

Si consideri il modello dinamico di un glifo a croce riportato in figura 1.

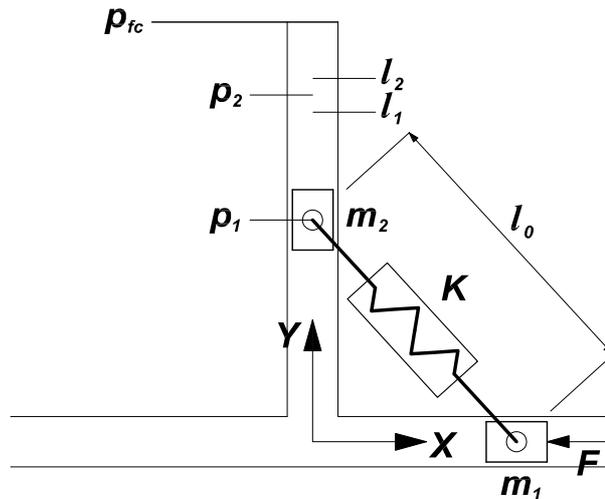


Figure 1: Sistema meccanico di un glifo a croce.

Le due masse m_1 e m_2 sono collegate per mezzo di una molla di costante elastica K e avente lunghezza a riposo pari a ℓ_0 . Fissato un sistema di riferimento con origine nel punto di intersezione dei due giunti prismatici, e avente assi allineati con quelli dei giunti stessi (vedi fig. 1), la dinamica del sistema è descritta dalle equazioni

$$m_1 \ddot{x} + K \left(1 - \frac{\ell_0}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) x = F$$

$$m_2 \ddot{y} + K \left(1 - \frac{\ell_0}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) y = -m_2 g + d_k,$$

dove F è la forza sulla massa m_1 , $d_k = A_k \sin(\omega_k t)$ rappresenta un disturbo agente sulla massa m_2 , e g è l'accelerazione di gravità.

A Tenendo conto che la massa m_2 può muoversi assumendo solo posizioni strettamente positive ($y > 0$), si determini il regime di equilibrio, corrispondente al generico punto di lavoro $F = \bar{F}$ costante e $d_k = 0$;

B Si determini una rappresentazione del sistema in forma di stato, approssimando linearmente il suo comportamento nell'intorno del punto di equilibrio corrispondente a \bar{F} .

Si considerino poi i seguenti valori numerici: $m_1 = 2$ kg, $m_2 = 0.5$ kg, $K = 10$ N/m, $\ell_0 = 2\sqrt{2}$ m, $g = 9.81$ m/s² e $\bar{F} = -m_2 g$.

C Si determinino le f.d.t. tra l'uscita y del sistema e gli ingressi F e d_k di controllo e di disturbo;

D Agendo sulla forza F applicata alla massa m_1 , si determini una legge di controllo per la posizione y della massa m_2 che agisca in modo da garantire le seguenti specifiche:

d1) la massa m_2 deve cambiare la sua posizione dal punto $p_1 = 3$ m al punto $p_2 = 5$ m senza raggiungere il punto di fine corsa $p_{fc} = 5.4$ m e in modo tale che dopo un tempo pari a 80 ms si abbia che $l_1 = 4.9$ m $< y < 5.1$ m $= l_2$.

d2) si limiti l'oscillazione sull'uscita causata dal disturbo d_k con $A_k \leq 1$ e $\omega_k \leq 0.01$ rad/s ad un valore inferiore a ± 1 mm.

Si riporti esplicitamente il controllore ottenuto ed il diagramma di Bode del guadagno di anello con le relative specifiche da rispettare, nonché la risposta al gradino unitario, il diagramma di Bode del sistema in anello chiuso e il diagramma a blocchi complessivo.

Soluzione

A Il sistema è descritto da quattro variabili di stato x , y , \dot{x} e \dot{y} . Imponendo la condizione di equilibrio $\dot{x} = \dot{y} = 0$ e $x = \bar{x}$ e $y = \bar{y}$ entrambe costanti, si ha che $\ddot{x} = \ddot{y} = 0$. Sostituendo nelle equazioni che descrivono la dinamica del sistema si ottiene

$$\begin{aligned} K \left(1 - \frac{\ell_0}{\sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2}} \right) \bar{x} &= \bar{F} \\ K \left(1 - \frac{\ell_0}{\sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2}} \right) \bar{y} &= -m_2 g. \end{aligned}$$

