

Esame di Controlli Automatici - 20 Luglio 2010

Esercizio 1

Si consideri il sistema meccanico rappresentato in figura 1. Esso è costituito da due aste omogenee di massa m , momento d'inerzia J e lunghezza L , che sono connesse ad una estremità attraverso una cerniera vincolata a muoversi lungo una guida verticale e soggetta ad una forza di ingresso F . Le altre estremità sono invece vincolate a muoversi lungo una guida orizzontale attraverso due carrelli di massa trascurabile. I due carrelli sono collegati tra loro attraverso una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla ed uno smorzatore di costante viscosa β . Si supponga di disporre di un sensore che misura l'angolo θ compreso tra un'asta e la retta verticale. La dinamica che descrive il moto delle due aste risulta descritta da

$$I\ddot{\theta} + 4\beta L^2\dot{\theta} \cos^2 \theta + 4kL^2 \sin \theta \cos \theta - mgL \sin \theta = -FL \sin \theta, \quad I = 2J + \frac{1}{2}mL^2 = \frac{2}{3}mL^2.$$

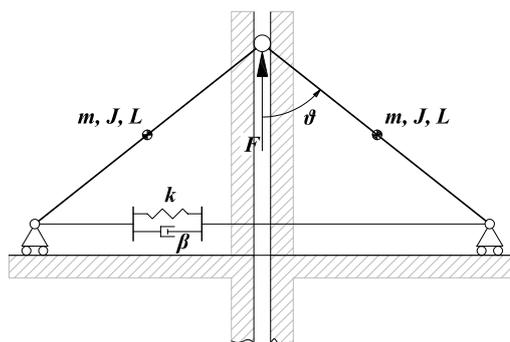


Figura 1: Schema meccanico del sistema

Si risponda ai seguenti quesiti:

- 1.A Si determinino gli angoli $\bar{\theta}$ di equilibrio del sistema corrispondenti ad una forza di ingresso $F = 0$, assumendo vera la condizione $mg \neq 4kL$;
- 1.B Si discuta la stabilità degli equilibri al variare dei parametri del sistema mediante il metodo indiretto di Lyapunov;
- 1.C Si discutano le proprietà di raggiungibilità e osservabilità delle approssimazioni lineari, $\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + B\tilde{F}$ negli intorni degli equilibri, e se ne dia una interpretazione fisica;

Considerando l'unico equilibrio corrispondente all'angolo $\bar{\theta}$ per cui il sistema linearizzato risulta essere sempre raggiungibile, e assumendo i valori numerici $m = 2$ Kg, $L = 1$ m, $g = 9.81$ m/s², $k = 9.81$ N/m, $\beta = 0.5$ Ns/m, si risponda ai seguenti quesiti:

- 1.D Si progetti un regolatore basato su un osservatore asintotico dello stato e sulla retroazione lineare, che sia in grado di stabilizzare asintoticamente il sistema linearizzato nell'intorno dell'equilibrio e inseguire un segnale di riferimento a gradino con errore a regime nullo;
- 1.E Si realizzi in ambiente Matlab/Simulink una simulazione del sistema linearizzato chiuso in anello con il regolatore progettato al passo precedente;
- 1.F Si effettui una simulazione del sistema originale chiuso in anello con il regolatore progettato, realizzando separatamente la dinamica non lineare del sistema di partenza.

Esercizio 2

Si consideri il seguente sistema non lineare tempo continuo:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sin(x - y) + u \\ \dot{y} &= -3xy. \end{aligned}$$

- 2.A Posto $u = 0$, si calcolino tutti gli equilibri e se ne discuta la stabilità;
- 2.B Si progetti una legge di controllo alla Lyapunov tale da rendere il sistema globalmente asintoticamente stabile nell'origine.

