

Esame di Controlli Automatici - 27 Gennaio 2009

Si consideri il sistema meccanico costituito di una funivia orizzontale rappresentato in figura 1.

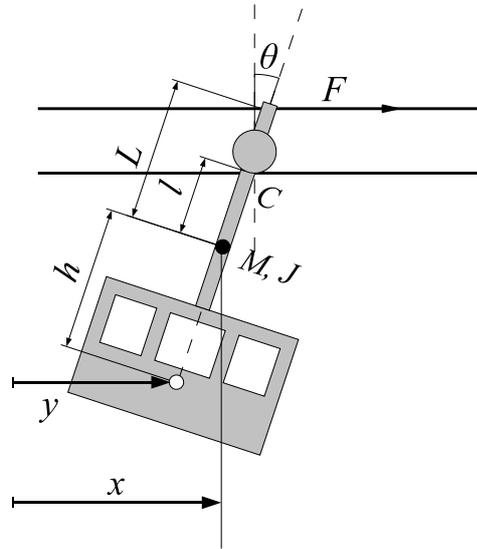


Figura 1: Schema meccanico di una funivia.

La cabina si poggia su di un cavo di sostegno tramite un sistema di cuscinetti, e viene mossa da un motore situato nella stazione fissa, che esercita una forza F sulla cabina tramite un cavo di traino. In prima approssimazione, il modello dinamico associato al moto sul piano è descritto dalle equazioni:

$$\begin{aligned} M\ddot{x} &= -C_a v_c + F \\ J\ddot{\theta} &= -Mgl \sin \theta + C_a l v_c \cos \theta - FL \cos(\theta) \\ v_c &= (\dot{x} - l\dot{\theta} \cos(\theta)) \\ y &= x + h \sin(\theta) \end{aligned}$$

dove $M = 1500Kg$ è la massa totale della cabina, $J = 3000Kgm^2$ il momento di inerzia associato, $C_a = 15Ns/m$ un coefficiente di attrito viscoso, le lunghezze caratteristiche del problema $l = 1m$, $L = 2.2m$, $h = 1$ e $g = 9.81m/s^2$.

Si consideri come ingresso del sistema la forza trainante F e come uscita la posizione della cabina y .

- A** Si calcolino gli equilibri del sistema e i relativi ingressi, e se ne studi la stabilità;
- B** Si progetti un controllore che utilizzando soltanto la misura di y stabilizzi asintoticamente il sistema nell'equilibrio dato;
- C** Si discuta la stabilità del sistema non lineare ottenuto connettendo il controllore con il modello non lineare del sistema;
- D** Si discuta se il controllore è capace di riportare all'equilibrio il sistema a partire da una condizione iniziale con inclinazione $0 \leq \theta \leq 0.1rad$
- E** Si dia una stima della velocità di convergenza del sistema controllato
- F** Si effettui una simulazione del sistema a ciclo chiuso ottenuto connettendo il controllore con il modello non lineare del sistema.

Soluzione

A Ponendo $x_1 = x; x_2 = \theta; x_3 = \dot{x}; x_4 = \dot{\theta}$, il sistema in forma di stato è scritto

$$\dot{x} = f(x, u) = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ -\frac{C_a l}{M} x_3 + \frac{C_a l}{M} x_4 \cos x_2 + \frac{1}{M} F \\ -\frac{Mgl}{J} \sin x_2 + \frac{C_a l}{J} x_3 \cos x_2 - \frac{C_a l^2}{J} x_4 \cos^2 x_2 - \frac{L}{J} \cos x_2 F \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$y = y(x, u) = x + h \sin x_2.$$

Gli equilibri sono caratterizzati da $x_3 = x_4 = 0, F = 0, x_2 = k\pi, \forall x_1$. Solo due sono quindi i casi da studiare, che scegliendo ad esempio $x_1 = 0$ sono $\bar{x}_a = (0, 0, 0, 0)$ e $\bar{x}_b = (0, \pi, 0, 0)$. Si ha anche $\bar{y}_a = \bar{y}_b = 0$.