Tenendo conto che $\bar{y} > 0$, dividendo membro a membro si ottiene,

$$\begin{aligned} K \left(1 - \frac{\ell_0}{\sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2}} \right) \bar{x} &= \bar{F} \\ \frac{\bar{x}}{\bar{y}} &= -\frac{\bar{F}}{m_2 g}, \end{aligned}$$

da cui, con semplici passaggi algebrici si arriva al seguente equilibrio:

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \left(\frac{K \ell_0}{\sqrt{F^2 + m_2^2 g^2}} - 1 \right) \frac{m_2 g}{K} \\ \bar{x} &= -\frac{\bar{F}}{m_2 g} \bar{y}. \end{aligned}$$

B Indicando con $\tilde{x} = [\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \tilde{x}_4]^T = [x - \bar{x}, y - \bar{y}, \dot{x}, \dot{y}]^T$ le nuove variabili di stato, con $\tilde{u} = F - \bar{F}$ il nuovo ingresso, e con \tilde{d}_k il disturbo, si ottiene il seguente sistema in forma di stato nonlineare, traslato nell'equilibrio¹,

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_1 = \tilde{x}_3 \\ \dot{\tilde{x}}_2 = \tilde{x}_4 \\ \dot{\tilde{x}}_3 = -\frac{K}{m_1} \left(1 - \frac{\ell_0}{\sqrt{(\tilde{x}_1 + \bar{x})^2 + (\tilde{x}_2 + \bar{y})^2}} \right) (\tilde{x}_1 + \bar{x}) + \frac{\tilde{u} + \bar{F}}{m_1} \\ \dot{\tilde{x}}_4 = -\frac{K}{m_2} \left(1 - \frac{\ell_0}{\sqrt{(\tilde{x}_1 + \bar{x})^2 + (\tilde{x}_2 + \bar{y})^2}} \right) (\tilde{x}_2 + \bar{y}) - g + \frac{\tilde{d}_k}{m_2} \end{cases} \quad (1)$$

Al fine di ottenere il sistema linearizzato nella consueta forma di stato,

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= A \tilde{x} + B \tilde{w} \\ \tilde{y} &= C \tilde{x} + D \tilde{w} \end{aligned}$$

con $\tilde{w} = [\tilde{u} \ \tilde{d}_k]$ è necessario determinare gli elementi delle matrici A , B , C e D derivando ciascuna equazione del sistema (1) rispetto a ciascuna variabile di stato inclusa nel vettore \tilde{x} e calcolando poi il risultato nell'origine, nuovo equilibrio del sistema (1). Le matrici del sistema sono:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 \end{bmatrix} & B &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ b_{31} & 0 \\ 0 & b_{42} \end{bmatrix} \\ C &= [0 \ 1 \ 0 \ 0] & D &= 0 \end{aligned}$$

¹Il sistema nonlineare così ottenuto avrà l'origine come nuovo punto di equilibrio.

in cui si ha:

$$\begin{aligned}
 a_{31} &= \left(\frac{\ell_0 \bar{y}^2}{\sqrt{(\bar{x}^2 + \bar{y}^2)^3}} - 1 \right) \frac{K}{m_1} \\
 a_{32} &= -\frac{K}{m_1} \frac{\ell_0 \bar{x} \bar{y}}{\sqrt{(\bar{x}^2 + \bar{y}^2)^3}} \\
 a_{41} &= -\frac{K}{m_2} \frac{\ell_0 \bar{x} \bar{y}}{\sqrt{(\bar{x}^2 + \bar{y}^2)^3}} \\
 a_{42} &= \left(\frac{\ell_0 \bar{x}^2}{\sqrt{(\bar{x}^2 + \bar{y}^2)^3}} - 1 \right) \frac{K}{m_2} \\
 b_{31} &= \frac{1}{m_1} \\
 b_{42} &= \frac{1}{m_2}.
 \end{aligned}$$

C Sostituendo i valori numerici nelle matrici del sistema linearizzato si ottengono le seguenti f.d.t.:

$$\begin{aligned}
 G_F(s) &= \frac{-6.63}{s^4 + 8.44s^2 - 32.5}, \\
 G_d(s) &= \frac{2s^2 + 3.38}{s^4 + 8.44s^2 - 32.5}.
 \end{aligned}$$

Entrambe le funzioni di trasferimento presentano 4 poli di cui due immaginari puri $\lambda_{1,2} = \pm j3.36$, uno reale negativo $\lambda_3 = -1.7$ e uno reale positivo $\lambda_4 = 1.7$. Il sistema è quindi instabile. Conseguentemente, prima di progettare un controllore in grado di soddisfare sia le specifiche statiche che quelle dinamiche, si può procedere con il progetto di un primo controllore stabilizzante e successivamente realizzare un controllo in cascata come riportato in figura 2.

