

**Quesito 1**

Si consideri il sistema meccanico in figura 1.

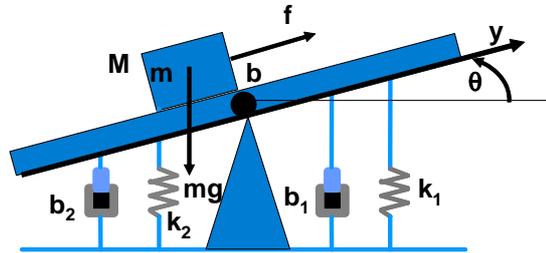


Figura 1: Modello del sistema.

Esso è costituito da un corpo di massa  $m$  libero di muoversi su di una piattaforma rotante di massa  $M$  e lunghezza  $L$ . La piattaforma è ancorata a terra tramite due molle di costante elastica  $k_1$  e  $k_2$  e due smorzatori aventi coefficienti di attrito pari a  $b_1$  e  $b_2$ , rispettivamente. Al corpo è applicata una forza di controllo  $f$  ed il suo moto è soggetto ad una forza di attrito radente di coefficiente  $b$ . Indicando con  $y$  la distanza del corpo dall'asse di rotazione e con  $\theta$  l'angolo che la piattaforma forma con l'asse orizzontale, la dinamica del sistema può essere espressa dalle seguenti equazioni:

$$m\ddot{y} = f - b\dot{y} + m\dot{\theta}^2 - mg \sin \theta$$

$$\left(\frac{1}{12}ML^2 + my^2\right) \ddot{\theta} = -mgy \cos \theta - 2my\dot{\theta} - (k_1 + k_2) \left(\frac{L}{2}\right)^2 \sin \theta \cos \theta - (b_1 + b_2) \left(\frac{L}{2}\right)^2 \cos^2 \theta \dot{\theta}.$$

Il sistema linearizzato nell'intorno dell'origine con ingresso nullo ( $f = 0$ ) è descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} \ddot{y} &= \frac{f}{m} - \frac{b}{m}\dot{y} - g\theta \\ \ddot{\theta} &= -12\frac{mg}{ML^2}y - 3\frac{k_1 + k_2}{M}\theta - 3\frac{b_1 + b_2}{M}\dot{\theta}. \end{aligned}$$

**1.A** Considerando di disporre della misura della posizione  $y$ , si rappresenti il sistema linearizzato in forma di stato rispetto alle seguenti variabili  $x = [y, \theta, \dot{y}, \dot{\theta}]^T$  e se ne studi la raggiungibilità e l'osservabilità.

**1.B** Dati i seguenti valori numerici:  $M = 2$  kg,  $m = 1$  kg,  $k_1 = 1$  N/m,  $k_2 = 10$  N/m,  $b = 2$  Ns/m,  $b_1 = 1$  Ns/m,  $b_2 = 5$  Ns/m,  $L = 0.5$  m e  $g = 9.8$  m/s<sup>2</sup>, si valuti la stabilità del sistema e si progetti un compensatore basato sul regolatore in grado di stabilizzare asintoticamente il sistema nell'origine. Si forniscano esempi di almeno due progetti differenti caratterizzati da risposte con diverse velocità di assestamento degli stati all'origine e si confrontino le azioni di controllo risultanti. In entrambi i casi si faccia riferimento alla medesima allocazione di poli per l'osservatore. Si confrontino e si commentino i risultati valutando l'evoluzione del segnale di controllo e dell'uscita del sistema linearizzato a partire dalle condizioni iniziali  $[y, \theta, \dot{y}, \dot{\theta}]^T = [0.25, 1, 0, 0]^T$ .

**1.C** Si effettui una simulazione del sistema a ciclo chiuso ottenuto connettendo il controllore con il modello non lineare del sistema in entrambi i casi.

