

**Esercizio 1**

Si consideri il pendolo centrifugo in figura 1, la cui descrizione è riportata nel libro “Meccanica Applicata alle Macchine” di E. Funaioli (pagg. 56–61). Esso è costituito da un rotore e un disco, montati su di un albero che presenta una rigidità torsionale  $k$ , e da un pendolo di massa  $m$  e lunghezza  $l$ , fulcrato sul disco stesso e libero di ruotare a distanza  $r$  attorno ad un asse parallelo all'albero. Sul disco agiscono una coppia di ingresso  $\tau$  e un disturbo sinusoidale  $A \sin(\omega t)$ . Si indichino con  $\alpha$  e  $\theta$  le posizioni angolari del rotore e del disco, e con  $\varepsilon$  la posizione angolare relativa tra il pendolo e il disco stesso. Supponendo che il momento di inerzia del rotore sia molto più elevato del momento  $J$  del disco, la sua velocità di rotazione risulterà praticamente costante,  $\dot{\alpha} = \Omega$ . Sotto questa ipotesi e per piccoli valori di  $\varepsilon$ , la dinamica del sistema è descritta dalle equazioni

$$\begin{cases} J\ddot{\theta} + k(\theta - \alpha) - mr(l+r)\varepsilon\dot{\theta}^2 = \tau + A \sin(\omega t), \\ (l+r)\ddot{\theta} + l\ddot{\varepsilon} + r\varepsilon\dot{\theta}^2 = 0. \end{cases}$$

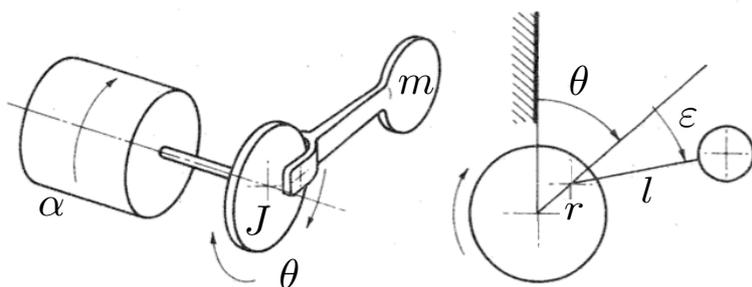


Figura 1: Schema meccanico del sistema

**A** Assumendo una velocità di rotazione costante del rotore  $\Omega \neq 0$ , si determinino i movimenti nominali del sistema corrispondenti ad una coppia di ingresso e ad un disturbo nulli ( $\bar{\tau} = A = 0$ ).

**B** Si studi la proprietà di raggiungibilità del sistema attorno al movimento nominale, utilizzando  $\tau$  come ingresso di controllo e al variare dei parametri del sistema stesso.

Si assumano i valori numerici  $m = 0.76$  Kg,  $J = 1.437$  Kg m<sup>2</sup>,  $k = 1000$  Nm/rad,  $r = 0.20$  m,  $l = 2$  m e  $\Omega = 100$  rad/s.

**C** Si analizzi la risposta armonica tra il disturbo  $d = A \sin(\omega t)$  e la velocità angolare  $\dot{\theta}$  del disco e, sulla base di ciò, si dia una motivazione del funzionamento del sistema.

**D** Si supponga che il sistema sia dotato di un encoder, capace di misurare la posizione angolare relativa del pendolo ( $y = \varepsilon$ ), ma non di una misura diretta della sua velocità. Si progetti un osservatore che, utilizzando le misure di  $y(t)$  e in presenza di un ingresso  $\tau(t)$  esattamente noto, sia capace di stimare fedelmente  $\dot{y}(t)$ .

**E** Si realizzi una simulazione dinamica del sistema nell'intorno dei movimenti nominali e sottoposto ad un ingresso sinusoidale. Si confronti in simulazione la velocità effettiva con la stima ottenuta dall'algoritmo progettato.