Soluzione esercizio 1

A) Definito il vettore di stato $x = (x_1, x_2) = (\theta, \dot{\theta})$, la dinamica del sistema risulta data da

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -\frac{4\beta L^2}{I} x_2 \cos^2 x_1 - \frac{4kL^2}{I} \sin x_1 \cos x_1 + \frac{mgL}{I} \sin x_1 - \frac{L}{I} \sin x_1 F. \end{cases}$$

Imponendo la condizione $\dot{x} = 0$ e assumendo una forza di ingresso nulla, $F = 0$, si ottengono i due sistemi di condizioni

$$\begin{cases} \sin x_1 = 0, \\ x_2 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 4kL \cos x_1 - mg = 0, \\ x_2 = 0. \end{cases}$$

Il primo sistema di condizioni è soddisfatto dai punti $\bar{x}^a = (0, 0)$ e $\bar{x}^b = (\pi, 0)$. Il secondo sistema ammette le soluzioni $\bar{x}^c = (\arccos(\frac{mg}{4kL}), 0)$ e $\bar{x}^d = (-\arccos(\frac{mg}{4kL}), 0)$, per $0 < mg < 4kL$, e nessuna soluzione altrimenti. Peraltro, l'equilibrio in \bar{x}_d risulta essere caratterizzato da un valore negativo dell'angolo θ , il che richiederebbe che i due carrelli si scambiassero di posizione.

B) Al fine dello studio della stabilità del generico equilibrio $\bar{x} = (\bar{x}_1, 0)$, si considerino il vettore di stato e l'ingresso del sistema traslati, $\tilde{x} = x - \bar{x}$ e $\tilde{F} = F - 0$. La dinamica del sistema nell'intorno dell'equilibrio è descritta con sufficiente accuratezza dal sistema lineare approssimato $\dot{\tilde{x}} = A(\bar{x})\tilde{x} + B(\bar{x})\tilde{F}$, con

$$A(\bar{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{4kL^2}{I} (1 - 2\cos^2 \bar{x}_1) + \frac{mgL}{I} \cos \bar{x}_1 & -\frac{4\beta L^2}{I} \cos^2 \bar{x}_1 \end{pmatrix}, \quad B(\bar{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{L}{I} \sin \bar{x}_1 \end{pmatrix}.$$

L'equilibrio in \bar{x}^a è caratterizzato dalla matrice dinamica

$$A(\bar{x}^a) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{L}{I} (4kL - mg) & -\frac{4\beta L^2}{I} \end{pmatrix}$$

che ammette il polinomio caratteristico $s^2 + s\frac{4\beta L^2}{I} + \frac{L}{I} (4kL - mg)$. Fisicamente si ha $I > 0$, $\beta \geq 0$, $k > 0$ e $L > 0$. Per $\beta > 0$, dalla regola di Cartesio, è facile determinare che l'equilibrio in \bar{x}^a è asintoticamente stabile se $4kL - mg > 0$, mentre risulta instabile se $4kL - mg < 0$. Per $\beta = 0$ invece, gli autovalori della matrice dinamica del sistema linearizzato sono le soluzioni di $s^2 = -\frac{L}{I} (4kL - mg)$. Se $4kL - mg > 0$, si hanno due radici immaginarie pure che indicano una marginale stabilità del sistema linearizzato, mentre nulla si può dire sulla stabilità del sistema non lineare. Nel caso $4kL - mg < 0$ si hanno due radici reali, di cui una positiva, il che permette di concludere per l'instabilità di entrambi i sistemi.

Analogamente è possibile discutere l'equilibrio in \bar{x}^b . La matrice dinamica risulta data da

$$A(\bar{x}^b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{L}{I} (4kL + mg) & -\frac{4\beta L^2}{I} \end{pmatrix}$$

il cui polinomio caratteristico, $s^2 + s\frac{4\beta L^2}{I} + \frac{L}{I} (4kL + mg)$, possiede solo radici con parti reali negative per $\beta > 0$ e immaginarie pure per $\beta = 0$. Nel primo caso, si può concludere per la stabilità dell'equilibrio, mentre nel secondo caso nulla si può dire sulla stabilità del sistema non lineare.