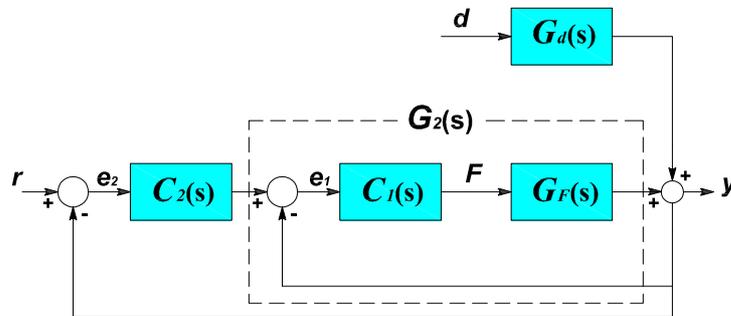


Figure 2: Schema a blocchi complessivo (controllo in cascata).

La progettazione di un controllore stabilizzante si effettua utilizzando la tecnica del Luogo delle Radici. In figura 3 è riportato il luogo delle radici di $G_F(s)$. Essendo la costante $K_1 = -6.63 < 0$, il grafico riportato in figura è in realtà il luogo inverso delle radici. Un possibile controllore stabilizzante è

$$C_1(s) = -\frac{3108979(s + 1.692)(s^2 + 6s + 29.54)}{(s + 100)^3}.$$

Tale controllore presenta un guadagno negativo, un polo reale negativo, una coppia di zeri complessi coniugati e a parte reale negativa e tre poli reali coincidenti. Il guadagno negativo e lo zero reale negativo a cancellazione del corrispondente polo della $G_F(s)$ sono necessari per eliminare il ramo sull'asse reale positivo del piano complesso. Il luogo delle radici che si otterrebbe è costituito ancora da due rami nel semipiano positivo uscenti dai poli immaginari puri. Per attirare tali rami nel semipiano sinistro è opportuno inserire una coppia di zeri complessi coniugati nel semipiano sinistro abbastanza vicini ai poli immaginari puri. Aggiustando poi il guadagno del controllore si otterrebbe una f.d.t. in anello chiuso asintoticamente stabile. Il controllore tuttavia non sarebbe

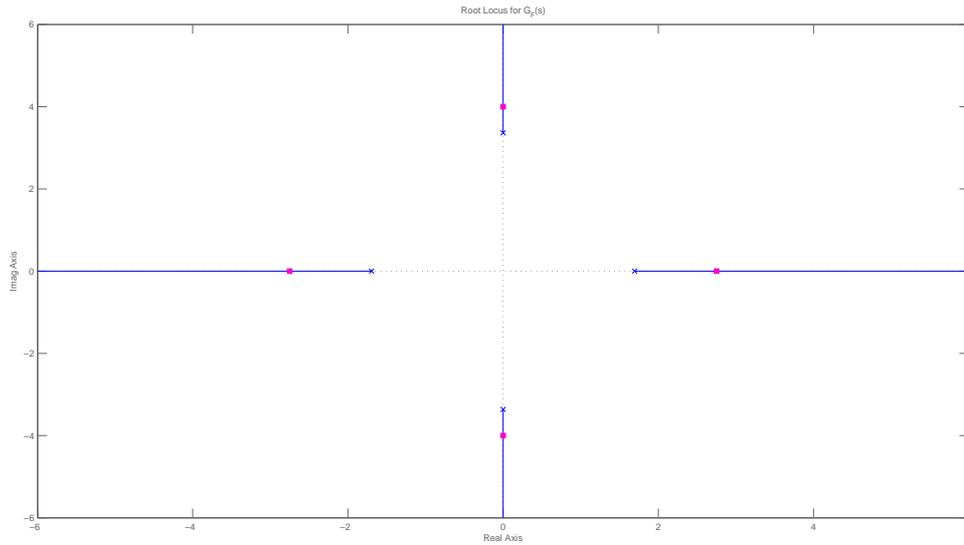


Figure 3: Luogo delle radici della f.d.t. $G_F(s)$.

realizzabile: i tre poli coincidenti nel semipiano sinistro presenti nel controllore $C_1(s)$ sono stati inseriti proprio per soddisfare i requisiti di causalità. La figura 4 riporta il luogo delle radici della f.d.t. $C_1(s)G_F(s)$.