**Esercizio 2**

Si consideri un sistema meccanico con ingresso di controllo  $u$  la cui dinamica è descritta dall'equazione

$$\ddot{x} + \beta \dot{x}^3 + \gamma x|x| = u.$$

**A** Si determinino gli equilibri del sistema al variare dei parametri  $\beta$  e  $\gamma$ , con  $\beta, \gamma > 0$ , corrispondenti ad un ingresso costante  $\bar{u}$ . Se ne discuta la stabilità mediante il metodo indiretto di Lyapunov.

**B** Nei casi in cui al punto precedente non sia possibile concludere sull'asintotica stabilità di un equilibrio, si progetti una legge di controllo in retroazione  $u = \bar{u} + \tilde{u}(x, \dot{x})$  che stabilizzi il sistema attorno ad esso (*Suggerimento*: si utilizzi la funzione candidata  $V(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} \dot{x}^2 + \gamma \int_0^x y|y| dy$ ).

### Soluzione esercizio 1

A) Imponendo  $\ddot{\theta} = \ddot{\varepsilon} = 0$ ,  $\bar{\tau} = d = 0$  nelle equazioni della dinamica, si ottiene  $\theta = \alpha(t) = \Omega t$ ,  $\dot{\theta} = \Omega$  e  $\varepsilon = \dot{\varepsilon} = 0$ . Definendo lo stato del sistema come  $x = (\theta, \varepsilon, \dot{\theta}, \dot{\varepsilon})^T = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ , la sua dinamica può essere riscritta nella forma

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3, \\ \dot{x}_2 = x_4, \\ \dot{x}_3 = -\frac{k}{J}(x_1 - \alpha) + \frac{mr}{J}(l+r)x_2x_3^2 + \frac{1}{J}(\tau + d), \\ \dot{x}_4 = \frac{l+r}{Jl}(k(x_1 - \alpha) - mr(l+r)x_2x_3^2) - \frac{r}{l}x_2x_3^2 - \frac{r+l}{Jl}(\tau + d). \end{cases}$$

Il movimento nominale cercato è dato da  $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4)$ , con  $\bar{x}_1 = \Omega t$ ,  $\bar{x}_2 = 0$ ,  $\bar{x}_3 = \Omega$  e  $\bar{x}_4 = 0$ .

B) Definendo le variabili di stato traslate come  $\tilde{x} = x - \bar{x}$  e gli ingressi traslati come  $\tilde{u} = u - \bar{u}$  e  $\tilde{d} = d - \bar{d}$ , il comportamento dinamico del sistema nell'intorno del movimento nominale è descritto dall'approssimazione lineare

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + B_\tau\tilde{\tau} + B_d\tilde{d},$$

con

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k}{J} & \frac{mr(l+r)x_3^2}{J} & \frac{2mr(l+r)x_2x_3}{J} & 0 \\ \frac{k(l+r)}{Jl} & -\frac{r(J+m(l+r)^2)x_3^2}{Jl} & -\frac{2r(J+m(l+r)^2)x_2x_3}{Jl} & 0 \end{pmatrix} \Bigg|_{x=\bar{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k}{J} & \frac{mr(l+r)\Omega^2}{J} & 0 & 0 \\ \frac{k(l+r)}{Jl} & -\frac{r(J+m(l+r)^2)\Omega^2}{Jl} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_\tau = B_d = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{J} \\ -\frac{l+r}{Jl} \end{pmatrix}.$$

Si consideri la matrice di raggiungibilità  $R = (B_\tau, AB_\tau, A^2B_\tau, A^3B_\tau)$ , che consente di studiare la proprietà di raggiungibilità del sistema rispetto all'ingresso di controllo  $\tau$ . Essa risulta data da

$$R = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{J} & 0 & -\frac{kl+mr(l+r)^2\Omega^2}{J^2l} \\ 0 & -\frac{l+r}{Jl} & 0 & \frac{(l+r)(kl+r(J+m(l+r)^2)\Omega^2)}{J^2l^2} \\ \frac{1}{J} & 0 & -\frac{kl+mr(l+r)^2\Omega^2}{J^2l} & 0 \\ -\frac{l+r}{Jl} & 0 & \frac{(l+r)(kl+r(J+m(l+r)^2)\Omega^2)}{J^2l^2} & 0 \end{pmatrix}$$

il cui determinante è  $-\frac{r^2(l+r)^2\Omega^4}{J^4l^4}$ , che è diverso da zero per  $r \neq 0$ , nel qual caso si può concludere sulla completa raggiungibilità del sistema.