Infine, per l'equilibrio \bar{x}^c la matrice dinamica risulta data da

$$A(\bar{x}^c) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{L}{I} \frac{(4kL)^2 - m^2 g^2}{4kL} & -\frac{4\beta L^2}{I} \frac{m^2 g^2}{(4kL)^2} \end{pmatrix}$$

il cui polinomio caratteristico, $s^2 + s\frac{4\beta L^2}{I} \frac{m^2 g^2}{(4kL)^2} - \frac{L}{I} \frac{(4kL)^2 - m^2 g^2}{4kL}$, permette di concludere per l'instabilità dell'equilibrio in \bar{x}^c . Infatti, per $\beta > 0$, esso presenta una variazione di segno per tutte le combinazioni di parametri per cui l'equilibrio stesso esiste (si veda il punto A), mentre per $\beta = 0$ si hanno due radici reali di cui una positiva.

C) Al fine di studiare la raggiungibilità delle approssimazioni lineari negli intorni dei tre equilibri, \bar{x}^a , \bar{x}^b e $\bar{x}^c = (\bar{x}_1^c, 0)$, si considerino le corrispondenti matrici di ingresso date da

$$B(\bar{x}^a) = B(\bar{x}^b) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B(\bar{x}^c) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{L}{I} \sin \bar{x}_1^c \end{pmatrix},$$

da cui risulta evidente che il sistema non è raggiungibile negli equilibri in \bar{x}^a e \bar{x}^b , essendo il sistema in una condizione di singolarità in cui qualunque variazione \tilde{F} della forza d'ingresso F viene completamente assorbita dalle forze vincolari esercitate dalle due aste. La matrice di raggiungibilità in \bar{x}^c risulta invece essere

$$R(\bar{x}^c) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{L}{I} \sin \bar{x}_1^c & \frac{4\beta L^3}{I^2} \cos^2 \bar{x}_1^c \sin \bar{x}_1^c \end{pmatrix},$$

il cui determinante, $-\frac{L}{I} \sin \bar{x}_1^c$, risulta sempre diverso da zero poiché la condizione

$$\sin \left(\arccos \left(\frac{mg}{4kL} \right) \right) = 0 \quad \text{ovvero} \quad \frac{mg}{4kL} = \cos(\arcsin 0)$$

può essere soddisfatta per $mg = 4kL$ (esclusa per ipotesi) oppure per $mg = -4kL$ che invece può essere esclusa dalla fisica del sistema. L'equilibrio in \bar{x}^c risulta quindi essere completamente raggiungibile.

Al fine dello studio dell'osservabilità, si consideri il vettore di uscita $C = (1, 0)$. E' immediato verificare che le matrici di osservabilità valgono

$$O(\bar{x}^a) = O(\bar{x}^b) = O(\bar{x}^c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

che hanno ovviamente rango pieno, per cui il sistema risulta osservabile in tutti e tre gli equilibri.

D Si richiede di progettare un regolatore che renda asintoticamente stabile il sistema linearizzato nell'unico equilibrio che risulta sempre raggiungibile ed osservabile, rappresentato dal punto \bar{x}^c . La specifica richiede inoltre che il sistema controllato sia in grado di inseguire un segnale a gradino con errore a regime nullo, il che è garantito dall'esistenza di un polo nell'origine nella catena diretta tra il riferimento e l'uscita del sistema. Visto che il sistema non ne possiede, tale polo deve essere inserito dal regolatore. Assumendo i valori numerici specificati, il progetto del regolatore può essere svolto con la usuale procedura di sintesi, ad esempio utilizzando i comandi

```
p = [-2, -4, -6]
integrator = tf(1, [1 0])
sys = ss(A, B, C, 0)
sys_esteso = tf(sys) * integrator
[A_esteso, B_esteso, C_esteso, D_esteso] = ssdata(sys_esteso)
K = -place(A_esteso, B_esteso, p)
q = 2*p
G = -place(A_esteso', C_esteso', q)'
```

che restituiscono, per la scelta dei poli effettuata, le matrici di retroazione dello stato e di iniezione delle uscite

$$K = (-23.2500, -33.0363, -24.0000), \quad G = \begin{pmatrix} 642.4045 \\ 582.6253 \\ 72.7461 \end{pmatrix}.$$