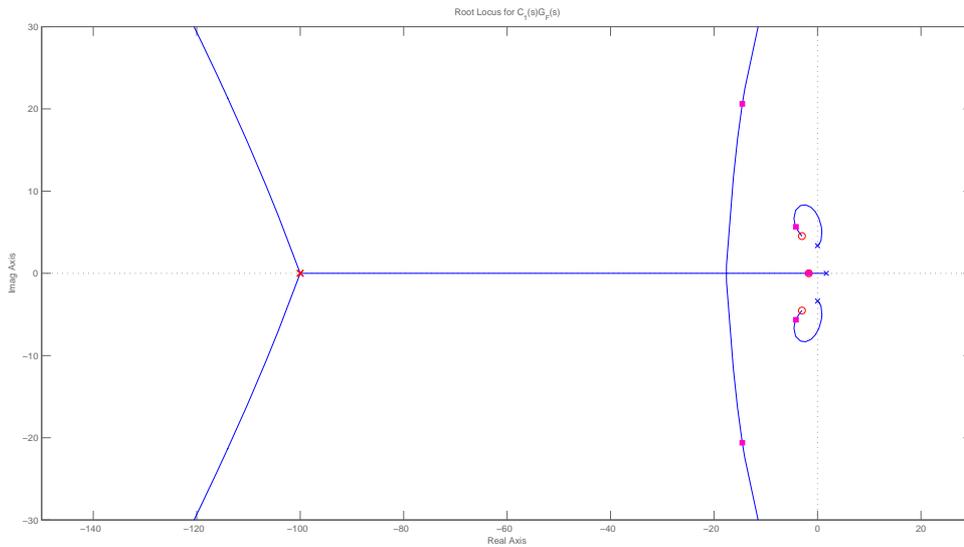


Figure 4: Luogo delle radici della f.d.t. $C_1(s)G_F(s)$.

La f.d.t. dell'anello stabilizzante è

$$G_2(s) = \frac{C_1(s)G_F(s)}{1 + C_1(s)G_F(s)} = \frac{20596992(s^2 + 6s + 29.54)}{(s^2 + 8.32s + 49.23)(s^2 + 29s + 636)(s^2 + 261s + 1.88 \cdot 10^4)}$$

il cui diagramma di Bode è riportato in figura 5.

Il progetto di un secondo controllore del tipo

$$C_2(s) = \frac{K_c}{s^t} C_0(s) \quad C_0(0) \geq 1,$$

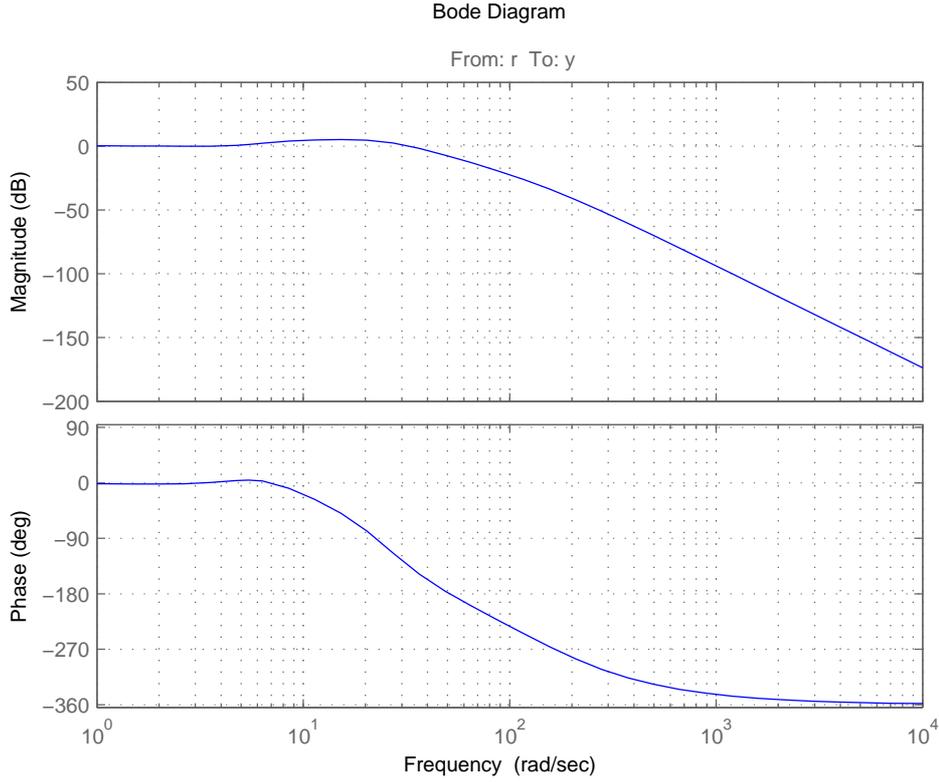


Figure 5: Diagramma di Bode della f.d.t. $G_2(s)$.

tale da soddisfare le specifiche statiche e dinamiche può essere fatto direttamente sui diagrammi di Bode in quanto la f.d.t. $G_2(s)$ sulla quale il controllore $C_2(s)$ agisce è asintoticamente stabile.