C) Con i valori numerici specificati, la matrice dinamica e i vettori di ingresso assumono i valori

$$A = 10^3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.0010 & 0 \\ 0 & 00 & 0.0010 & 0 \\ -0.6959 & 2.3271 & 0 & 0 \\ 0.7655 & -3.5598 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_\tau = B_d = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.6959 \\ -0.7655 \end{pmatrix}.$$

La funzione di trasferimento tra il disturbo  $d$  e la velocità angolare  $\dot{\theta}$  del disco, ottenuta come  $G_d = C(sI - A)^{-1}B_d$ , con  $C = [0, 0, 1, 0]$ , è data da

$$G_d = 0.69589 \frac{s(s^2 + 1000)}{(s^2 + 170.3)(s^2 + 4085)}.$$

ed è caratterizzata dalla risposta armonica riportata in figura 2. Tale funzione di trasferimento presenta due coppie di poli immaginari puri. Essa presenta inoltre uno zero di trasmissione in  $s = 0$  e due zeri immaginari puri caratterizzati da una pulsazione  $\omega_n = 31.6228$  rad/s. La presenza di

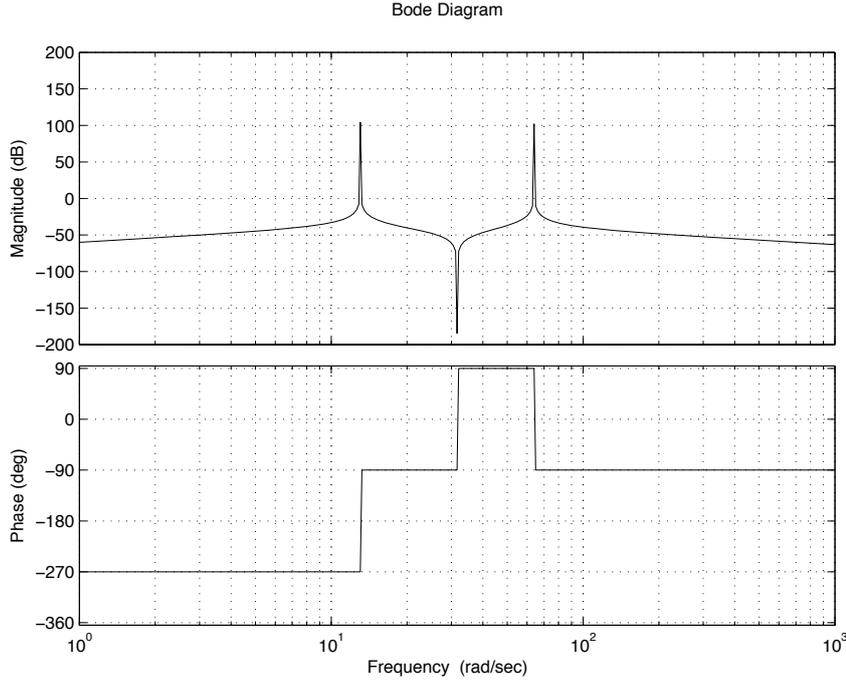


Figura 2: Risposta armonica tra il disturbo  $d$  e la velocità angolare  $\dot{\theta}$  del disco di inerzia  $J$ .

questi ultimi sta a rappresentare la capacità del sistema di reiettare completamente (almeno in teoria) un segnale sinusoidale del tipo  $d = A \sin(\omega_n t)$ . In effetti, calcolando simbolicamente tale f.d.t, si sarebbe ottenuto che la pulsazione degli zeri immaginari puri è

$$\omega_n = \sqrt{\frac{r}{l}} \Omega.$$

Fissato un valore  $\bar{\Omega}$  per la velocità di rotazione del rotore, se si desidera annullare in uscita (in realtà sarà possibile solo una forte attenuazione) un segnale con pulsazione  $\bar{\omega}_n$ , sarà sufficiente dimensionare il rapporto tra la distanza  $r$  del fulcro del pendolo dall'albero e la lunghezza  $l$  del pendolo stesso. In virtù di ciò, un tale sistema svolge la funzione di "smorzatore dinamico".