E Uno schema Simulink che permette di simulare l'evoluzione del sistema in anello chiuso con il regolatore progettato al punto precedente è riportato in figura 2. La figura 3 mostra l'evoluzione dell'uscita $\tilde{y} = \tilde{\theta}$, a partire da $\tilde{x}(0) = (0.2, 0.4)$ e stato dell'osservatore $\tilde{x}_R(0) = (0, 0, 0)$ e il corrispondente segnale di controllo \tilde{F} generato dal regolatore.

F) Uno schema Simulink che permette di simulare l'evoluzione del sistema non lineare in anello chiuso con il regolatore progettato per il sistema linearizzato è riportato in figura 4. Nella figura sono evidenziati in verde i blocchi che realizzano la dinamica del sistema. Una possibile realizzazione degli script utilizzati nei blocchi è riportata di seguito:

```
function dx = nonlinear_dynamics(in)
    load_parameters
    x = in(1:2);
    F = in(3);
    dx = [...
```

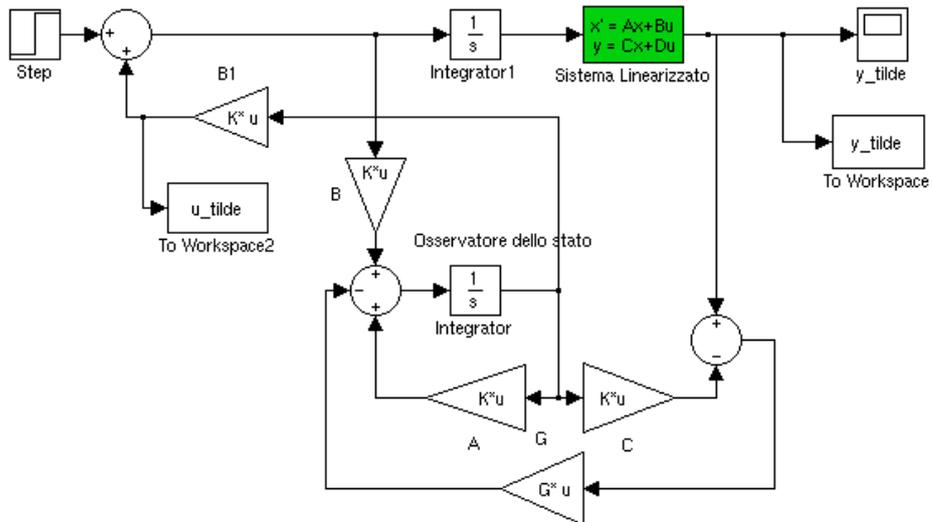


Figura 2: Schema Simulink che consente la simulazione del sistema chiuso in retroazione con il regolatore sopra progettato.