**Quesito 2**

Si consideri il seguente sistema non lineare

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + x_2(1 - 3x_1^2 - 2x_2^2) + u. \end{aligned}$$

**2.A** Si discuta la stabilità degli equilibri del sistema con ingresso nullo ( $u = 0$ ).

**2.B** Si progetti un controllore alla Lyapunov in modo da rendere l'origine globalmente asintoticamente stabile.

## Soluzione

1.A Il sistema linearizzato è descritto dalle seguenti equazioni

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ z &= Cx,\end{aligned}$$

con

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -g & -\frac{b}{m} & 0 \\ -12\frac{mg}{ML^2} & -3\frac{k_1+k_2}{M} & 0 & -3\frac{b_1+b_2}{M} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0],$$

$$x = [y, \theta, \dot{y}, \dot{\theta}]^T.$$

La matrice di raggiungibilità ( $R = [B \quad AB \quad A^2B \quad A^3B]$ ) è la seguente

$$R = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{m} & -\frac{b}{m^2} & \frac{b^2}{m^3} \\ 0 & 0 & 0 & -12\frac{g}{ML^2} \\ \frac{1}{m} & -\frac{b}{m^2} & \frac{b^2}{m^3} & -\frac{b^3}{m^4} \\ 0 & 0 & -12\frac{g}{ML^2} & 12\frac{g}{ML^2} \left( \frac{1}{m} + 3\frac{b_1+b_2}{M} \right) \end{bmatrix},$$

che risulta avere rango massimo, come è facile evincere per ispezione diretta o per calcolo esplicito del determinante ( $\det R = -144\frac{g^2}{m^2M^2L^4}$ ). Il sistema è quindi completamente raggiungibile.

Per ciò che concerne l'osservabilità del sistema dalla misura dello spostamento del corpo, si ha:

$$O = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_1A \\ C_1A^2 \\ C_1A^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -g & -\frac{b}{m} & 0 \\ 0 & \frac{bg}{m} & \frac{b^2}{m^2} & -g \end{bmatrix}.$$

Anche essa risulta avere evidentemente rango massimo ( $\det O = -g^2$ ). Il sistema è dunque completamente osservabile.

1.B Sostituendo i valori numerici riportati nel testo si ottiene

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -9.8 & -2 & 0 \\ -235.2 & -16.5 & 0 & -9 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Gli autovalori di  $A$  sono  $\lambda_1 = -10.1323$ ,  $\lambda_2 = 4.5327$ ,  $\lambda_{3/4} = -2.7002 \pm 6.5495i$ , quindi il sistema è instabile. Allo scopo di fornire due controllori differenti in grado di stabilizzare asintoticamente il sistema con diverse velocità di assestamento delle risposte a zero, progettiamo la retroazione statica degli stati  $K$  secondo il criterio LQR. Cerchiamo cioè la retroazione degli stati in grado di minimizzare l'indice di costo quadratico

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty (x^T Q x + u^T R u) dt,$$

con  $R$  matrice simmetrica definita positiva e  $Q$  simmetrica almeno semidefinita positiva.

Il primo progetto tende a penalizzare gli stati a favore del controllo, allo scopo di avere valori delle variabili di stato più contenuti e una loro più rapida convergenza a zero. Fissiamo a tal fine i pesi LQR come segue:

$$\begin{aligned}Q &= 10^3 I_4 \\ R &= 1,\end{aligned}$$

dove con  $I_4$  si è indicata la matrice identica di dimensioni  $4 \times 4$ . La matrice dei guadagni ottenuta con il comando Matlab `[K1,S,p1] = lqr(sys,Q1,R1)` è data da:

$$K_1 = [547.5129 \quad -4.5710 \quad 43.8151 \quad -11.6704],$$

ove  $\text{sys} = \text{ss}(A,B,C,0)$  rappresenta il sistema a ciclo aperto. Essa produce un'allocazione dei poli del sistema a ciclo chiuso in  $p_1 = [-32.5474 \quad -1.0452 \quad -10.6113 + 10.8079i \quad -10.6113 - 10.8079i]$ . Il secondo controllore tende invece a penalizzare il valore del segnale di controllo che tenderà quindi ad essere più contenuto. Scegliamo i pesi come segue:

$$Q = I_4$$

$$R = 10^3.$$

La matrice dei guadagni risultante è data da:

$$K_2 = [59.2269 \quad -15.4451 \quad 9.0659 \quad -1.1413].$$

Essa produce un'allocazione dei poli del sistema a ciclo chiuso in  $p_2 = [-10.1325 \quad -4.5324 \quad -2.7005 + 6.5496i \quad -2.7005 - 6.5496i]$ . Già da una prima analisi sulle matrici di retroazione e sui poli a ciclo chiuso è evidente la differenza tra i due progetti. Il primo produce una matrice  $K_1$  le cui entrate sono circa dieci volte più grandi di quelle di  $K_2$ , a riprova del fatto che il secondo insieme di pesi tende a penalizzare il controllo. D'altronde concedere maggiore autorità al controllo, come nel caso del primo progetto, ha l'effetto di produrre uno spostamento maggiore dei poli a ciclo chiuso. Essi risultano avere mediamente parti reali di maggiore entità rispetto a quelli del secondo progetto e sono quindi responsabili di modi più veloci (convergono a zero più rapidamente). In effetti, ad eccezione del polo reale positivo riallocato in uno reale negativo, il secondo progetto lascia praticamente inalterate le posizioni degli altri.

Completiamo il progetto del controllore con la realizzazione di un osservatore in grado di ricostruire gli stati non accessibili. La matrice  $L$  di iniezione delle uscite è calcolata in modo che la matrice dinamica dello stimatore  $A - LC$  abbia autovalori  $q = [-10 \quad -20 \quad -30 \quad -40]$ . Impiegando il comando Matlab  $L = \text{transpose}(\text{place}(A',C',q))$  si ottiene:

$$L = \begin{bmatrix} 89 \\ -2.5018 \cdot 10^3 \\ 2.4865 \cdot 10^3 \\ 2.2777 \cdot 10^3 \end{bmatrix}.$$

I due compensatori basati sui regolatori appena progettati hanno dinamica  $K_1(sI - A + BK_1 + LC)^{-1}L$  e  $K_2(sI - A + BK_2 + LC)^{-1}L$  e si costruiscono con i comandi  $\text{rsys1} = \text{ss}(A-B*K1-L*C,L,K1,0)$  e  $\text{rsys2} = \text{ss}(A-B*K2-L*C,L,K2,0)$  ovvero, a meno di un segno, con  $\text{rsys1} = \text{reg}(\text{sys},K1,L)$  e  $\text{rsys2} = \text{reg}(\text{sys},K2,L)$ .

Per concludere l'analisi dei due progetti costruiamo i due sistemi a ciclo chiuso con il linearizzato e i due controllori diversi (vedi schema Simulink in figura 2). Facciamo evolvere i due sistemi a partire

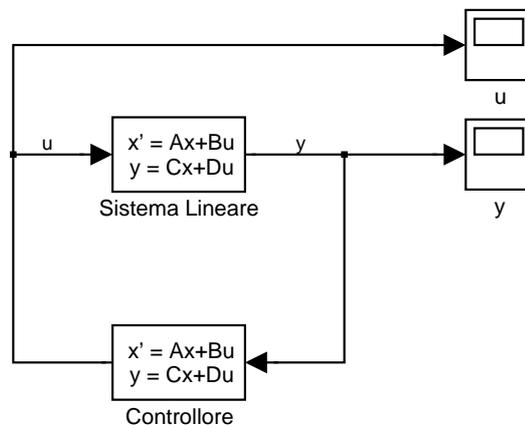


Figura 2: Schema Simulink del sistema linearizzato stabilizzato.

da condizioni iniziali  $[y, \theta, \dot{y}, \dot{\theta}]^T = [0.25, 1, 0, 0]^T$  e valutiamo l'andamento del segnale di controllo e dell'uscita. In figura 3 sono riportati gli andamenti dell'uscita dei due sistemi a ciclo chiuso. Si nota

