

**Quesito 1**

Si consideri il modello di elicottero vincolato a due gradi di libertà in figura 1.

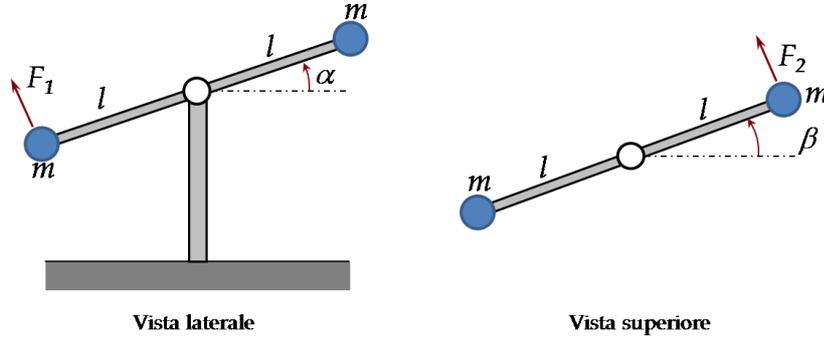


Figura 1: Modello del sistema.

Il sistema è costituito da una base rotante avente momento di inerzia assiale  $I_\beta$ , alla quale è incernierata, nel suo punto mediano, un'asta di lunghezza  $2l$  avente momenti d'inerzia rispetto agli assi principali  $J_x$ ,  $J_y$  e  $J_z$ . Agli estremi dell'asta sono collocate due eliche attuate in grado di esercitare le forze di controllo  $F_1$  e  $F_2$  come indicato in figura. I complessi motore-elica hanno massa  $m$  e sono soggetti a coppie resistenti dovute a fenomeni di attrito viscoso di coefficienti  $c_\alpha$  e  $c_\beta$ . Indicando con  $\alpha$  l'angolo di beccheggio misurato in senso antiorario rispetto all'orizzontale della vista laterale e con  $\beta$  l'angolo di imbardata misurato in senso antiorario rispetto all'orizzontale della vista superiore, il sistema può essere descritto dalle seguenti equazioni differenziali:

$$\begin{aligned}\ddot{\alpha} &= -\frac{J_2}{J_1}\dot{\beta}^2 \sin \alpha \cos \alpha - \frac{c_\alpha}{J_1}\dot{\alpha} - \frac{l}{J_1}F_1 \\ \ddot{\beta} &= -\frac{2J_2}{J_3(\alpha)}\dot{\alpha}\dot{\beta} \sin \alpha \cos \alpha - \frac{c_\beta}{J_3(\alpha)}\dot{\beta} + \frac{l \cos \alpha}{J_3(\alpha)}F_2,\end{aligned}$$

dove  $J_1 = J_x + 2ml^2$ ,  $J_2 = J_y - J_z - 2ml^2$  e  $J_3(\alpha) = J_y \sin^2 \alpha + (J_z + 2ml^2) \cos^2 \alpha + I_\beta$ .

- 1.A Si calcolino tutti gli equilibri del sistema e le relative forze;
- 1.B Si linearizzi il sistema intorno all'equilibrio generico  $\bar{\alpha}$ ,  $\bar{\beta}$ ;
- 1.C Si discuta la raggiungibilità e l'osservabilità del sistema considerando alternativamente l'ingresso  $F_1$  e  $F_2$ , l'uscita  $\alpha$  e  $\beta$ ;
- 1.D Dati i seguenti valori numerici per i parametri:  $l = 0.2$  m,  $m = 0.1$  kg,  $J_x = J_z = 4 \cdot 10^{-3}$  kg m<sup>2</sup>,  $J_y = 4 \cdot 10^{-5}$  kg m<sup>2</sup>,  $I_\beta = 2 \cdot 10^{-4}$  kg m<sup>2</sup>,  $c_\alpha = c_\beta = 10^{-2}$  kg s; e per l'equilibrio:  $\bar{\alpha} = \bar{\beta} = 0$  rad, si valuti la stabilità del sistema e si progetti un compensatore, che, usando solo la misura di entrambe le uscite, stabilizzi asintoticamente il sistema nell'equilibrio dato;
- 1.E Si effettui una simulazione del sistema a ciclo chiuso ottenuto connettendo il controllore con il modello non lineare del sistema.