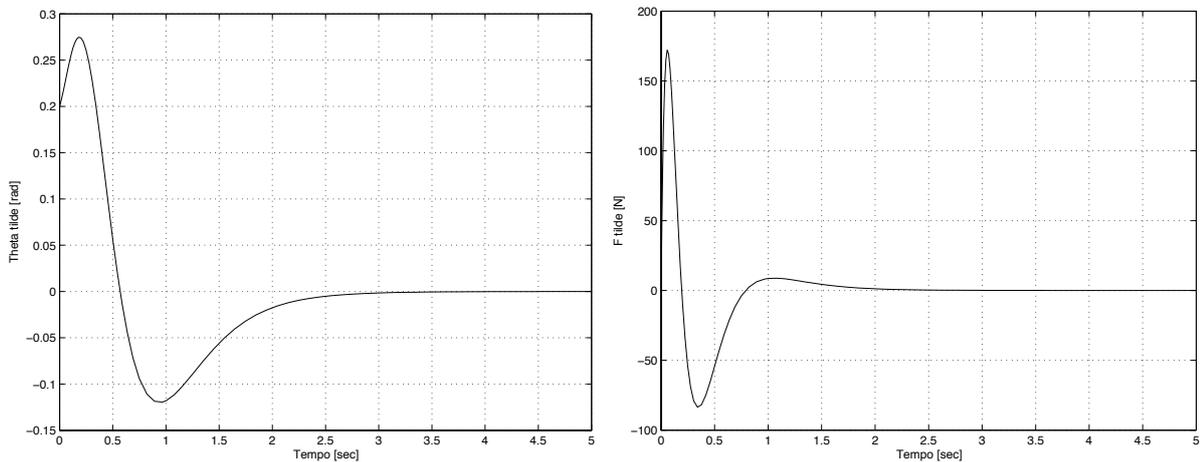


Figura 3: Evoluzione dell'uscita $\tilde{y} = \tilde{\theta}$, a partire da $\tilde{x}(0) = (0.2, 0.4)$ e stato dell'osservatore $\tilde{x}_R(0) = (0, 0, 0)$ e il corrispondente segnale di controllo \tilde{F} generato dal regolatore.

```

x(2);
-4*K*L^2/I*sin(x(1))*cos(x(1))-4*L^2*B/I*cos(x(1))^2*x(2) +
m*g*L/I*sin(x(1)) - F*L/I*sin(x(1))
];
end

function y = nonlinear_output(in)
    x = in(1:2);
    y = x(1);
end

function u = input_translation(u_tilde)
    load_parameters
    u = u_bar + u_tilde;
end

function y_tilde = output_translation(y)

```


Soluzione esercizio 2

2.A Imponendo le condizioni di equilibrio si ha:

$$\begin{aligned} 0 &= \sin(x - y) \\ 0 &= -3xy, \end{aligned}$$

da cui si ricavano le seguenti famiglie di equilibri:

$$\begin{aligned} \text{I)} & \begin{cases} x = 0 \\ y = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ \text{II)} & \begin{cases} x = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ y = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Il sistema non lineare espresso in variabili traslate $\tilde{x} = x - \bar{x}$ e $\tilde{y} = y - \bar{y}$ rispetto all'equilibrio generico (\bar{x}, \bar{y}) , è dato da

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= \sin(\tilde{x} + \bar{x} - \tilde{y} - \bar{y}) \\ \dot{\tilde{y}} &= -3(\tilde{x} + \bar{x})(\tilde{y} + \bar{y}). \end{aligned}$$

Linearizzando rispetto a tale equilibrio si ha

$$A_{\bar{x}\bar{y}} = \begin{bmatrix} \cos(\bar{x} - \bar{y}) & -\cos(\bar{x} - \bar{y}) \\ -3\bar{y} & -3\bar{x} \end{bmatrix},$$

da cui, sostituendo gli equilibri precedentemente calcolati, si ottiene:

$$\begin{aligned} A_{\text{I}} &= \begin{bmatrix} \cos(k\pi) & -\cos(k\pi) \\ -3k\pi & 0 \end{bmatrix}, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ A_{\text{II}} &= \begin{bmatrix} \cos(k\pi) & -\cos(k\pi) \\ 0 & -3k\pi \end{bmatrix}, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Per l'analisi di stabilità degli equilibri si può impiegare il metodo indiretto di Lyapunov, ma si deve discutere il segno e la parità di $k \in \mathbb{Z}$. Per $k = 0$ si ottiene l'equilibrio $(0, 0)$ che appartiene ad entrambe le famiglie ed ha matrice dinamica associata

$$A_{\text{I/II}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tale equilibrio è esponenzialmente instabile essendo presente un autovalore in 1.