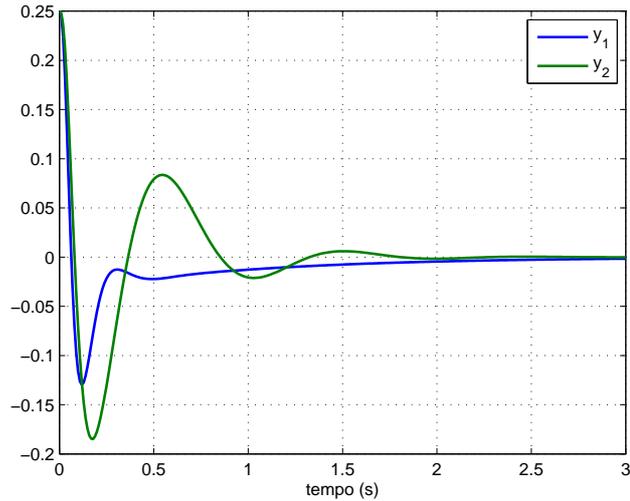


Figura 3: Andamento dell'uscita del sistema linearizzato a ciclo chiuso con i due diversi controllori.

che l'uscita del sistema controllato con il primo controllore converge più rapidamente, con minori oscillazioni e valori di minore intensità rispetto all'uscita del secondo sistema. Dalla figura 4, si evince che il primo controllo è più costoso del secondo in termini energetici, presentando un picco più alto e azzerandosi più lentamente. Anche questa analisi conferma le peculiarità del diverso progetto LQR. A ulteriore conferma, si possono effettuare delle valutazioni energetiche calcolando

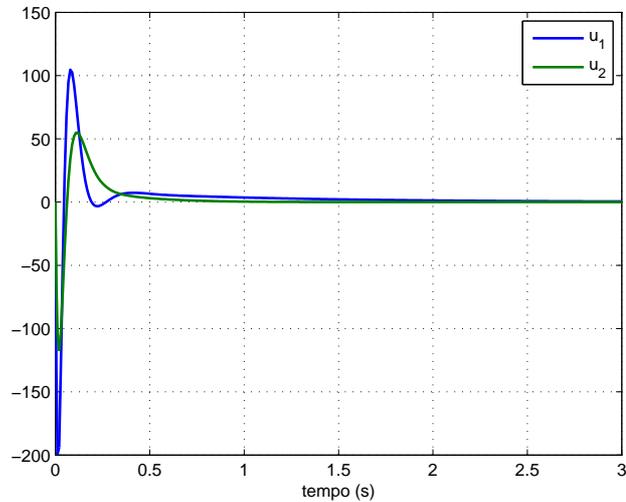


Figura 4: Andamento del segnale di controllo per i due diversi controllori.

gli integrali  $E_y = \int_0^T y^2(t)dt$ ,  $E_u = \int_0^T u^2(t)dt$  con  $T$  finito, ad esempio  $T = 3$  s. Per le uscite si ha  $E_{y_1} = 3.7 \cdot 10^{-3}$  e  $E_{y_2} = 8.7 \cdot 10^{-3}$ , mentre per gli ingressi si ha  $E_{u_1} = 1.5124 \cdot 10^3$  e  $E_{u_2} = 674.1665$ .

1.C La dinamica del sistema non lineare espressa in variabili di stato è la seguente:

$$\dot{x}_1 = x_3$$

$$\dot{x}_2 = x_4$$

$$\dot{x}_3 = \frac{f}{m} - \frac{b}{m}x_3 + x_1x_4^2 - g \sin x_2$$

$$\dot{x}_4 = -\frac{1}{J(x_1)} \left( mgx_1 \cos x_2 + (k_1 + k_2) \frac{L^2}{4} \sin x_2 \cos x_2 + (b_1 + b_2) \frac{L^2}{4} x_4 \cos^2 x_2 + 2mx_1x_3x_4 \right).$$

con  $J(x_1) = \frac{1}{12}ML^2 + mx_1^2$ .

Uno schema Simulink del sistema non lineare stabilizzato è riportato in figura 5.