Il linearizzato approssimato si calcola mediante le matrici

$$\frac{\partial f(x, u)}{\partial x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{C_a l}{M} x_4 \sin x_2 & -\frac{C_a}{M} & \frac{C_a l}{M} \cos x_2 \\ 0 & -\frac{Mgl}{J} \cos x_2 - \frac{C_a l}{J} \sin x_2 x_3 + 2\frac{C_a l^2}{J} x_4 \cos x_2 \sin x_2 & \frac{C_a l}{J} \cos x_2 & -\frac{C_a l^2}{J} \cos^2 x_2 \end{bmatrix};$$

$$\frac{\partial f(x, u)}{\partial u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{M} \\ -\frac{L}{J} \cos x_2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial h(x, u)}{\partial x} = [1 \quad h \cos x_2 \quad 0 \quad 0]; \quad \frac{\partial h(x, u)}{\partial u} = 0.$$

Sostituendo i valori dei parametri si ottiene rispettivamente nei due equilibri

$$A_a = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -0.01 & 0.01 \\ 0 & -4.9 & 0.005 & -0.005 \end{bmatrix}; \quad B_a = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.00067 \\ -0.00073 \end{bmatrix};$$

$$C_a = [1 \quad 1 \quad 0 \quad 0], \quad D_a = 0;$$

e

$$A_b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -0.01 & -0.01 \\ 0 & 74 & -0.005 & -0.005 \end{bmatrix}; \quad B_b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.00067 \\ 0.00073 \end{bmatrix};$$

$$C_b = [1 \quad -1 \quad 0 \quad 0]; \quad D_b = 0.$$

Il sistema è instabile nell'equilibrio \bar{x}_b , poiché il linearizzato ha due autovalori positivi. Negli equilibri di tipo x_a invece il metodo indiretto non fornisce risposte immediate, essendo il linearizzato solo marginalmente stabile.

Semplici considerazioni fisiche comunque consentono di arrivare a stabilire che anche il sistema non-lineare è marginalmente stabile in questo equilibrio. Infatti, dalle equazioni dinamiche è evidente che la variabile x_1 non entra nelle dinamiche degli altri stati, e che il sistema dinamico costituito dalle sole variabili (x_2, x_3, x_4) è perfettamente determinato. La matrice dinamica del linearizzato di questo sistema si ottiene semplicemente eliminando la prima riga e la prima colonna in A_a : la corrispondente sottomatrice ha tutti gli autovalori negativi, quindi questo sottosistema è asintoticamente stabile. La dinamica del primo stato è ovviamente solo marginalmente stabile (qualsiasi punto in un intorno di un equilibrio è anch'esso equilibrio per la posizione x), da cui si può concludere.

B Il sistema è completamente raggiungibile e osservabile, quindi è possibile sintetizzare un controllore stabilizzante attraverso la sintesi di una legge di feedback dello stato e di un osservatore. Ad esempio, volendo piazzare i poli del sistema controllato in $p = [-1 - 3 - 5 - 7]$ e quelli dell'osservatore in $q = 2p$, si hanno le matrici di retroazione degli stati

$$K = 10^4 [3.2 \quad -8.2 \quad 5.4 \quad 2.7]$$

e di iniezione delle uscite

$$L = 100 \begin{bmatrix} 2.9 \\ -2.5 \\ 3.4 \\ 0.015 \end{bmatrix}.$$

Qualora i valori ottenuti risultassero troppo alti per la specifica applicazione, si potrebbe procedere ad un migliore piazzamento, ad esempio utilizzando le tecniche LQR e LQG.

Il controllore basato sul regolatore così ottenuto ha dinamica

$$\begin{aligned} \dot{x}_r &= A_r x_r + B_r y \\ y_r &= C_r x_r \end{aligned}$$

descritta dalle matrici A_r, B_r, C_r (non riportate per brevità) e dalla f.d.t.

$$R(s) = \frac{-48169534.4945(s + 0.4336)(s^2 + 0.5017s + 2.583)}{(s + 28.33)(s + 7.064)(s^2 + 12.6s + 290.5)}.$$

- C** Il sistema nonlineare in anello chiuso con il regolatore ottenuto dalla sintesi sopra descritta sarà ovviamente asintoticamente stabilizzato in un intorno dell'equilibrio in esame, come discende direttamente dal teorema di Lyapunov indiretto applicato al sistema esteso. Questo è descritto dagli 8 stati $\xi = \begin{bmatrix} x \\ x_r \end{bmatrix}$, e dalla dinamica ottenuta connettendo in retroazione il sistema ed il regolatore, il cui modello linearizzato è dato da

$$\dot{\xi} = A_f \xi = \begin{bmatrix} A_a & -B_a K \\ B_r C_a & A_r \end{bmatrix} \xi.$$

Essendo il modello linearizzato asintoticamente stabile (gli autovalori sono esattamente quelli prima assegnati), segue la conclusione.