**Quesito 2**

Si consideri il seguente sistema non lineare tempo continuo:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \left(y + \frac{x}{5}\right) (1 - x^2) + u \\ \dot{y} &= -y(xy + 1).\end{aligned}$$

- 2.A Posto  $u = 0$ , si calcolino tutti gli equilibri e se ne discuta la stabilità;
- 2.B Si progetti una legge di controllo alla Lyapunov tale da rendere il sistema globalmente asintoticamente stabile nell'origine.

## Soluzione

**1.A** Imponendo le condizioni di equilibrio ( $\ddot{\alpha} = \ddot{\beta} = \dot{\alpha} = \dot{\beta} = 0$ ) si ha:

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{l}{J_1} F_1 \\ 0 &= \frac{l \cos \alpha}{J_3(\alpha)} F_2, \end{aligned}$$

da cui si ricavano le seguenti due famiglie di equilibri:

$$\begin{aligned} \alpha &= \bar{\alpha} \text{ costante arbitraria} \\ \beta &= \bar{\beta} \text{ costante arbitraria} \\ \bar{F}_1 &= \bar{F}_2 = 0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \bar{\alpha} &= \pm \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ \beta &= \bar{\beta} \text{ costante arbitraria} \\ \bar{F}_1 &= 0 \\ \bar{F}_2 & \text{ qualunque.} \end{aligned}$$

Essendo le masse perfettamente bilanciate, il modello del sistema non riporta effetti dovuti alla forza peso. Pertanto la prima famiglia di equilibri evidenzia come qualunque valore dei due angoli corrisponda ad una posizione di equilibrio a patto di avere forze nulle. La seconda famiglia, invece, indica la posizione particolare in cui l'asta risulta (verticalmente) allineata con la base. In questo caso la forza  $F_2$  può assumere qualunque valore essendo compensata dal vincolo.

**1.B** Le equazioni del sistema non lineare in variabili di stato traslate  $\tilde{x} = [\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \tilde{x}_4]^T = [\alpha - \bar{\alpha}, \beta - \bar{\beta}, \dot{\alpha}, \dot{\beta}]^T$  e controlli traslati  $\tilde{u}_1 = F_1$  e  $\tilde{u}_2 = F_2$ , sono le seguenti:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_1 &= \tilde{x}_3 \\ \dot{\tilde{x}}_2 &= \tilde{x}_4 \\ \dot{\tilde{x}}_3 &= -\frac{J_2}{J_1} \tilde{x}_4^2 \sin(\tilde{x}_1 + \bar{x}_1) \cos(\tilde{x}_1 + \bar{x}_1) - \frac{c_\alpha}{J_1} \tilde{x}_3 - \frac{l}{J_1} \tilde{u}_1 \\ \dot{\tilde{x}}_4 &= -\frac{2J_2}{J_3(\tilde{x}_1 + \bar{x}_1)} \tilde{x}_3 \tilde{x}_4 \sin(\tilde{x}_1 + \bar{x}_1) \cos(\tilde{x}_1 + \bar{x}_1) - \frac{c_\beta}{J_3(\tilde{x}_1 + \bar{x}_1)} \tilde{x}_4 + \frac{l \cos(\tilde{x}_1 + \bar{x}_1)}{J_3(\tilde{x}_1 + \bar{x}_1)} \tilde{u}_2, \end{aligned}$$

dove con  $\bar{x}_1 = \bar{\alpha}$  e  $\bar{x}_2 = \bar{\beta}$  si è indicato il generico equilibrio. Il sistema linearizzato nell'origine delle nuove variabili è il seguente:

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + B\tilde{u}$$

con

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{c_\alpha}{J_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{c_\beta}{J_3(\bar{x}_1)} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -\frac{l}{J_1} & 0 \\ 0 & \frac{l \cos \bar{x}_1}{J_3(\bar{x}_1)} \end{bmatrix},$$

ove

$$J_3(\bar{x}_1) = J_y \sin^2 \bar{x}_1 + (J_z + 2ml^2) \cos^2 \bar{x}_1 + I_\beta.$$

**1.C** Nominando con  $b_1$  e  $b_2$  le due colonne di  $B$ , le condizioni di raggiungibilità relative ai due ingressi considerati distintamente, si valutano analizzando i ranghi delle due matrici di raggiungibilità  $R_1 = [b_1, Ab_1, A^2b_1, A^3b_1]$  e  $R_2 = [b_2, Ab_2, A^2b_2, A^3b_2]$ :

$$\begin{aligned} R_1 &= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{l}{J_1} & \frac{l}{J_1^2} c_\alpha & -\frac{l}{J_1^3} c_\alpha^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{l}{J_1} & \frac{l}{J_1^2} c_\alpha & -\frac{l}{J_1^3} c_\alpha^2 & \frac{l}{J_1^4} c_\alpha^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ R_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{l}{J_3(\bar{x}_1)} & -\frac{l}{J_3^2(\bar{x}_1)} c_\beta & \frac{l}{J_3^3(\bar{x}_1)} c_\beta^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{l}{J_3(\bar{x}_1)} & -\frac{l}{J_3^2(\bar{x}_1)} c_\beta & \frac{l}{J_3^3(\bar{x}_1)} c_\beta^2 & -\frac{l}{J_3^4(\bar{x}_1)} c_\beta^3 \end{bmatrix} \cos \bar{x}_1. \end{aligned}$$

Entrambe le matrici hanno rango 2, dunque il sistema non è completamente raggiungibile da nessuno dei due ingressi separatamente. Si verifica, invece, facilmente che il sistema risulta completamente raggiungibile da entrambi gli ingressi considerati contemporaneamente. L'osservabilità si valuta analogamente considerando le matrici di osservabilità relative alle uscite fornite da  $c_1 = [1, 0, 0, 0]$  e  $c_2 = [0, 1, 0, 0]$ :

$$O_1 = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_1 A \\ c_1 A^2 \\ c_1 A^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{J_1} c_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{J_1^2} c_\alpha^2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$O_2 = \begin{bmatrix} c_2 \\ c_2 A \\ c_2 A^2 \\ c_2 A^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{J_3(\bar{x}_1)} c_\beta \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{J_3^2(\bar{x}_1)} c_\beta^2 \end{bmatrix}.$$

Anche nel caso dell'osservabilità si vede che entrambe le matrici hanno rango 2, dunque il sistema non è completamente osservabile da nessuna delle due uscite considerate separatamente. È facile verificare che risulta completamente osservabile dalle due uscite impiegate contemporaneamente.

**1.D** Sostituendo i valori numerici, si ottengono le seguenti matrici per il sistema linearizzato:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -0.8333 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.8197 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -16.6667 & 0 \\ 0 & 16.3934 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Gli autovalori di  $A$  sono 0, 0,  $-0.8333$  e  $-0.8197$ . Il sistema risulta essere solo marginalmente stabile. Possiamo progettare un compensatore basato su regolatore, in modo da rendere il sistema asintoticamente stabile nell'origine. Calcoliamo la matrice  $K$  di retroazione degli stati in modo da allocare i poli del sistema a ciclo chiuso, cioè gli autovalori della matrice  $A - BK$ , in  $p = [-2 \quad -4 \quad -8 \quad -10]$ . Utilizzando la funzione di Matlab  $K = \text{place}(A, B, p)$ , si ottiene:

$$K = \begin{bmatrix} -4.8 & 0 & -1.03 & 0 \\ 0 & 0.488 & 0 & 0.316 \end{bmatrix}.$$