D

- d1) La specifica richiede che la massa m_2 deve passare da una quota $p_1 = 3$ m ad una quota $p_2 = 5$ m non superando un valore limite p_{fc} pari a 5.4 m, cioè, garantire

$$S_{\%} = 100 \frac{p_{fc} - p_2}{p_2 - p_1} \leq 20 \%$$

Inoltre, la massa m_2 deve raggiungere e mantenersi ad una quota compresa nella fascia $4.9 \text{ m} < \bar{y} < 5.1 \text{ m}$ (cioè al $100 \frac{5.1-5}{5-3} = 5\%$) entro un tempo non superiore a 80 ms, cioè garantire che

$$T_a(5\%) \leq 0.08 \text{ s.}$$

Questa specifica può essere soddisfatta qualora la f.d.t. a ciclo chiuso $G_c(s)$ sia un sistema a due poli dominanti (ovvero approssimabile con un sistema del secondo ordine), rispetto al quale le specifiche sulla sovralongazione e tempo di assestamento al 5% si traducono, nel dominio della frequenza, come segue:

$$S = e^{\left(-\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}\right)} \Rightarrow \delta = 0.45 \Rightarrow M_{\phi} \approx 45 \text{ deg}$$

$$\omega_T = \frac{3}{\delta T_a} \Rightarrow \omega_T \approx 83.3 \text{ rad/s}$$

Infine, poichè la risposta al gradino necessaria per portare la massa da una quota $p_1 = 3$ m ad una quota $p_2 = 5$ m deve mantenersi nella fascia $4.9 \text{ m} < \bar{y} < 5.1 \text{ m}$, è necessario garantire che l'errore a regime per un riferimento al gradino unitario si mantenga limitato ad un valore inferiore al 5%. Questo può essere garantito progettando un controllore di tipo "0" ($t=0$) con guadagno statico $K_c \geq \bar{K}_c$. Così facendo, l'effetto del gradino sono limitati dalla opportuna scelta di \bar{K}_c . Quest'ultimo può essere determinato applicando il teorema del valore finale, cioè

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1 + K_c C_0(s) G_2(s)} \frac{1}{s} = \frac{1}{1 + K_c C_0(0) G_2(0)} \leq \frac{1}{1 + K_c G_2(0)} \leq 0.05.$$

Questo si traduce in una richiesta sul valore minimo che deve avere il guadagno statico della f.d.t. d'anello $C_2(s)G_2(s)$, ovvero $|K_c G_2(0)| \geq 26 \text{ dB}$. In particolare, poichè $G_2(0) \simeq 1$ si deve avere $\bar{K}_c = 21$.

Il diagramma di Bode con i vincoli sulla pulsazione di taglio ω_T sono riportati in figura 6.

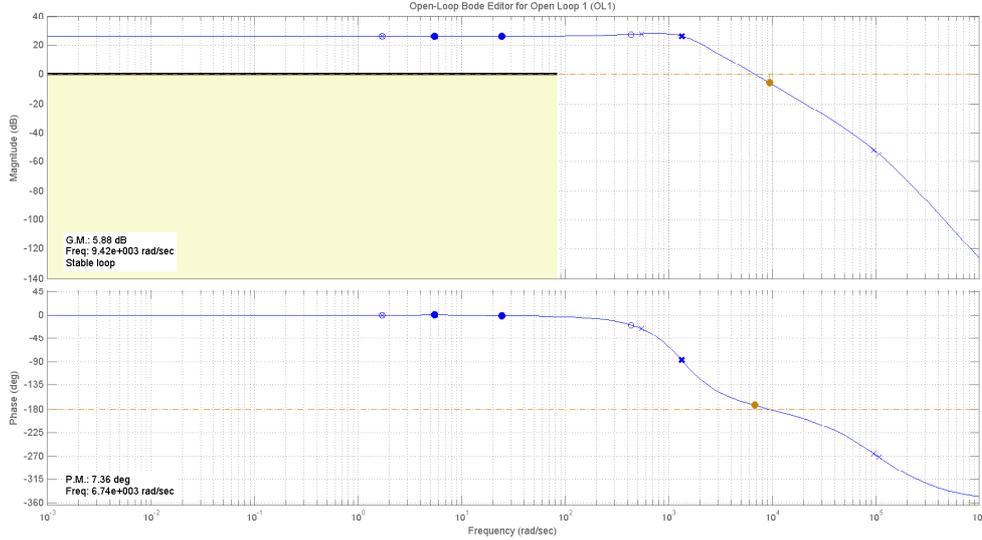


Figure 6: Diagramma di Bode della f.d.t. $K_c G_2(s)$ con specifica sulla banda passante.

