

Esercizio 1.

Si consideri il modello dinamico del sistema meccanico rappresentato in figura 1(a).

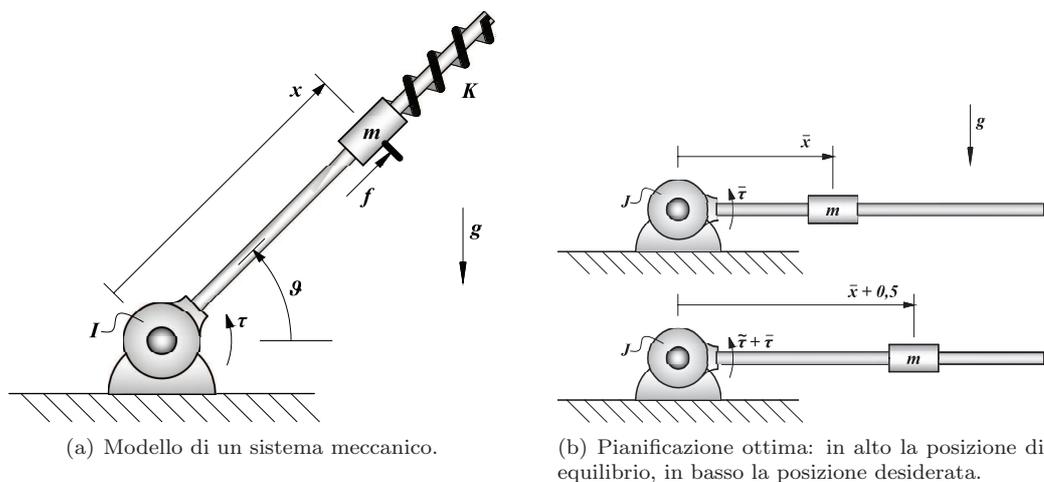


Figura 1: Sistema meccanico

Il sistema è composto da un cilindro di massa m che scorre su un'asta di lunghezza ℓ , rigidamente collegata ad un disco di inerzia J . Il disco è connesso coassialmente al rotore di un motore elettrico in grado di generare una coppia τ . L'accoppiamento cilindro-asta è caratterizzato da un coefficiente di attrito viscoso β_1 mentre sul giunto rotoidale di accoppiamento tra l'asta e il motore elettrico è presente un attrito viscoso con coefficiente β_2 . Inoltre, sul cilindro agisce una forza f . Indicando con θ la posizione angolare dell'asta e con x , che può assumere solo valori positivi, la distanza del baricentro del cilindro rispetto al centro del disco (vedi figura 1(a)), le equazioni che descrivono il comportamento dinamico del sistema sono:

$$m \ddot{x} = m x \dot{\theta}^2 - \beta_1 \dot{x} - m g \sin \theta + K \left(\frac{\ell}{2} - x \right) - f$$

$$(J + m x^2) \ddot{\theta} = -2 m x \dot{x} \dot{\theta} - \beta_2 \dot{\theta} - m g x \cos \theta + \tau.$$

A Si determinino in forma simbolica il valore della posizione angolare θ dell'asta e della posizione x della massa lungo l'asta, corrispondente alla condizione di equilibrio con ingressi $\tau = \bar{\tau} = \text{cost.}$ e $f = \bar{f} = 0$ al variare di K . In particolare, si considerino i seguenti casi:

- a1) Molla di costante $K \neq 0$;
- a2) Dispositivo senza molla ($K = 0$).

B Calcolare il sistema linearizzato approssimato attorno al generico equilibrio di cui al punto a2).

Si considerino i seguenti valori numerici: $J = 0.5 \text{ Kg m}^2 / \text{rad}$; $\beta_1 = 2 \text{ Kg/s}$; $\beta_2 = 3 \text{ Kg m}^2 / (\text{rad s})$; $m = 0.5 \text{ Kg}$; $K = 0 \text{ N/m}$; $\ell = 3 \text{ m}$; $g = 9.81 \text{ m/s}^2$; $\bar{\tau} = 7 \text{ N m}$; $\bar{f} = 0 \text{ N}$.