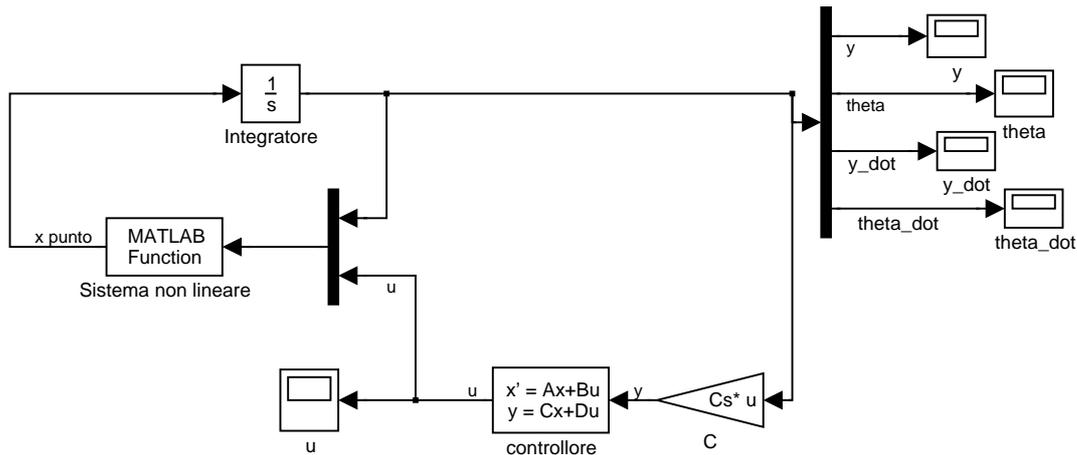


Figura 5: Schema Simulink del sistema non lineare stabilizzato con controllore lineare.

Il blocco Simulink **Sistema non lineare** contiene la seguente funzione:

```
function out = SistemaNONLineare(in)

% Ingressi del blocco
x1 = in(1);
x2 = in(2);
x3 = in(3);
x4 = in(4);
uu = in(5);

% Costanti del sistema e punto di equilibrio
ParametriSistema;

% Equilibrio nell'origine: no traslazione
z1 = x1;
z2 = x2;
z3 = x3;
z4 = x4;
u = uu;

% Dinamica del sistema
Jz1 = M/12*L^2+m*z1^2;

dot_x1 = z3;
dot_x2 = z4;
```

```

dot_x3 = -b/m*z3+z1*z4^2-g*sin(z2) + u/m;
dot_x4 = 1/Jz1*(-m*g*z1*cos(z2)-2*m*z1*z3*z4-(k1+k2)*L^2/4*sin(z2)*cos(z2)...
          -(b1+b2)*L^2/4*cos(z2)^2*z4);

% Uscite del blocco
out(1) = dot_x1;
out(2) = dot_x2;
out(3) = dot_x3;
out(4) = dot_x4;

```

dove lo *script* ParametriSistema contiene i valori numerici di tutti i parametri del sistema. Il blocco *controllore* contiene le matrici del regolatore precedentemente progettato.

Per valutare i due controllori consideriamo l'evoluzione del sistema a ciclo chiuso a partire da condizioni iniziali  $[y, \theta, \dot{y}, \dot{\theta}]^T = [0.25, 1, 0, 0]^T$ . Le figure 6, 7, 8 e 9 riportano l'andamento dello scostamento dal punto di equilibrio delle variabili  $y$ ,  $\theta$ ,  $\dot{y}$  e  $\dot{\theta}$  rispettivamente.

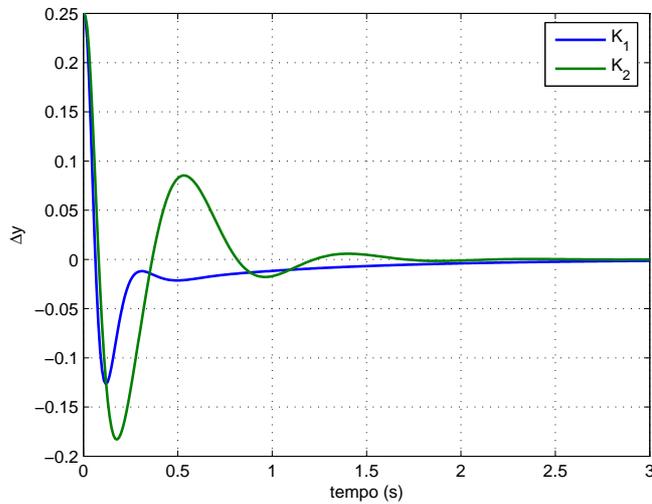


Figura 6: Andamento dello scostamento di  $y$  rispetto al valore di equilibrio.