Poiché non si ha accesso a tutte le variabili di stato ma il sistema risulta completamente osservabile dalle due uscite, si può realizzare un osservatore di Luenberger per ricostruire lo stato. La matrice  $L$  di iniezione delle uscite è calcolata in modo che la matrice dinamica dello stimatore  $A - LC$  abbia autovalori  $q = 2p$ . Sempre impiegando il comando Matlab  $L = \text{transpose}(\text{place}(A', C', q))$  si ottiene:

$$L = \begin{bmatrix} 35.1667 & 0 \\ 0 & 11.1803 \\ 290.6944 & 0 \\ 0 & 22.8358 \end{bmatrix}.$$

Il compensatore basato sul regolatore appena progettato ha dinamica  $K(sI - A + BK + LC)^{-1}L$  e si costruisce con il comando  $\text{rsys} = \text{ss}(A - B*K - L*C, L, K, 0)$  ovvero, a meno di un segno, con  $\text{rsys} = \text{reg}(\text{sys}, K, L)$ , ove  $\text{sys} = \text{ss}(A, B, C, 0)$ .

Si nota come nel linearizzato i due sistemi che esprimono la dinamica di  $\alpha$  e  $\beta$  risultino disaccoppiati. In altri termini la dinamica di un angolo non influenza quella dell'altro. Ciò non è vero nel modello non lineare originario, dove l'accoppiamento si realizza mediante i termini non lineari nelle velocità  $\dot{\alpha}$  e  $\dot{\beta}$  (forze apparenti). Il disaccoppiamento dei due sistemi consentirebbe lo sviluppo di due controllori separati ognuno responsabile del controllo di un angolo. In effetti, come si può notare dalla struttura delle matrici  $K$  e  $L$ , questa separazione sussiste di fatto anche nel controllore progettato per il sistema MIMO complessivo.

**1.E** Uno schema Simulink del sistema stabilizzato, rappresentato rispetto a variabili traslate, è riportato in figura 2.

Il blocco Simulink **Sistema non lineare in variabili traslate** contiene la seguente funzione:

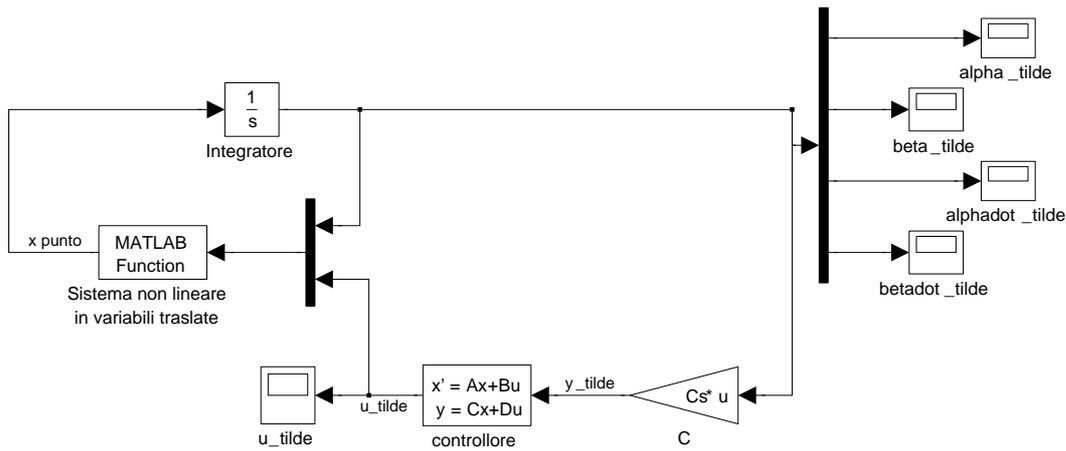


Figura 2: Schema Simulink del sistema non lineare stabilizzato con controllore lineare. Il sistema è rappresentato rispetto a variabili traslate.

```
function out = SistemaNONLineare(in)

% Ingressi del blocco
x1_tilde = in(1);
x2_tilde = in(2);
x3_tilde = in(3);
x4_tilde = in(4);
u1_tilde = in(5);
u2_tilde = in(6);

% Costanti del sistema e punto di equilibrio
ParametriSistema;

% Dinamica del sistema
J3 = Jy*(sin(x1_tilde+alphabar))^2 + (Jz + 2*m*l^2)*(cos(x1_tilde+alphabar))^2 + Ib;

dot_x1_tilde = x3_tilde;
dot_x2_tilde = x4_tilde;
dot_x3_tilde = 1/J1*(-J2*sin(x1_tilde+alphabar)*cos(x1_tilde+alphabar)*x4_tilde^2 ...
    -c1*x3_tilde-l*u1_tilde);
dot_x4_tilde = 1/J3*(-2*J2*sin(x1_tilde+alphabar)*cos(x1_tilde+alphabar)*x3_tilde*x4_tilde ...
    -c2*x4_tilde+l*cos(x1_tilde+alphabar)*u2_tilde);

% Uscite del blocco
out(1) = dot_x1_tilde;
out(2) = dot_x2_tilde;
out(3) = dot_x3_tilde;
out(4) = dot_x4_tilde;
```

dove lo *script* ParametriSistema contiene i valori numerici di tutti i parametri del sistema e il punto di equilibrio. Il blocco **controllore** contiene le matrici del regolatore precedentemente progettato. Per valutare il controllore lineare, consideriamo l'evoluzione del sistema a ciclo chiuso a partire da condizioni iniziali  $[\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \tilde{x}_4]^T = [1, 0.8, 0, 0]^T$ . Le figure 3, 4, 5, 6 riportano l'andamento dello scostamento dal punto di equilibrio delle variabili  $\alpha, \beta, \dot{\alpha}, \dot{\beta}$  rispettivamente. Nelle figure 7 e 8 è, invece, rappresentato l'andamento delle due forze di controllo  $F_1$  e  $F_2$  rispetto al loro valore di equilibrio.

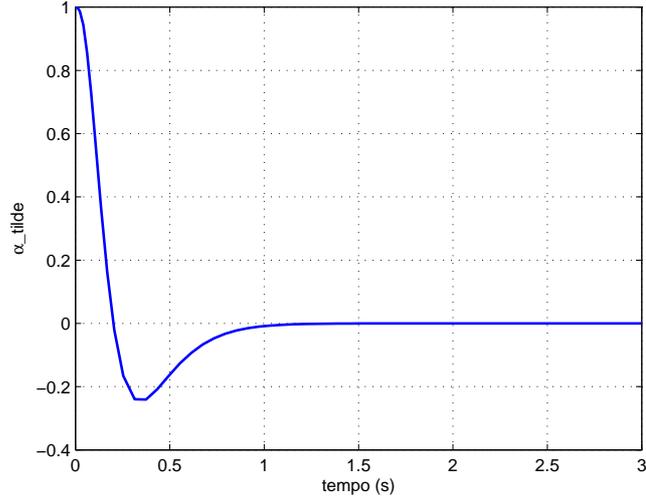


Figura 3: Andamento dello scostamento di  $\alpha$  rispetto al valore di equilibrio.

**2.A** Imponendo le condizioni di equilibrio si ha:

$$\begin{aligned} 0 &= \left(y + \frac{x}{5}\right) (1 - x^2) \\ 0 &= -y(xy + 1), \end{aligned}$$

da cui si ricavano i seguenti equilibri:

$$\begin{aligned} &\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \\ &\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases} \\ &\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases} \\ &\begin{cases} x = \sqrt{5} \\ y = -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases} \quad \begin{cases} x = -\sqrt{5} \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}. \end{aligned}$$

Il sistema non lineare espresso in variabili traslate  $\tilde{x} = x - \bar{x}$  e  $\tilde{y} = y - \bar{y}$  rispetto all'equilibrio generico  $(\bar{x}, \bar{y})$ , è dato da

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= \left(\tilde{y} + \bar{y} + \frac{\tilde{x} + \bar{x}}{5}\right) \left(1 - (\tilde{x} + \bar{x})^2\right) \\ \dot{\tilde{y}} &= -(\tilde{y} + \bar{y}) \left((\tilde{x} + \bar{x})(\tilde{y} + \bar{y}) + 1\right). \end{aligned}$$