C Considerando alternativamente f o τ come ingressi di controllo, si determini se, a partire da una condizione iniziale di equilibrio q_o , sia possibile portare il sistema linearizzato in una configurazione finale q_s arbitraria, mediante un'opportuna azione di controllo.

D Si progetti un controllore basato sul regolatore che, per mezzo della coppia τ , permetta di raggiungere esattamente il valore desiderato $q_s = [\bar{x} + 0.5, \bar{\theta}]$ a partire dalle condizioni di equilibrio \bar{q} (si scelga la posizione x della massa m come uscita di misura). Si effettui quindi una simulazione del sistema linearizzato con il regolatore appena progettato, in ambiente **Simulink**.

E Si supponga adesso di voler solamente controllare il sistema in anello aperto con un'azione di controllo delle coppie τ pre-pianificata "in avanti". Si calcoli una funzione di ingresso $\tilde{\tau}(t) = \tau(t) - \bar{\tau}$ che, a partire dalla configurazione di equilibrio $\bar{q} = [\bar{x}, \bar{\theta}]$, porti il modello linearizzato del dispositivo alla configurazione $q_s = [\bar{x} + 0.5, \bar{\theta}]$ in un tempo T (vedi figura 1(b)). Si scelga

a tal fine un ingresso costante a tratti per N intervalli temporali di lunghezza $T_s = T/N$, e si usi un modello a tempo discreto del sistema. Scegliendo opportunamente il tempo di campionamento T_s ,

- e1) si discuta il minimo valore di N che garantisce una soluzione e si calcoli la corrispondente sequenza di controllo $\tilde{\tau}$. Si effettui poi una simulazione del sistema lineare tempo discreto con la sequenza di controllo appena progettata, in ambiente **Simulink**. Si analizzi inoltre l'andamento della posizione \tilde{x} del cilindro di massa m giustificandone l'andamento in relazione alla sequenza di controllo applicata;
- e2) si ripeta quanto svolto al punto e1) riducendo di 5 volte il tempo di campionamento T_s scelto. Si determini il costo del controllo $\|\tilde{\tau}\|_2^2 = \sum_{k=1}^N \tilde{\tau}_k^2$ e lo si confronti con quello relativo al punto precedente, giustificandone il risultato;
- e3) supponiamo di avere a disposizione un motore elettrico che sviluppi una coppia $\tilde{\tau}_{min} \leq \tilde{\tau} \leq \tilde{\tau}_{max}$ con $|\tilde{\tau}_{max}| = |\tilde{\tau}_{min}| = \tau^*$. Si scelga τ^* e si determini una sequenza di controllo $\tilde{\tau}$ tale per cui il sistema tempo continuo raggiunga esattamente la posizione q_s e vi rimanga per un tempo indefinito. Si effettui una simulazione del sistema lineare tempo continuo con la sequenza di controllo appena progettata, in ambiente **Simulink**, verificando che gli obbiettivi siano tutti raggiunti.

F Riconsiderando lo schema **Simulink** utilizzato al punto D, si effettui una simulazione utilizzando come segnale di riferimento la sequenza di posizioni \tilde{x} ottenuta con la pianificazione ottima di cui al punto e3) ed aggiungendo in ingresso al sistema la corrispondente sequenza ottima delle coppie. Si effettui una simulazione e si confrontino i risultati con quelli ottenuti al punto D valutando il costo del controllo nei due casi.

Esercizio 2.