d2) supponendo che il sistema controllato a ciclo chiuso sia asintoticamente stabile (attraverso l'azione esercitata dal controllore $C_2(s)$) è possibile applicare il teorema della risposta armonica. La funzione di trasferimento tra il disturbo d_k sulla massa m_2 e l'uscita y del sistema è data da

$$Y(j\omega) = \frac{G_d}{1 + C_1(j\omega)G_F(j\omega) + C_2(j\omega)C_1(j\omega)G_F(j\omega)} D_k(j\omega) = \quad (2)$$

$$= \frac{G_d(j\omega)}{1 + C_1(j\omega)G_F(j\omega)} \frac{1}{1 + C_2(j\omega)G_2(j\omega)} D_k(j\omega) = \bar{G}(j\omega) D_k(j\omega). \quad (3)$$

Applicando, quindi, il teorema della risposta armonica

$$y(t) = |\bar{G}(j\omega)| A_v \sin(\omega_v t + \angle \bar{G}(j\omega)),$$

questa specifica è equivalente a richiedere che, per pulsazioni $\omega \leq 0.01 \text{ rad/s}$, si abbia $|y(t)| < 1 \text{ mm}$. Facendo riferimento al caso peggiore, si consideri la valutazione cautelativa $|\sin(\omega_v t + \angle \bar{G}(j\omega))| = 1$ e $A_k = 1$. In questo caso la specifica richiede,

$$\frac{\Delta Y}{\Delta D} \leq \frac{G_d}{1 + C_1 G_f} \frac{1}{1 + C_2 G_2} = \bar{G}_{df} \frac{1}{1 + C_2 G_2} \leq 10^{-3}$$

Perciò, poichè nel campo di frequenze di interesse $|\bar{G}_{df}| < 0.0032$ (figura 7), si cerca un guadagno di $C_2(s)G_2(s)$ e quindi un controllore $C_2(s)$ tale per cui

$$|C_2(s)G_2(s)| \geq 10 \text{ dB}$$

per pulsazioni inferiori a 0.01 rad/s .

Progetto del controllore. Possiamo progettare un controllore in grado di rispettare tutte le specifiche richieste procedendo come segue. Si ponga una coppia di zeri complessi coniugati a cancellare la corrispondente coppia di poli stabili della f.d.t. $G_2(s)$. Questo, con un adeguato valore del guadagno, permette un attraversamento oltre la banda passante richiesta ($\omega_T = 83.3 \text{ rad/s}$) con pendenza pari a -40 dB/decade . Per alzare il valore del margine di fase si inserisce, vicino alla pulsazione di taglio, una rete anticipatrice

$$R(s) = k \frac{\tau s + 1}{\alpha \tau s + 1} = \frac{s + 435.2}{s + 7700}.$$

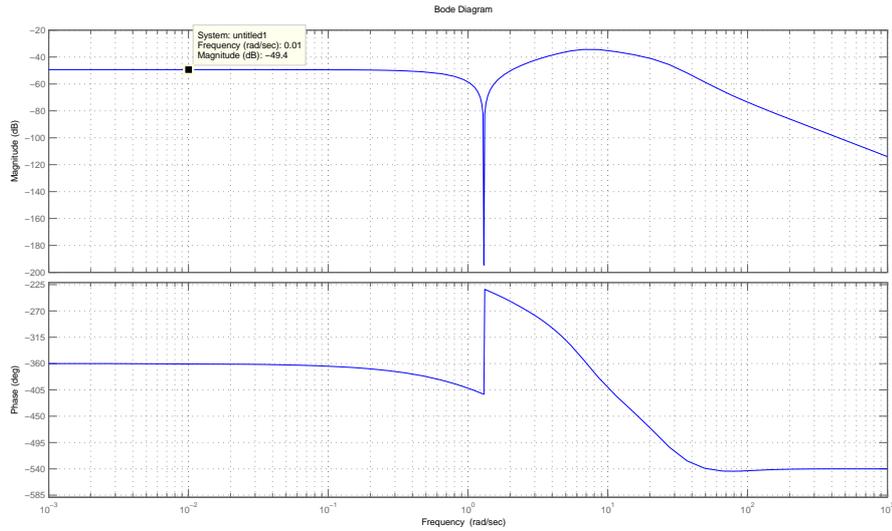


Figure 7: Diagramma di Bode della f.d.t. \bar{G}_{df} .