Dalla prima famiglia si ottengono quattro tipologie di equilibri

$$\begin{aligned} (0, 2n), \quad n \in \mathbb{N}, \quad A_{\text{I } 1} &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -6n\pi & 0 \end{bmatrix} : \text{esponenzialmente instabile (sella)} \\ (0, -2n), \quad n \in \mathbb{N}, \quad A_{\text{I } 2} &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 6n\pi & 0 \end{bmatrix} : \text{esponenzialmente instabile (fuoco)} \\ (0, 2n + 1), \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad A_{\text{I } 3} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -3\pi(2n + 1) & 0 \end{bmatrix} : \text{asintoticamente stabile (fuoco)} \\ (0, -(2n + 1)), \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad A_{\text{I } 4} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3\pi(2n + 1) & 0 \end{bmatrix} : \text{esponenzialmente instabile (sella)}. \end{aligned}$$

Dalla seconda famiglia si ottengono altre quattro tipologie di equilibri

$$\begin{aligned} (2n, 0), \quad n \in \mathbb{N}, \quad A_{\text{II } 1} &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -6n\pi \end{bmatrix} : \text{esponenzialmente instabile (sella)} \\ (-2n, 0), \quad n \in \mathbb{N}, \quad A_{\text{II } 2} &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 6n\pi \end{bmatrix} : \text{esponenzialmente instabile (nodo sorgente)} \\ (2n + 1, 0), \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad A_{\text{II } 3} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -3\pi(2n + 1) \end{bmatrix} : \text{asintoticamente stabile (nodo pozzo)} \\ (-(2n + 1), 0), \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad A_{\text{II } 4} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 3\pi(2n + 1) \end{bmatrix} : \text{esponenzialmente instabile (sella)}. \end{aligned}$$

Un grafico dello spazio delle fasi, con alcune traiettorie del sistema e i punti di equilibrio, è riportato in fig. 6.

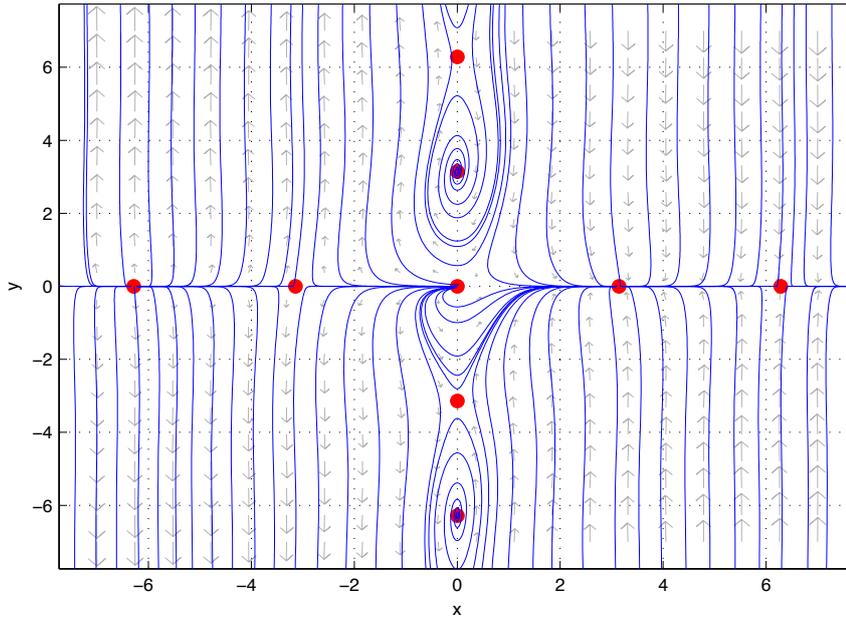


Figura 6: Grafico dello spazio delle fasi con alcune traiettorie del sistema e i punti di equilibrio.

2.B Per progettare un controllore alla Lyapunov facciamo uso della candidata $V = \frac{1}{2} (\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2)$, che è radialmente illimitata. Ricordando che $\dot{V} = L_f V + L_g V u$, cerchiamo di progettare u in modo che \dot{V} risulti definita negativa.

