto, quindi il progetto del controllore può essere fatto direttamente sui diagrammi di Bode della f.d.t. di anello $C(s)G(s)$. Facendo riferimento al progetto di un controllore nella forma:

$$C(s) = \frac{K}{s^t} \hat{C}(s), \quad \text{con} \quad \hat{C}(0) = 1,$$

la scelta del *tipo* t e della costante di guadagno K del controllore può essere fatta in base alle specifiche statiche. Affinché l'errore a regime per un riferimento a gradino sia nullo, è sufficiente introdurre un polo nell'origine. I diagrammi di Bode della f.d.t. $C(s)G(s)$, con $C(s) = \frac{1}{s}$, vengono riportati in fig.3.

La seconda specifica richiede che il sistema in anello chiuso abbia una sovralongazione massima pari a:

$$S_{max} = \frac{(\tilde{\Omega}_1 - \bar{\Omega}_1) - (\hat{\Omega}_1 - \bar{\Omega}_1)}{(\hat{\Omega}_1 - \bar{\Omega}_1)} = \frac{(58.6 - 56) - (58 - 56)}{(58 - 56)} = 0.3.$$

Tale specifica si traduce nell'imporre che il sistema in anello chiuso sia approssimabile ad un sistema del secondo ordine con uno smorzamento dei poli dominanti pari o superiore a $\delta = 0.3579$ (come si ricava dall'espressione della sovralongazione per i sistemi del secondo ordine $S = e^{-\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}}$). Sul piano di Bode, questo significa che si ammette un margine di fase $\phi_M \approx 36^\circ$. La specifica sul tempo di assestamento, per il caso di sistema in anello chiuso a due poli dominanti stabilito sulla base della precedente specifica, indica che la pulsazione naturale dei due poli deve essere $\omega_N \geq \frac{3}{\delta T_a} \approx 42 \text{ rad/s}$. Questa specifica si traduce nel chiedere che il diagramma di Bode delle ampiezze di $C(j\omega)G(j\omega)$ intersechi l'asse a 0db per pulsazioni superiori a 42 rad/s.

Per soddisfare queste specifiche non è sufficiente aumentare il guadagno, ma è necessario introdurre un'opportuna azione anticipatrice. Ad esempio fissando il guadagno $k = 5000$ e piazzando uno zero in -25 si ottengono i diagrammi di Bode riportati in fig.4. Così facendo si ottengono un margine di fase di 59.6° e una pulsazione di taglio di 51 rad/sec.

A questo punto rimane da imporre la specifica di reiezione dei disturbi in alta frequenza:

$$|C(j\omega)G(j\omega)|_{db} \leq -60 \text{ db}$$

per $\omega \geq 2000 \text{ rad/s}$. Si garantisce questa specifica inserendo nel compensatore un polo in alta frequenza. Ponendo il polo in -300 , si ottiene il diagramma di Bode riportato in fig.5. Le specifiche relative a margine di fase e pulsazione di taglio rimangono verificate.

Il controllore finale ottenuto risulta:

$$C(s) = 5000 \frac{(0.04s + 1)}{s(0.0033s + 1)}$$

F) Come si vede in fig.6, la risposta al gradino del sistema in anello chiuso rispetta le specifiche assegnate.