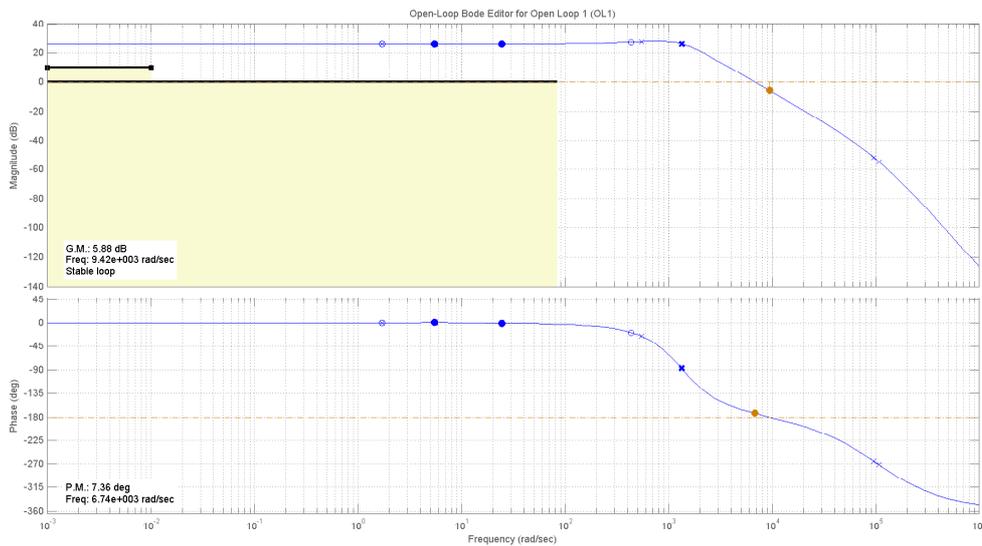


Figure 8: Diagramma di Bode della f.d.t. $K_c G_2(s)$ con specifica sulla banda passante e disturbo d_k .

Con questa rete anticipatrice si ottiene un margine di fase $M_f \cong 45$ deg. Tuttavia, il controllore non è realizzabile: per soddisfare anche questo requisito si inserisce un polo in alta frequenza almeno una decade più veloce della pulsazione di taglio. Il controllore finale è

$$C_2(s) = \frac{2045289469(s + 344.8)(s^2 + 28.2s + 595.4)}{(s + 1945)(s + 9.53 \cdot 10^4)(s + 1.08 \cdot 10^5)}$$

In figura 9 sono riportati i diagrammi di bode della f.d.t. $C_2(s)G_2(s)$ con le relative specifiche.

La f.d.t. complessiva del doppio anello è

$$G_c(s) = \frac{42126810054055640(s + 344.8)}{(s + 1.076 \cdot 10^5)(s + 9.57 \cdot 10^4)(s + 366.7)(s^2 + 1759s + 3.95 \cdot 10^6)}$$

di cui in figura 10 è riportata la risposta al gradino. La risposta al gradino ottenuta è molto simile a quella relativa ad un sistema del secondo ordine, quindi si può concludere che il tentativo di progettare un controllore che renda il sistema in anello chiuso un sistema a due poli dominanti è

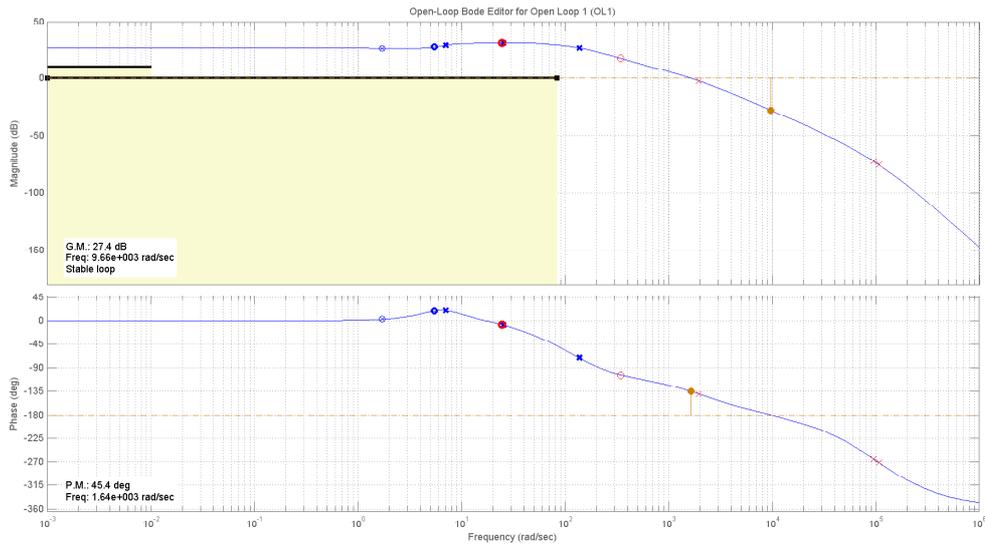


Figure 9: Diagrammi di Bode della f.d.t. $K_c G_2(s)$ con tutte le specifiche riportate.