Si consideri la seguente equazione differenziale di un sistema non lineare,

$$\ddot{x} + \frac{2x}{(1+x^2)^2} = 0$$

per il quale si vuol valutare la stabilità dell'origine. Si noti che tale sistema può essere visto come un sistema massa-molla la cui molla è non lineare con costante elastica pari a $2/(1+x^2)^2$. Indicando con $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2]^T = [x \ \dot{x}]^T$ le variabili di stato del sistema, si consideri la seguente candidata di Lyapunov

$$V(\mathbf{x}) = \int_0^{x_1} \frac{2\zeta}{(1+\zeta^2)^2} d\zeta + \frac{x_2^2}{2}.$$

Tale funzione è positiva definita poichè ovunque in \mathbb{R}^2 , $V(\mathbf{x}) \geq 0$, e $V(\mathbf{x}) = 0$ solo se $\mathbf{x} = 0$. Si traggano le conclusioni possibili su stabilità e attrattività locale o globale dell'origine.

Soluzione ¹

A Il sistema è descritto dal vettore di variabili di stato $q = [x, \theta, \dot{x}, \dot{\theta}]^T$. Poichè l'equilibrio corrispondente ad ingressi $\tau = \bar{\tau} = \text{cost.}$ e $f = \bar{f} = 0$ entrambi costanti, è caratterizzato da $\dot{x} = \dot{\theta} = \ddot{x} = \ddot{\theta} = 0$, si ottiene:

$$m g \sin \bar{\theta} - K \left(\frac{\ell}{2} - \bar{x} \right) = 0 \quad (1)$$

$$m g \bar{x} \cos \bar{\theta} = \bar{\tau}. \quad (2)$$

Consideriamo i vari casi:

a1) $K \neq 0$. In tal caso, per la (2) otteniamo

$$\bar{x} = \frac{\bar{\tau}}{m g \cos \bar{\theta}},$$

che, sostituito nella (1) permette di ottenere

$$m g \sin \bar{\theta} - \frac{K \ell}{2} + \frac{K \bar{\tau}}{m g \cos \bar{\theta}} = 0.$$

Poichè per $\bar{\tau} \neq 0$, si avrà che $\bar{\theta} \neq \pm \frac{\pi}{2}$, si può scrivere

$$m^2 g^2 \sin \bar{\theta} \cos \bar{\theta} - \frac{m g K \ell}{2} \cos \bar{\theta} + K \bar{\tau} = 0.$$

da cui il valore $\bar{\theta}$ relativa all'equilibrio.

Nel caso in cui $\bar{\tau} = 0$, si ha

$$m g \sin \bar{\theta} - K \left(\frac{\ell}{2} - \bar{x} \right) = 0$$
$$m g \bar{x} \cos \bar{\theta} = 0.$$

Dalla seconda equazione si osserva che gli unici due equilibri si hanno per $\bar{\theta} = \pm \frac{\pi}{2}$. Sostituendo nella seconda equazione tali valori di $\bar{\theta}$ si ottengono i corrispondenti valori per \bar{x} , ovvero

$$\bar{x}_1 = \frac{\ell}{2} - \frac{m g}{K}, \quad \text{se } \bar{\theta} = \frac{\pi}{2};$$
$$\bar{x}_2 = \frac{\ell}{2} + \frac{m g}{K}, \quad \text{se } \bar{\theta} = -\frac{\pi}{2}.$$

a2) $K = 0$. In questo caso, per la (1) e la (2) si può scrivere

$$m g \sin \bar{\theta} = 0$$
$$m g \bar{x} \cos \bar{\theta} = \bar{\tau}.$$

Dalla prima equazione $\bar{\theta} = 0 \pm k\pi$ con $k = 0, 1, \dots$. Poichè la posizione della massa x può assumere solo valori positivi, sostituendo nella seconda si ottiene

$$\bar{x}_1 = \frac{\bar{\tau}}{m g}, \quad \text{se } \bar{\theta} = 0 \text{ e quindi } \bar{\tau} > 0;$$
$$\bar{x}_2 = -\frac{\bar{\tau}}{m g}, \quad \text{se } \bar{\theta} = -\pi \text{ e quindi } \bar{\tau} < 0;.$$