Nel nostro caso si ha $L_f V = \tilde{x} \sin(\tilde{x} + \bar{x} - \tilde{y} - \bar{y}) - 3\tilde{y}(\tilde{x} + \bar{x})(\tilde{y} + \bar{y})$ e $L_g V = \tilde{x}$. Si rammenta che l'equilibrio in cui stabilizzare il sistema è l'origine. La legge di controllo sarà data da:

$$u = -\frac{L_f V + \tilde{x}^2}{L_g V} = -\sin(\tilde{x} - \tilde{y}) + 3\tilde{y}^2 - \tilde{x},$$

la quale, come si può notare, è ben posta. Con tale legge di controllo si ha:

$$\dot{V} = -\tilde{x}^2,$$

che risulta quindi semidefinita negativa. Il sistema così controllato è sicuramente stabile. Per provare la (globale) asintotica stabilità facciamo ricorso al criterio di Krasoskii-LaSalle. Il sistema a ciclo chiuso con il controllo sopra proposto diviene:

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}} &= 3\tilde{y}^2 - \tilde{x} \\ \dot{\tilde{y}} &= -3\tilde{x}\tilde{y}.\end{aligned}$$

Analizzando l'evoluzione di tale sistema nell'insieme $\dot{V} = 0 \Rightarrow \{(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\}$, si ottiene

$$\begin{aligned}\tilde{x} &= 3\tilde{y}^2 \\ \tilde{y} &= 0.\end{aligned}$$

Affinché una traiettoria rimanga nell'insieme $\dot{V} = 0$ dovrà essere $\tilde{x} = 0$. Questo implica $\tilde{y} = 0$. Pertanto l'unica traiettoria completamente contenuta nell'insieme $\dot{V} = 0$ è rappresentata dall'equilibrio nell'origine. Tale equilibrio risulta pertanto globalmente asintoticamente stabile. Un grafico dello spazio delle fasi del sistema a ciclo chiuso con alcune traiettorie e l'unico punto di equilibrio, è riportato in fig. 7.

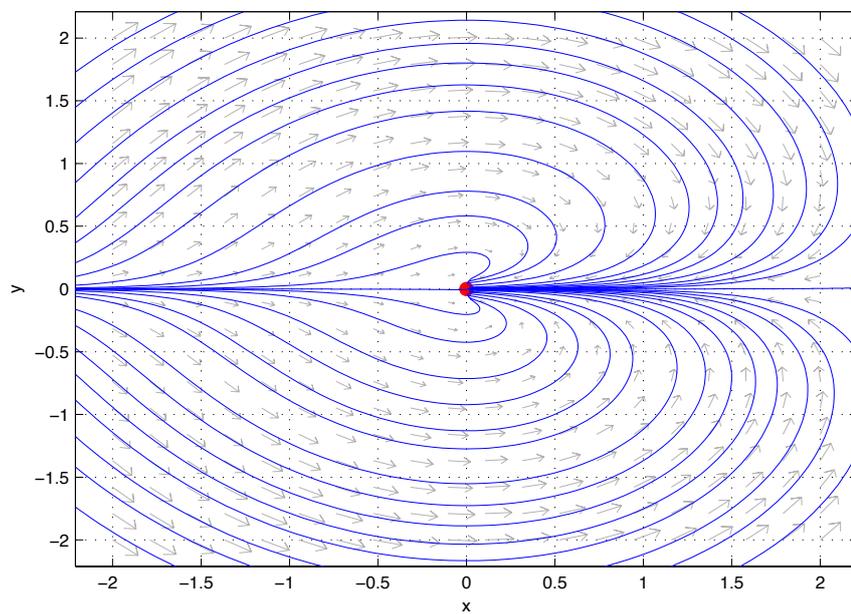


Figura 7: Grafico dello spazio delle fasi con alcune traiettorie del sistema a ciclo chiuso e il punto di equilibrio.