comunque riuscito e le specifiche sul tempo di assestamento e sulla sovraelongazione sono rispettate ampiamente. Infine, in figura 11 sono riportati i diagrammi di bode della f.d.t. complessiva $G_c(s)$.

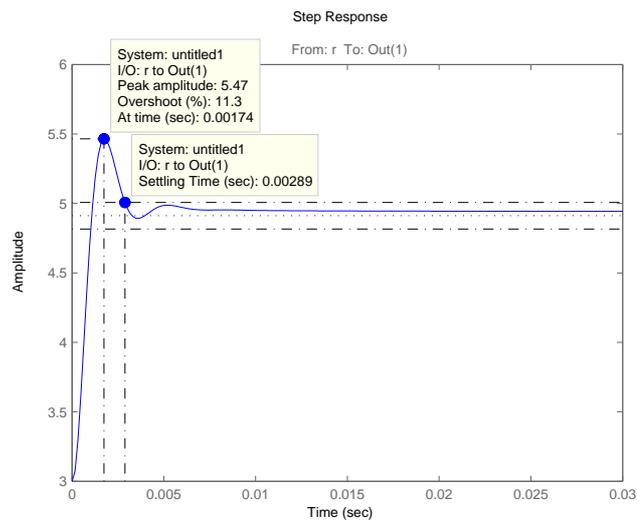


Figure 10: Risposta al gradino del sistema controllato $G_c(s)$.

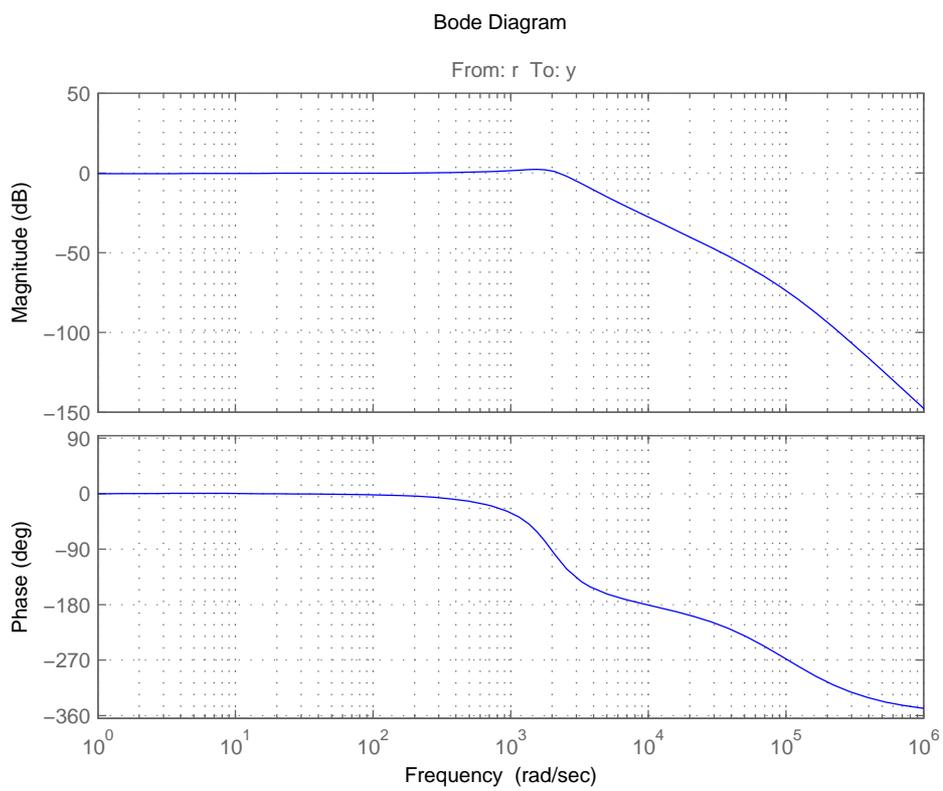


Figure 11: Diagrammi di Bode della f.d.t. $G_c(s)$.