B Indicando con $\tilde{q} = [\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \tilde{q}_3, \tilde{q}_4]^T = [x - \bar{x}, \theta - \bar{\theta}, \dot{x}, \dot{\theta}]^T$ le variabili di stato traslate nell'equilibrio generico e con $\tilde{u} = [\tilde{u}_1, \tilde{u}_2]^T = [f - \bar{f}, \tau - \bar{\tau}]^T$ gli ingressi traslati, il sistema non lineare scritto in

¹a cura di Paolo Salaris

forma di stato attorno al generico equilibrio $\bar{q} = [\bar{x}, \bar{\theta}, 0, 0]^T$ con $\bar{u} = [\bar{f}, \bar{\tau}]^T$ è dato da

$$\begin{cases} \dot{\tilde{q}}_1 = \tilde{q}_3 \\ \dot{\tilde{q}}_2 = \tilde{q}_4 \\ \dot{\tilde{q}}_3 = (\tilde{q}_1 + \bar{x}) \tilde{q}_4^2 - \frac{\beta_1}{m} \tilde{q}_3 - g \sin(\tilde{q}_2 + \bar{\theta}) + \frac{K}{m} \left(\frac{\ell}{2} - \tilde{q}_1 - \bar{x} \right) + \frac{\tilde{u}_1 + \bar{f}}{m} \\ \dot{\tilde{q}}_4 = \frac{1}{I + m(\tilde{q}_1 + \bar{x})^2} [-(\tilde{q}_1 + \bar{x})(2m\tilde{q}_3\tilde{q}_4 + mg \cos(\tilde{q}_2 + \bar{\theta})) - \beta_2\tilde{q}_4 + \tilde{u}_2 + \bar{\tau}] \end{cases}$$

Ponendo $K = 0$, con $\bar{f} = 0$, il sistema linearizzato approssimato di tale sistema attorno al nuovo punto di equilibrio delle nuove variabili di stato \tilde{q} , ovvero l'origine, è dato da:

$$\dot{\tilde{q}} = A\tilde{q} + B\tilde{u}$$

dove,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -g \cos \bar{\theta} & -\frac{\beta_1}{m} & 0 \\ -\frac{mg \cos \bar{\theta}(I - m\bar{x}^2) + 2m\bar{x}\bar{\tau}}{(I + m\bar{x}^2)^2} & \frac{mg\bar{x} \sin \bar{\theta}}{I + m\bar{x}^2} & 0 & -\frac{\beta_2}{I + m\bar{x}^2} \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ b_{31} & 0 \\ 0 & b_{42} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & \frac{1}{I + m\bar{x}^2} \end{bmatrix}.$$

C Affinchè sia possibile portare il sistema linearizzato in una configurazione finale q_s arbitraria a partire dalla configurazione iniziale q_o di equilibrio, è necessario che il sistema sia completamente raggiungibile. Per verificarlo consideriamo la matrice di raggiungibilità del sistema, ovvero

$$\mathcal{R} = [B \quad AB \quad A^2B \quad A^3B]$$

e valutiamone il rango. Iniziamo scegliendo come ingresso di controllo la forza f applicata alla massa m ; la matrice di raggiungibilità è

$$\mathcal{R}_f = b_{31} \begin{bmatrix} 0 & 1 & a_{33} & a_{33}^2 \\ 0 & 0 & 0 & a_{41} \\ 1 & a_{33} & a_{33}^2 & a_{33}^3 \\ 0 & 0 & a_{41} & (a_{33} + a_{44})a_{41} \end{bmatrix}$$

Si può verificare che tale matrice ha sempre rango pieno, quindi il sistema risulta essere completamente raggiungibile a partire da f e perciò stabilizzabile.