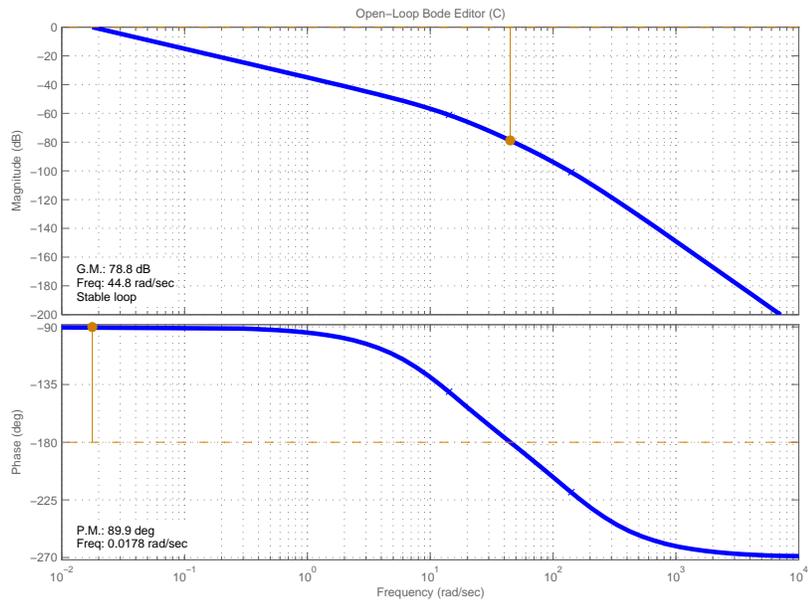


Figure 3: Diagrammi di Bode della f.d.t. $C(s)G(s)$ con $C(s) = \frac{1}{s}$

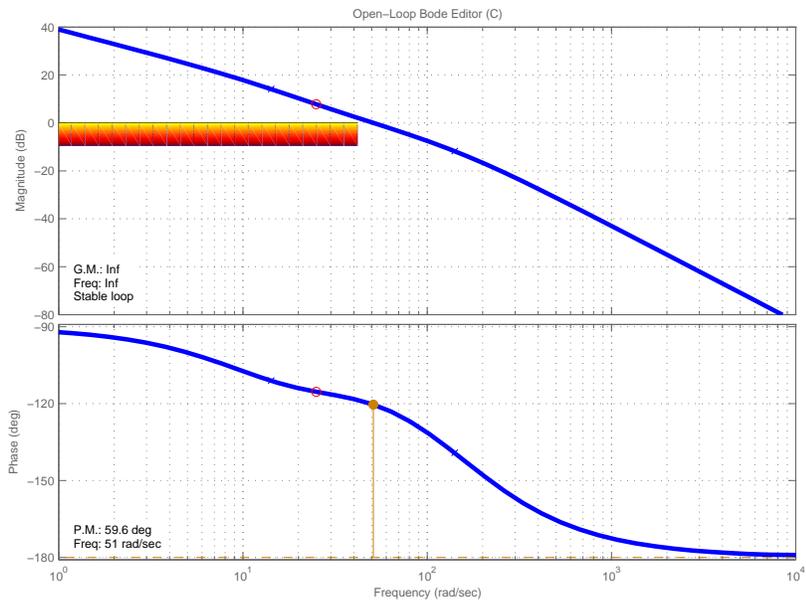


Figure 4: Diagrammi di Bode della f.d.t. $C(s)G(s)$ con $C(s) = 5000 \frac{(0.04s+1)}{s}$

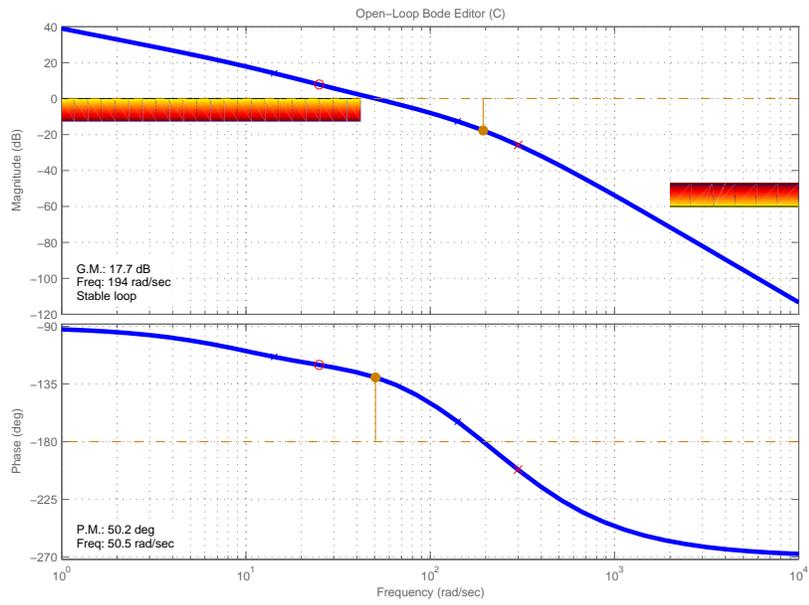


Figure 5: Diagramma di Bode della f.d.t. $C(s)G(s)$ con $C(s) = 5000 \frac{(0.04s+1)}{s(0.0033s+1)}$

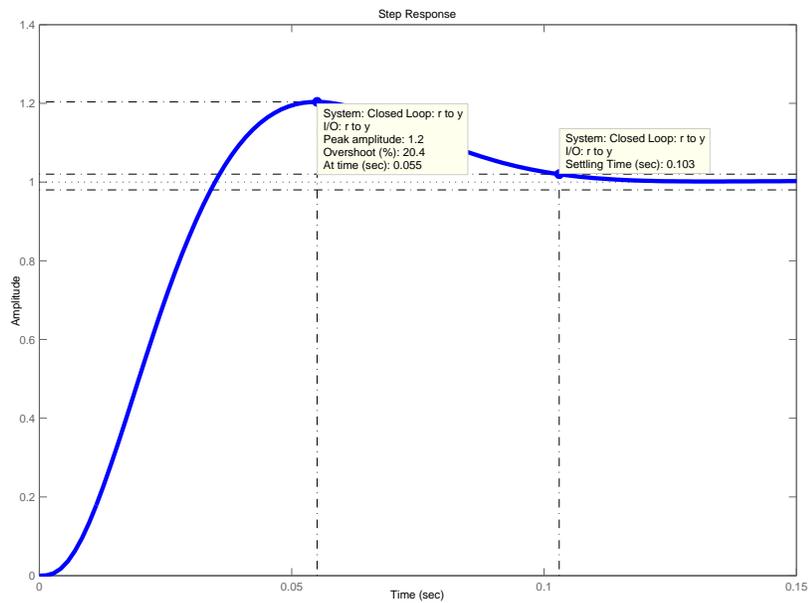


Figure 6: Risposta al gradino della f.d.t. di anello chiuso