- D** Si tratta di determinare se le condizioni date sono interne alla regione di asintotica stabilità dell'equilibrio. Si noti che la risposta a questa domanda può differire in base al controllore scelto per il sistema. Inoltre, fissato un controllore, non abbiamo a disposizione un metodo che dia condizioni necessarie e sufficienti. Possiamo procedere con il metodo di stima della RAS basato sul teorema di La Salle.

Scelta una arbitraria matrice simmetrica e positiva definita Q (di dimensione 8×8), si risolve la corrispondente equazione di Lyapunov da cui si ottiene la funzione di Lyapunov $V = \xi^T P \xi$.

Applicando questa funzione al sistema non lineare riscritto per convenienza nella forma

$$\dot{\xi} = A_f \xi + \tilde{f}(\xi, u)$$

si ottiene

$$\dot{V} = -\xi^T Q \xi + 2\xi^T P \tilde{f}(\xi, -Kx_r).$$

La norma pesata in P della massima perturbazione da studiare $\delta = [0 \ 0.1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$ vale $r = \sqrt{\delta^T P \delta}$. Valutando il segno di \dot{V} in un numero sufficientemente elevato di punti nello spazio di stato a 8 dimensioni a distanza dall'origine inferiore o uguale a r , si può ottenere una valutazione probabilistica della condizione sufficiente di asintotica stabilità. Si riporta una procedura che si può usare utilmente a questo scopo:

```
function ok = evalvdot(P,Q,r)

M=inv(sqrtm(P));
[m,n] = size(P);
ok = 1;
numtentativi=5000;
i = 1;
while ok & (i<=numtentativi)
    % Vettore di direzione random e lunghezza r
    x = randn(m,1);
    y = r*x/norm(x);
```

```

% Punto random sulla curva di livello
z = M*y;
% Valutazione V punto
vdot = -z'*Q*z+2*z'*P*ftilde(z);
i = i+1;
ok = (vdot<0);
end

dove si usa la funzione

function ff = ftilde(x)

% parametri del sistema e traslazione
M = 1500; J = 3000; Ca = 15; l = 1;
L = 2.2; h = 1; g = 9.81;

% parametri regolatore
K = 1e4 * [3.2, -8.2, 5.4, 2.7];
H = 100 * [2.9; -2.5; 3.4; 0.015];

% errore di linearizzazione nel sistema
ff_sist = [ 0; 0;
Ca*l/M*x(4)*(cos(x(2))-1));
M*g*l/J*(x(2)-sin(x(2))) + Ca*l/J*x(3)*(cos(x(2))-1) +
- Ca*l*l/J*x(4)*(cos(x(2)))^2-1 - L/J*(cos(x(2))-1)* K * x(5:8); ];

% errore di linearizzazione nello stato del controllore
% (dovuto alla linearizzazione della funzione di uscita)
ff_ctr = (x(2)-sin(x(2))) * H * x(1:4)

% vettore complessivo dell'errore di linearizzazione
ff = [ff_sist;ff_ctr]

```

E La velocità di convergenza del sistema linearizzato controllato è data dall'autovalore dominante del sistema in anello chiuso, che abbiamo scelto con il piazzamento dei poli in -1 .

Per ricollegare il concetto di polo dominante, tipico della analisi in frequenza, con il concetto di velocità di convergenza introdotto nello studio della stabilità, si consideri quanto segue.

Ricordiamo che in generale si dice velocità di convergenza di un sistema verso un equilibrio esponenzialmente stabile il più grande scalare $\lambda > 0$ tale che, per condizioni iniziali ξ_0 sufficientemente vicine all'equilibrio, la norma dello stato decresca come $\|\xi(\xi_0, t)\| \leq \alpha e^{-\lambda t}$ per qualche $\alpha > 0$.