Linearizzando rispetto a tale equilibrio si ha

$$A_{\bar{x}\bar{y}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} - \frac{2}{5}\bar{x}^2 - 2\bar{x}\bar{y} & 1 - \bar{x}^2 \\ -\bar{y}^2 & -2\bar{x}\bar{y} - 1 \end{bmatrix},$$

da cui, sostituendo gli equilibri precedentemente calcolati, si ottiene:

$$\begin{aligned} A_{00} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \\ A_{10} = A_{-10} &= \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \\ A_{1-1} = A_{-11} &= \begin{bmatrix} \frac{8}{5} & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \\ A_{\sqrt{5}-\frac{1}{\sqrt{5}}} = A_{-\sqrt{5}\frac{1}{\sqrt{5}}} &= \begin{bmatrix} -\frac{4}{5} & -4 \\ -\frac{1}{5} & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

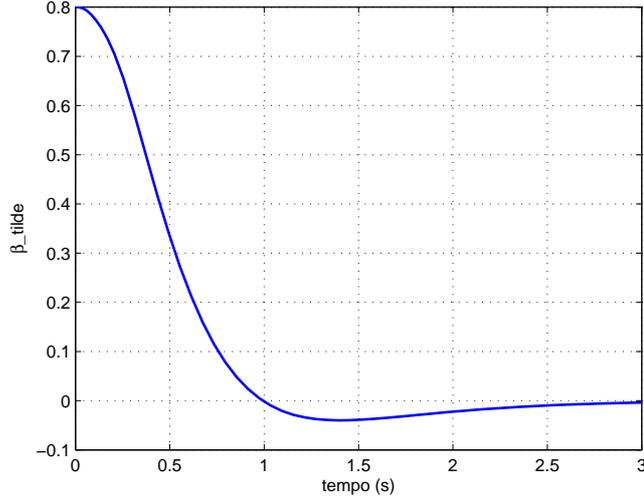


Figura 4: Andamento dello scostamento di  $\beta$  rispetto al valore di equilibrio.

Impiegando il metodo indiretto di Lyapunov, si deduce che l'equilibrio  $(0, 0)$  è esponenzialmente instabile (il sistema è localmente una sella), gli equilibri  $(1, 0)$  e  $(-1, 0)$  sono asintoticamente stabili (il sistema è localmente un nodo stabile), gli equilibri  $(1, -1)$  e  $(-1, 1)$  sono esponenzialmente instabili (il sistema è localmente un nodo instabile) ed infine gli equilibri  $(\sqrt{5}, -\frac{1}{\sqrt{5}})$  e  $(-\sqrt{5}, \frac{1}{\sqrt{5}})$  sono esponenzialmente instabili (il sistema è localmente una sella). Un grafico dello spazio delle fasi, con alcune traiettorie del sistema e i punti di equilibrio, è riportato in fig. 9.

**2.B** Per progettare un controllore alla Lyapunov facciamo uso della candidata  $V = \frac{1}{2}(\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2)$ , che è radialmente illimitata. Ricordando che  $\dot{V} = L_f V + L_g V u$ , cerchiamo di progettare  $u$  in modo che  $\dot{V}$  risulti definita negativa.

Nel nostro caso si ha  $L_f V = \tilde{x}(\tilde{y} + \frac{\tilde{x}}{5})(1 - \tilde{x}^2) - \tilde{x}\tilde{y}^3 - \tilde{y}^2$  e  $L_g V = \tilde{x}$ . Si rammenta che l'equilibrio in cui stabilizzare il sistema è l'origine. La legge di controllo sarà data a:

$$u = -\frac{L_f V + \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2}{L_g V} = \frac{1}{5}x^3 + x^2y - \frac{6}{5}x + y^3 - y,$$

la quale, come si può notare, è ben posta. Con tale legge di controllo si ha:

$$\dot{V} = -\tilde{x}^2 - \tilde{y}^2 = -2V,$$

quindi il sistema a ciclo chiuso risulta essere globalmente esponenzialmente stabile nell'origine. Infatti, risolvendo la precedente equazione differenziale in  $V$ , con  $z(t) = [\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)]^T$ , si ottiene:

$$V(z(t)) = e^{-2t}V(z(0)),$$

da cui, rammentando che  $V(z(t)) = \frac{1}{2}\|z(t)\|_2^2$ , si ottiene:

$$\|z(t)\|_2 = e^{-t}\|z(0)\|_2.$$

La velocità di convergenza della norma dello stato è dunque pari a 1.