D'altra parte scegliendo come ingresso di controllo la coppia τ generata dal motore elettrico e applicata all'asta, la matrice di raggiungibilità è

$$\mathcal{R}_\tau = b_{42} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{32} \\ 0 & 1 & a_{44} & a_{42} + a_{44}^2 \\ 0 & 0 & a_{32} & a_{32}(a_{33} + a_{44}) \\ 1 & a_{44} & a_{42} + a_{44}^2 & a_{44}(2a_{42} + a_{44}) \end{bmatrix}$$

Si può verificare che anche tale matrice ha sempre rango pieno, quindi il sistema risulta essere completamente raggiungibile a partire da τ e perciò stabilizzabile.

D Ai fini del progetto del compensatore basato su regolatore, è necessario in maniera preliminare analizzare le proprietà di raggiungibilità e osservabilità del sistema con ingresso τ e uscita di misura x . Sostituendo i valori numerici nelle matrici del sistema linearizzato approssimato si conclude sia sulla completa raggiungibilità che sulla completa osservabilità del sistema.

Affinchè il sistema possa raggiungere il valore desiderato esattamente è necessario l'inserimento di un polo nell'origine in catena diretta, in quanto il sistema non ne possiede già uno. Il progetto del compensatore si effettuerà quindi sul sistema esteso ottenuto aggiungendo detto polo nell'origine.

Per la determinazione della matrice di retroazione degli stati, si sceglie di fissare i poli del sistema in anello chiuso in $p = [-1 \ -2 \ -3 \ -4 \ -5]^T$. Il comando `place` di `Matlab` fornisce automaticamente la matrice di retroazione:

$$K = [-18.57 \quad -47.31 \quad 62.25 \quad -9.44 \quad 13.70] .$$

Poichè non si ha accesso a tutte le variabili di stato ma il sistema risulta completamente osservabile, si può realizzare un osservatore di Luenberger per ricostruire lo stato. La matrice L di iniezione delle uscite è calcolata in modo che la matrice dinamica dello stimatore $A_e - LC_e$, dove C_e è la matrice delle uscite del sistema esteso, abbia autovalori in $q = 2p$. Impiegando il comando `Matlab`, $L = \text{transpose}(\text{place}(Ae', Ce', q))$ si ottiene:

$$L = [24.02 \quad 188.53 \quad -200.85 \quad 483.49 \quad -72.19]^T .$$

Il compensatore basato sul regolatore appena progettato ha dinamica $K(sI - A_e + B_e K + LC_e)^{-1}L$, e si costruisce con il comando `rsys = ss(Ae-Be*K-L*Ce,L,K,0)` ovvero, a meno di un segno, con `rsys = reg(Syse,K,L)`, ove `Syse = ss(Ae,Be,Ce,0)`.

In figura 2 è riportato lo schema `Simulink` utilizzato per la simulazione mentre in figura 3 è riportato l'andamento del controllo τ e della posizione x della massa.

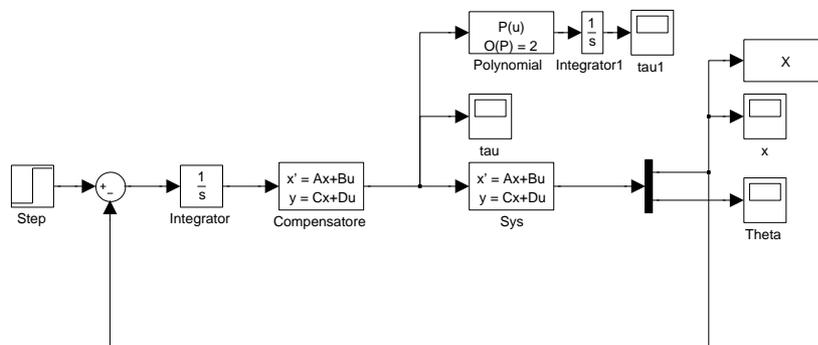


Figura 2: Schema `Simulink` del sistema tempo continuo chiuso in retroazione con il compensatore basato su regolatore al quale viene applicato come riferimento un gradino di ampiezza 0.5 m.