Nella figura 10, invece, è riportato l'andamento della forza esterna  $f$  rispetto al suo valore di equilibrio, cioè della variabile di controllo  $u$ . Dall'analisi degli andamenti di tutti gli stati del sistema non lineare controllato, la differenza dei due progetti risulta ancora più evidente.

**2.A** Ponendo  $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$  e  $u = 0$ , si ottiene

$$\begin{aligned} 0 &= x_2 \\ 0 &= -x_1 + x_2 (1 - 3x_1^2 - 2x_2^2), \end{aligned}$$

da cui l'unico equilibrio nell'origine. Per valutarne la stabilità è sufficiente applicare il metodo indiretto di Lyapunov. Linearizzando, pertanto, il sistema nell'intorno dell'origine si ha la seguente matrice dinamica:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 - 6\bar{x}_1\bar{x}_2 & 1 - 3\bar{x}_1^2 - 6\bar{x}_2^2 \end{bmatrix}_{(\bar{x}_1, \bar{x}_2)=(0,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

L'origine è quindi punto di equilibrio esponenzialmente instabile avendo la matrice dinamica del linearizzato i seguenti autovalori  $\lambda_{1/2} = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{3}i)$ .

**2.B** Per progettare un controllore alla Lyapunov facciamo uso della candidata  $V = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$ , che è radialmente illimitata. Ricordando che  $\dot{V} = L_f V + L_g V u$ , progettiamo  $u$  in modo che  $\dot{V}$  risulti definita

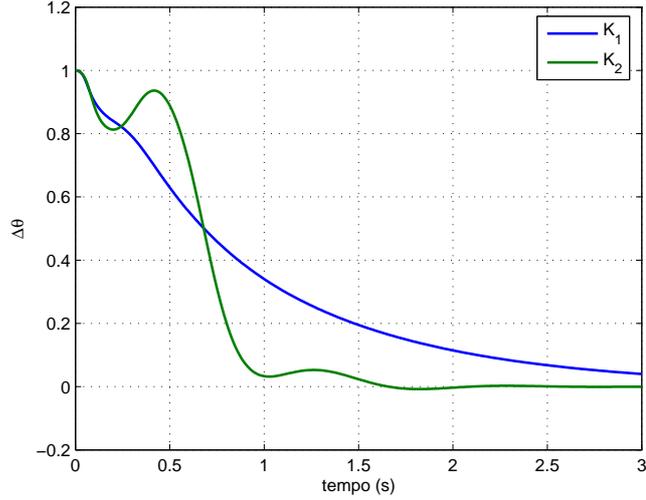


Figura 7: Andamento dello scostamento di  $\theta$  rispetto al valore di equilibrio.

negativa. Nel nostro caso si ha  $L_f V = x_1 x_2 + x_2 (-x_1 + x_2 (1 - 3x_1^2 - 2x_2^2)) = x_2^2 (1 - 2x_2^2 - 3x_1^2)$  e  $L_g V = x_2$ . La legge di controllo

$$u = -\frac{L_f V + x_2^2}{L_g V} = -x_2 (2 - 3x_1^2 - 2x_2^2),$$

rende  $\dot{V}$  solo semidefinita negativa:

$$\dot{V} = x_2^2 (1 - 2x_2^2 - 3x_1^2) - x_2^2 (2 - 3x_1^2 - 2x_2^2) = -x_2^2.$$

Analizziamo, però, il sistema soggetto a tale legge di controllo:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + x_2 (1 - 3x_1^2 - 2x_2^2) - x_2 (2 - 3x_1^2 - 2x_2^2) = -x_1 - x_2. \end{aligned}$$

Esso è un sistema lineare la cui matrice dinamica è

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

e dunque asintoticamente stabile con autovalori  $\lambda_{1/2} = \frac{1}{2} (-1 \pm \sqrt{3}i)$ .