Detti $\lambda_{max}(P)$, $\lambda_{min}(P)$ il massimo e minimo autovalore di una matrice P simmetrica e definita positiva, si osservi che valgono le seguenti relazioni

$$\begin{aligned}
\xi^T R \xi &\geq \lambda_{min}(R) \|\xi\|^2; \\
\xi^T R \xi &\leq \lambda_{max}(R) \|\xi\|^2; \\
R &\leq \lambda_{max}(R) I; \\
R &\geq \lambda_{min}(R) I,
\end{aligned}$$

dove con la disequazione matriciale $R_1 \geq R_2$ si intende che la matrice $R_1 - R_2$ è semi-definita positiva (risp. definita se vale $>$). Applicando queste relazioni alle matrici P e Q della equazione di Lyapunov relativa al sistema linearizzato controllato la cui matrice dinamica è A_f , ovvero $PA_f + A_f^T P = -Q$, e ricordando che queste determinano una funzione di Lyapunov per il sistema $V = \xi^T P \xi$ si può scrivere

$$\dot{V} = -\xi^T Q \xi \leq -\lambda_{min}(Q) I \leq -\lambda_{min}(Q) \frac{\xi^T (\lambda_{max}(P) I) \xi}{\lambda_{max}(P)} \leq -\gamma V,$$

dove $\gamma = \frac{\lambda_{min}(Q)}{\lambda_{max}(P)}$. Dalla relazione $\dot{V}(t) \leq -\gamma V(t)$ si ha immediatamente che $V(t) \leq V(0)e^{-\gamma t}$, quindi $\|\xi\|^2 \leq \frac{1}{\lambda_{min}(P)} V(t) \leq \frac{\lambda_{max}(P)}{\lambda_{min}(P)} \|\xi_0\| e^{-\gamma t}$ da cui infine $\|\xi\| \leq \alpha e^{-\frac{\gamma}{2} t}$. In conclusione, la velocità di convergenza di un sistema lineare è non inferiore a $\gamma/2$.

Questa stima dipende ovviamente dalla scelta di Q . Si può dimostrare che la migliore stima si ottiene nel caso in cui si scelga $Q = I$. In questo caso, supponendo per semplicità che la matrice dinamica abbia tutti autovalori reali e distinti, possiamo porre il sistema nelle coordinate in cui la matrice dinamica \hat{A}_f è diagonale. La soluzione della equazione di Lyapunov $P\hat{A}_f + \hat{A}_f^T P = -I$ è in questo caso $P = -1/2\hat{A}_f^{-1}$, da cui si ha che $\gamma = -2\lambda_{max}(A_f)$: quindi, l'autovalore più lento (dominante) del sistema rappresenta proprio la velocità di convergenza.

Dato un sistema lineare il cui linearizzato approssimato ha velocità di convergenza esponenziale $\gamma/2$ verso un equilibrio, il sistema ha la stessa velocità di convergenza. Infatti, la definizione di velocità di convergenza è locale, cioè per condizioni iniziali ξ_0 sufficientemente piccole. Usando la stessa funzione di Lyapunov $\xi^T P \xi$ per il sistema non lineare, si ha $\dot{V} = -\xi^T Q \xi + 2\xi^T P \tilde{f}(\xi)$, con $\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\|\tilde{f}(\xi)\|}{\|\xi\|} = 0$. Fissato $\beta > 0$, con $\gamma > \beta$, si può scegliere quindi ξ_0 tale per cui $\frac{\|\tilde{f}(\xi)\|}{\|\xi\|} < \beta \frac{\lambda_{min}(P)}{\lambda_{max}(P)}$, quindi $\dot{V} \leq -(\gamma - \beta)V$, dove β può essere fissato arbitrariamente piccolo.

F Uno schema Simulink del sistema stabilizzato è riportato in figura 2.