E Supponendo di conoscere il modello del sistema, e che questo sia completamente raggiungibile, è possibile trovare una legge di controllo $\tilde{\tau}(t)$, $0 \leq t \leq T$ capace di portare il sistema da una qualsiasi condizione iniziale q_o ad una finale q_s in un tempo T arbitrariamente breve. Per calcolare i valori di questo controllo, è conveniente comunque approssimare il sistema tempo continuo con un modello tempo discreto. Come suggerito anche nel testo, si può procedere quindi restringendo la scelta dell'ingresso $\tilde{\tau}(t)$ ad una funzione costante a tratti, su intervalli di lunghezza T_s .

e1) Procediamo dunque a trovare un modello tempo discreto che approssimi il comportamento del vero sistema soggetto a questo tipo di ingresso. Una possibile strada consiste nell'applicazione della tecnica di discretizzazione detta di "Eulero in avanti". Le matrici del sistema discretizzato assumono in tal caso la seguente forma:

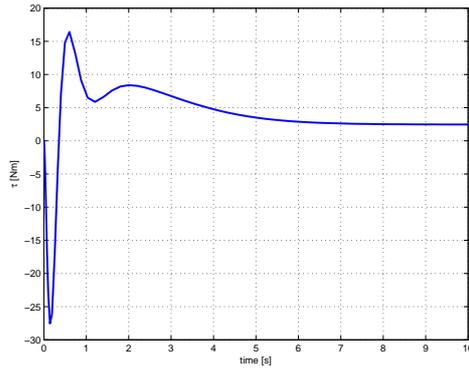
$$A_d = I + AT_s, \quad B_d = BT_s .$$

Una legge di controllo "pre-pianificata" in grado di far raggiungere al sistema un arbitrario stato finale q_s può essere trovata sul sistema tempo discreto se la completa raggiungibilità del sistema è conservata in questo passaggio (questa proprietà non è detto che si conservi, e deve quindi essere verificata), e se la sequenza è lunga almeno quanto la dimensione dello spazio di stato.

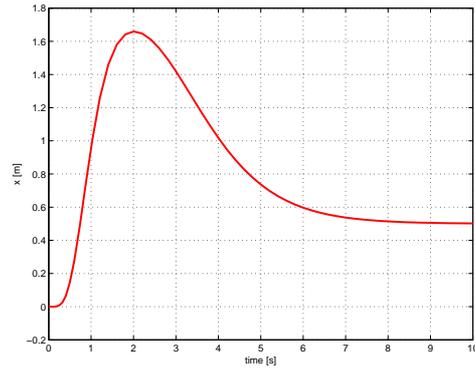
Se il sistema a tempo discreto risulta completamente raggiungibile, il minimo valore che garantisce una soluzione è $N = 4$. In tal caso, la sequenza di ingresso è data da

$$\tilde{\tau}_4 = R_4^{-1} q_s .$$

Per generare questa sequenza si può utilizzare il seguente codice `Matlab`:



(a) Andamento del segnale di controllo τ in ingresso al sistema.



(b) Andamento dell'uscita x relativa alla posizione della massa m .

Figura 3: Andamento del controllo e dell'uscita x ottenute con lo schema simulink di figura 2

```

Ts = 0.1; % Tempo di campionamento.
N = 4; % Numero di passi.

% Condizioni iniziali.
Xo = [0 0 0 0] ;
% Condizioni finali.
Xf = [.5 0 0 0] ;

% Orizzonte temporale.
T = Ts * N;

% Eulero in avanti.
Ad = eye(4) + As * Ts;
Bd = Ts * Bs(:, 2);

% Matrice Raggiungibilita in N passi.
R_N = Bd;
for k = 2:N
    R_N = [R_N Ad R_N(:, k-1)];
end
% Sequenza ottima.
u_N = pinv(R_N) * (Xf - Ad^N * Xo);
% Sequenza per blocco From Workspace di Simulink
usimulink_4 = [Ts (0:length(u_N)-1) flipud(u_N)];

% Costo del controllo.
J = sum(u_N.^2);

```

Si noti che il codice riportato può essere applicato anche per valori di N maggiori di 4 (in questo caso, la soluzione per il controllo non è unica, e l'utilizzo della funzione pseudoinversa `pinv` restituisce il controllo a minima norma euclidea).