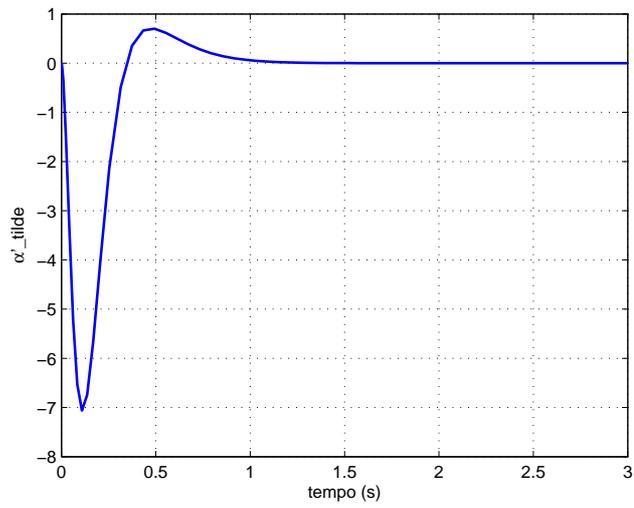


Figura 5: Andamento dello scostamento di  $\dot{\alpha}$  rispetto al valore di equilibrio.

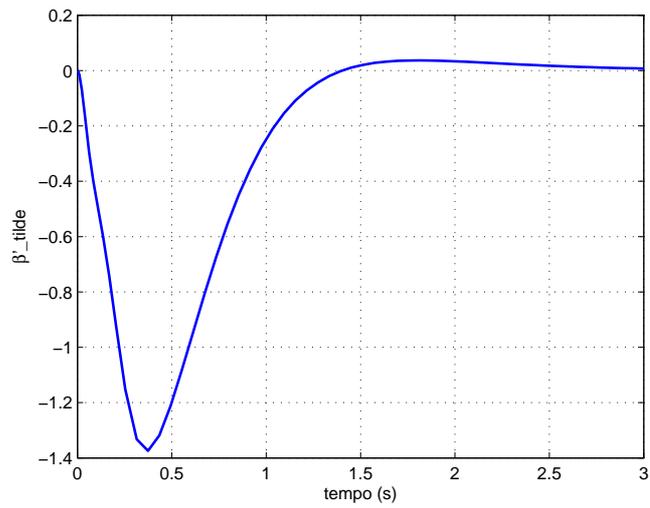


Figura 6: Andamento dello scostamento di  $\dot{\beta}$  rispetto al valore di equilibrio.

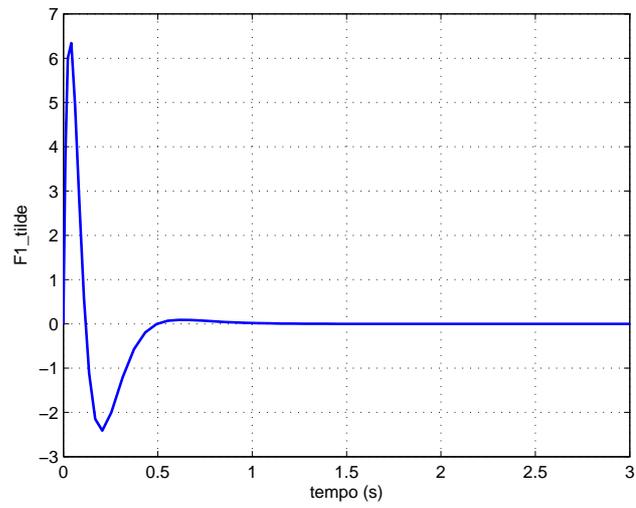


Figura 7: Andamento dello scostamento di  $F_1$  rispetto al valore di equilibrio.