- D)** Si noti che, avendo scritto il sistema nella forma di stato descritta al punto B, il dato di interesse che si desidera ricostruire è espresso come una delle variabili di stato. Perciò un osservatore è immediatamente ottenibile tramite le usuali tecniche di sintesi nella forma di Luenberger

$$\dot{\tilde{x}}_o = A\tilde{x}_o + B_\tau \tilde{\tau} + L(y - C_o \tilde{x}_o),$$

con  $C_o = [0, 1, 0, 0]$  e  $y = \tilde{\varepsilon} = \varepsilon$ . La matrice  $L$  può essere facilmente ottenuta in modo da fissare gli autovalori della dinamica di stima. Per esempio, posti questi in  $p = [-10, -20, -30, -40]$ , dalle formule del piazzamento dei poli si ottiene

$$L = \begin{pmatrix} -25.5909 \\ 100.0000 \\ 91.4105 \\ -755.6715 \end{pmatrix}.$$

- E)** Uno schema **Simulink** che permette di simulare l'evoluzione del sistema linearizzato e di confrontare la velocità effettiva con quella stimata dall'algorithm è riportato in figura 3. Infine, la figura 4 riporta l'andamento dell'ingresso sinusoidale  $\tau = 10 \sin(10t)$ , dell'uscita  $y = \varepsilon$  del sistema e della differenza tra la velocità angolare relativa del pendolo e quella ricostruita dall'algorithm. Nella simulazione si assume che lo stato dell'osservatore sia inizialmente perturbato e pari a  $\tilde{x}_o = [0.01, 0.5, 0.0345, 0.1]$ .

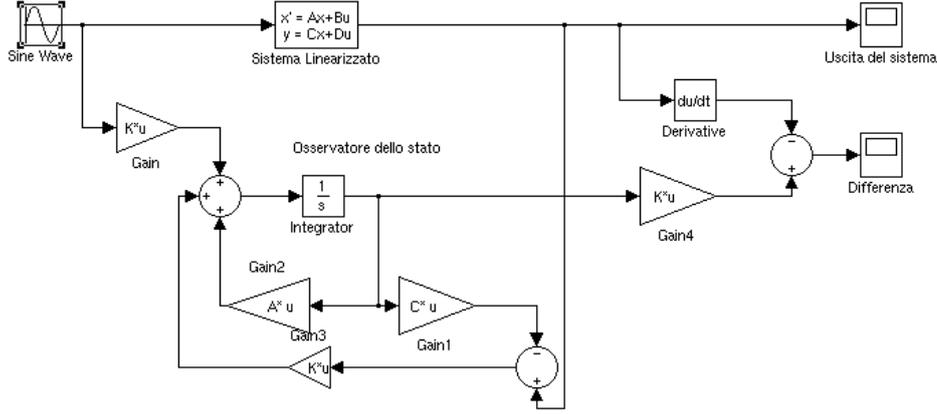


Figura 3: Schema **Simulink** che permette di simulare l'evoluzione del sistema linearizzato e di confrontare la velocità effettiva con quella stimata dall'algorithm.

### Soluzione esercizio 2

A) Definendo le variabili di stato  $x_1 = x$  e  $x_2 = \dot{x}$ , il sistema può essere posto nella forma

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\gamma x_1 |x_1| - \beta x_2^3 + u. \end{cases}$$