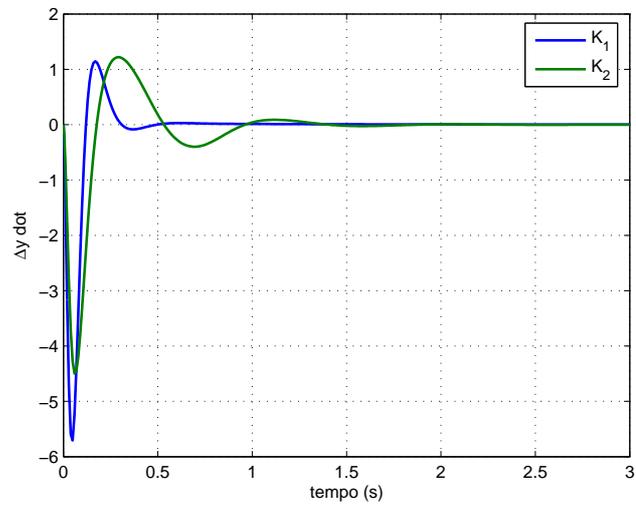


Figura 8: Andamento dello scostamento di  $\dot{y}$  rispetto al valore di equilibrio.

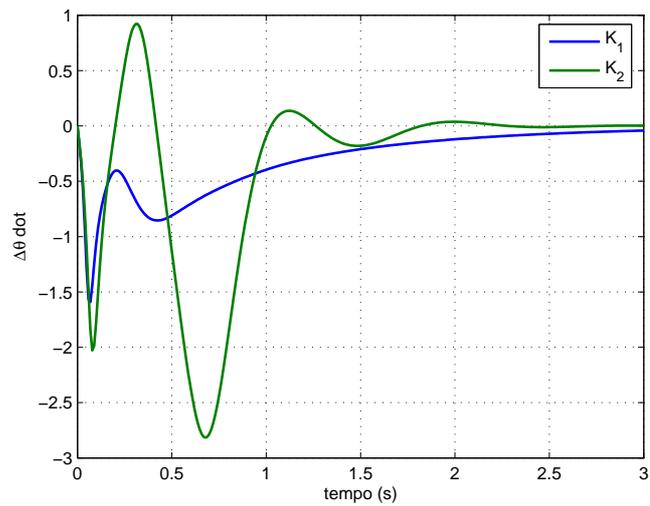


Figura 9: Andamento dello scostamento di  $\dot{\theta}$  rispetto al valore di equilibrio.

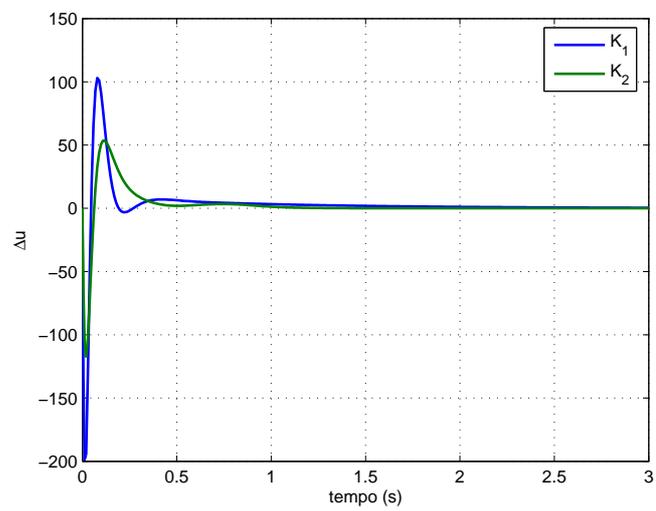


Figura 10: Andamento della forza esterna  $f$  rispetto al suo valore di equilibrio.