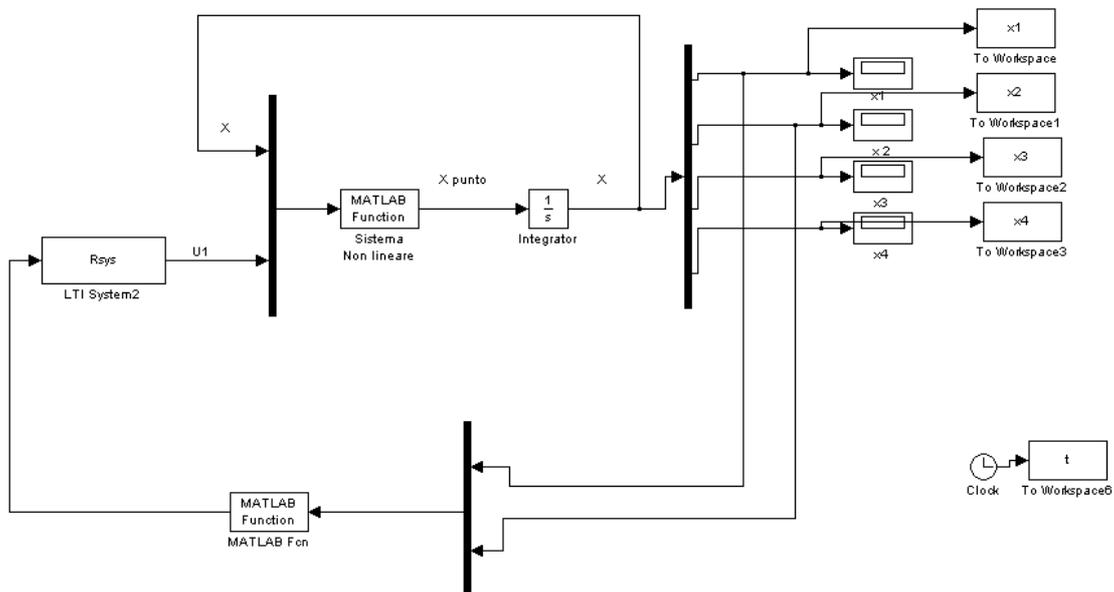


Figura 2: Schema Simulink del sistema non lineare stabilizzato con controllore lineare.

Il blocco Simulink Sistema Non Lineare contiene la seguente funzione:

```
function out = SistemaNONLineare(in)
% Parametri del sistema
M=1500; J=3000; Ca=15; l=1; L=2.2; h=1; g=9.81;
% Ingressi;
% a) Stato
x1 = in(1); x2 = in(2); x3 = in(3); x4 = in(4);
% b) Ingressi
u1 = in(5);
% Dinamica non lineare
x1_p = x3;
x2_p = x4;
x3_p = -Ca/M*x3+Ca/M*1*x4*cos(x2)+u1/M;
x4_p = -M*g*1/J*sin(x2)+Ca*1/J*x3*cos(x2)-Ca*1*1/J*x4*cos(x2)*cos(x2) - L/J*cos(x2)*u1;
% Uscite
out (1) = x1_p; out (2) = x2_p; out (3) = x3_p; out (4) = x4_p;
```

Le figure seguenti riportano i risultati di una simulazione a partire da condizioni iniziali perturbate $x(0) = [0 \ 0.1 \ 0 \ 0]$.

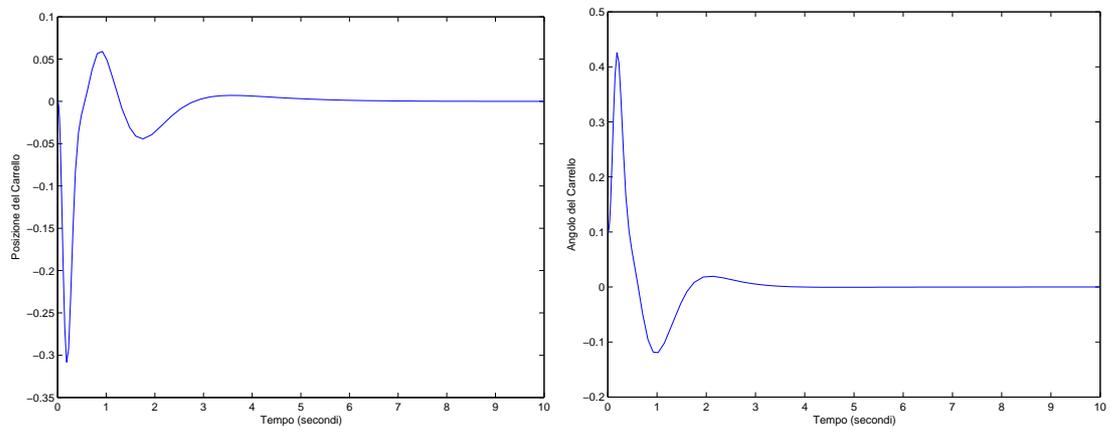


Figura 3: Andamento nel tempo delle variabili $x_1 = x$ (a sinistra), $x_2 = \theta$ (a destra) per il sistema stabilizzato.