Imponendo  $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$  e  $u = \bar{u}$  in tale sistema, si ottengono le condizioni  $\bar{x}_2 = 0$  e  $\gamma \bar{x}_1 |\bar{x}_1| = \bar{u}$ . Quest'ultima, essendo  $\gamma > 0$  per ipotesi, ammette la soluzione

$$\bar{x}_1 = \sqrt{\frac{|\bar{u}|}{\gamma}} \text{sign}(\bar{u}).$$

Ai fini dello studio della stabilità degli equilibri, si consideri il sistema nelle variabili traslate  $\tilde{x}_1 = x_1 - \bar{x}_1$ ,  $\tilde{x}_2 = x_2 - \bar{x}_2 = x_2$  e  $\tilde{u} = u - \bar{u}$ . Tale sistema è descritto con sufficiente accuratezza, nell'intorno degli equilibri, dall'approssimazione lineare

$$\begin{pmatrix} \dot{\tilde{x}}_1 \\ \dot{\tilde{x}}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2\gamma |\bar{x}_1| & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tilde{u},$$

la cui matrice dinamica ammette il polinomio caratteristico  $\pi(s) = s^2 + 2\gamma |\bar{x}_1|$  e quindi gli autovalori  $s_{1,2} = \pm i\sqrt{2\gamma |\bar{x}_1|}$ . Ciò indica una marginale stabilità dell'approssimazione lineare, ma non permette di concludere niente su quella del sistema originale.

B) Visti i risultati del punto precedente, si rende necessario progettare una legge di controllo in retroazione  $u = \bar{u} + \tilde{u}(x, \dot{x})$  che stabilizzi il sistema nell'equilibrio. A tal fine si consideri il sistema non lineare nelle variabili di stato traslate, che risulta descritto dalle equazioni

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_1 &= \tilde{x}_2, \\ \dot{\tilde{x}}_2 &= -\gamma(\tilde{x}_1 + \bar{x}_1)|\tilde{x}_1 + \bar{x}_1| - \beta\tilde{x}_2^3 + \tilde{u} + \bar{u}. \end{cases}$$

Si consideri la funzione candidata di Lyapunov suggerita nel testo, riscritta nelle variabili di stato traslate:  $V(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = \frac{1}{2} \tilde{x}_2^2 + \gamma \int_0^{\tilde{x}_1} y|y| dy$ . Derivando  $V$  rispetto al tempo e sostituendo i valori dei punti di equilibrio, si ottiene

$$\dot{V}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = \left( \frac{\partial V}{\partial \tilde{x}_1}, \frac{\partial V}{\partial \tilde{x}_2} \right) \begin{pmatrix} \dot{\tilde{x}}_1 \\ \dot{\tilde{x}}_2 \end{pmatrix} = -\beta\tilde{x}_2^4 + \tilde{x}_2(\gamma\tilde{x}_1|\tilde{x}_1| - \gamma(\tilde{x}_1 + \bar{x}_1)|\tilde{x}_1 + \bar{x}_1| + \tilde{u} + \bar{u}).$$

Scegliendo  $\tilde{u} = \gamma(\tilde{x}_1 + \bar{x}_1)|\tilde{x}_1 + \bar{x}_1| - \gamma\tilde{x}_1|\tilde{x}_1| - \bar{u}$ , la derivata temporale di  $V$  diventa  $\dot{V}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = -\beta\tilde{x}_2^4$ , che risulta essere semi-definita negativa poiché  $\dot{V} = 0$  implica soltanto  $\dot{\tilde{x}}_2 = 0$ . Sostituendo