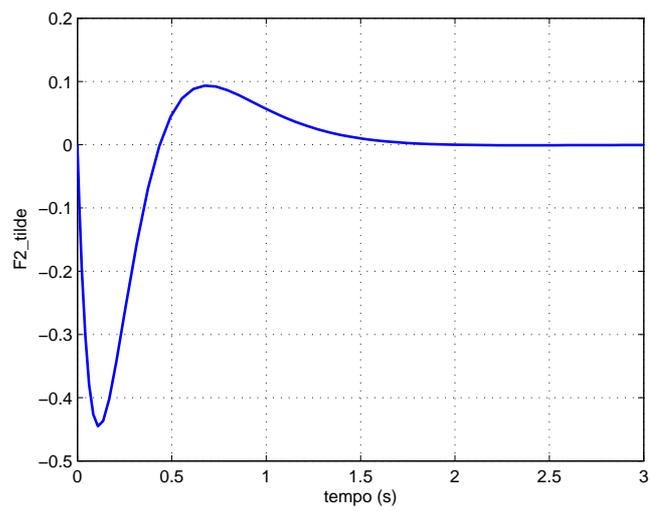


Figura 8: Andamento dello scostamento di  $F_2$  rispetto al valore di equilibrio.

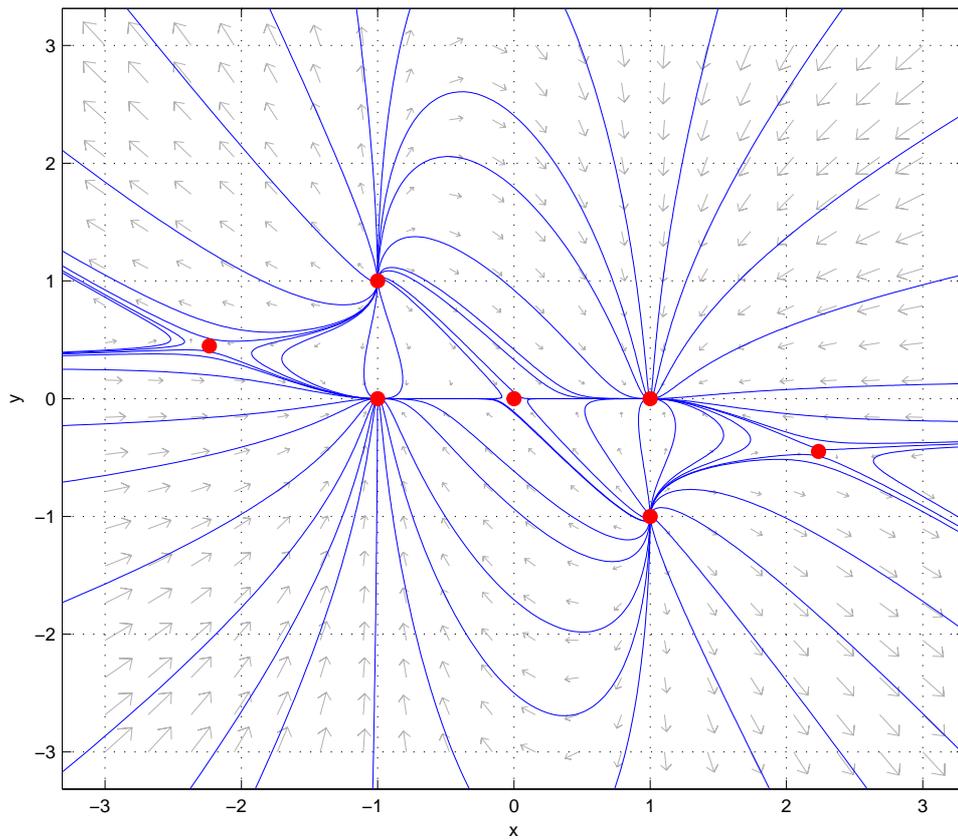


Figura 9: Grafico dello spazio delle fasi con alcune traiettorie del sistema e i punti di equilibrio.