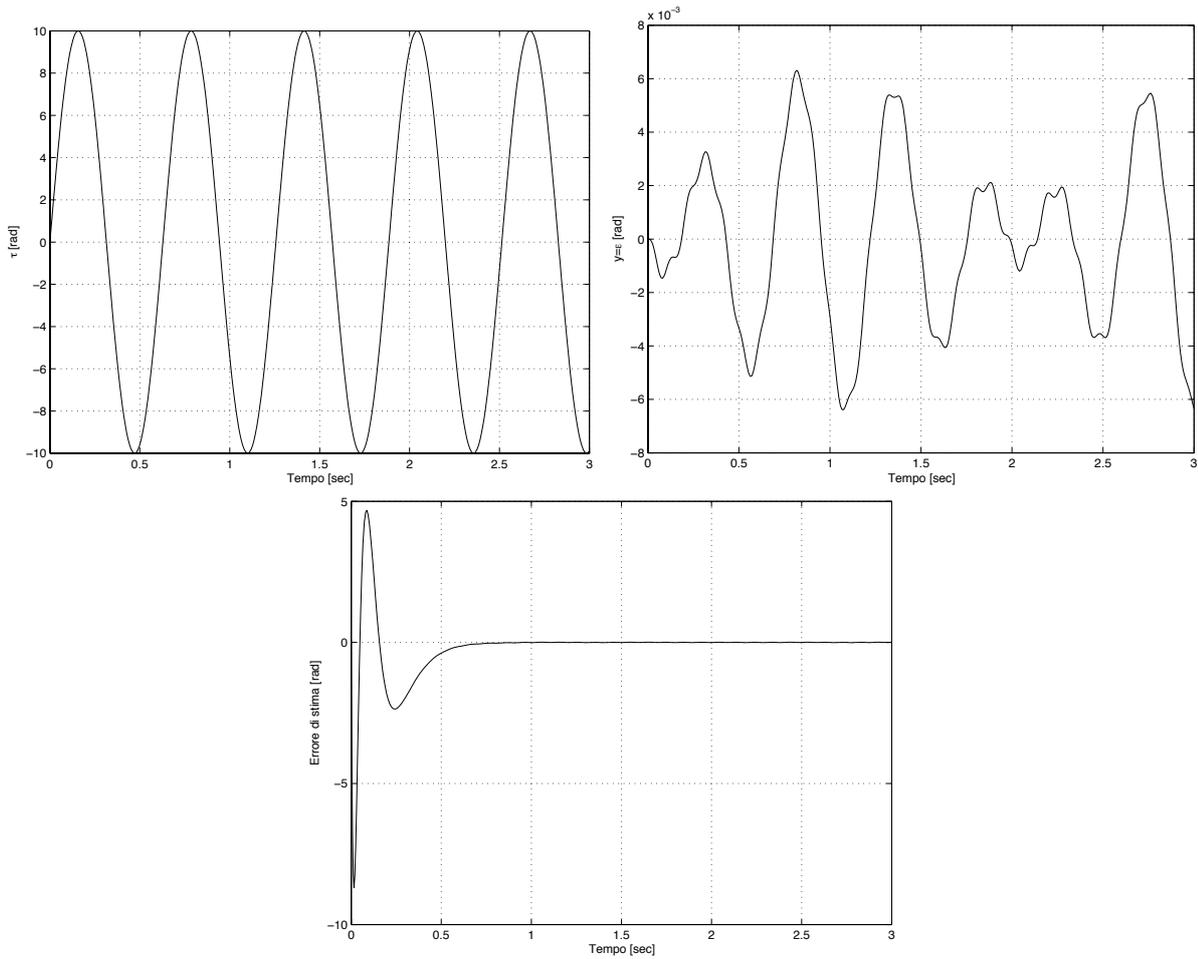


Figura 4: andamento dell'ingresso sinusoidale  $\tau = 10 \sin(10t)$ , dell'uscita  $y = \varepsilon$  del sistema e della differenza tra la velocità angolare relativa del pendolo e quella ricostruita dall'algorithm.

questa condizione nella dinamica del sistema si ottengono  $\dot{\tilde{x}}_1 = 0$  e  $0 = -\gamma(\tilde{x}_1 + \bar{x}_1)|\tilde{x}_1 + \bar{x}_1| + \tilde{u} + \bar{u}$ . Infine, sostituendo anche la scelta di  $\tilde{u}$  si ha  $-\gamma\tilde{x}_1|\tilde{x}_1| = 0$ , ovvero  $\tilde{x}_1 = 0$ . L'insieme invariante massimo, formato dalle traiettorie del sistema per cui  $\dot{V} = 0$ , si riduce all'origine del sistema traslato e quindi, per il Teorema di Krasovskii-Lasalle, ciascun equilibrio è reso asintoticamente stabile dalla scelta

$$u = \bar{u} + \tilde{u}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = \gamma(x_1|x_1| - (x_1 - \bar{x}_1(\bar{u}))|x_1 - \bar{x}_1(\bar{u})|).$$