Le simulazioni del sistema tempo discreto con la sequenza di controllo ottenuta in questo modo è stata effettuata con lo schema Simulink riportato in figura 4. Le figure 5(a) e 5(b) mostrano il controllo e la posizione della massa m per un tempo $T_s = 0.5$ s, rispettivamente. Si noti come nella figura 5 la posizione della massa rimane invariata sino al quarto passo di campionamento, nonostante l'ingresso di controllo assuma già dal primo intervallo di tempo valori diversi da zero: il motivo di tale comportamento sta nel grado relativo del sistema. Essendo esso pari a 4, ritarda l'effetto dell'ingresso sull'uscita di $N = 4$ passi. Questa caratteristica si mantiene nel modello tempo discreto ricavato con il metodo "Eulero in avanti".

- e2)** Le figure 5(c) e 5(d) mostrano il controllo e la posizione della massa m per un tempo di campionamento 5 volte inferiore rispetto al quello adottato per il punto e1), ovvero $T_s = 0.1$ s. Al diminuire del tempo di campionamento, fermo restando il numero di passi $N = 4$, il costo del controllo $J = \sum \tilde{\tau}^2$ richiesta dal controllo per realizzare il compito è via via crescente, e per il caso studiato passa da $J = 3.06$ per $T_s = 0.5$ s a $J = 6.32 \cdot 10^6$ per $T_s = 0.1$ s. Infatti, la riduzione del tempo di campionamento a parità di passi $N = 4$ ha contemporaneamente ridotto il tempo richiesto per svolgere il compito e perciò un controllo più energetico.
- e3)** Poiché il compito richiesto consiste nel portare il cilindro di massa m nella configurazione q_s e che vi rimanga indefinitivamente, è necessario che il motore riesca a sviluppare almeno la coppia necessaria a mantenere il sistema in tale configurazione. Tuttavia, in relazione al tempo di

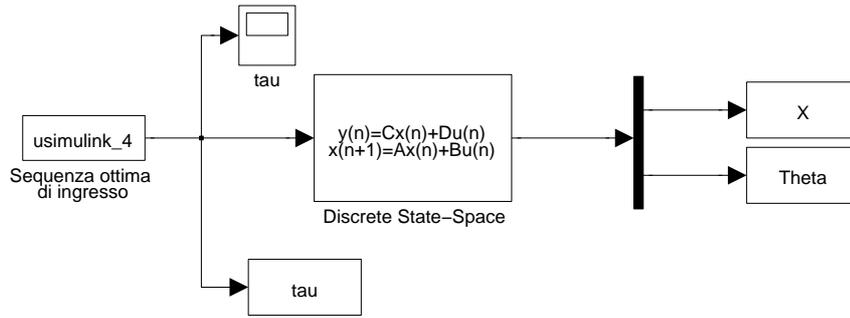
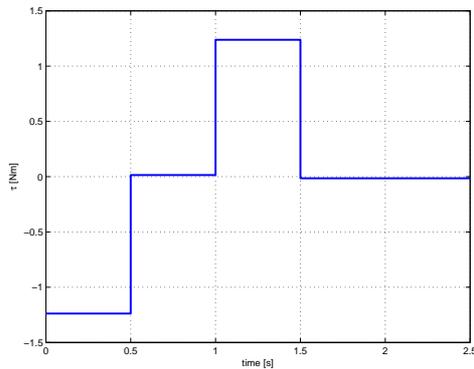
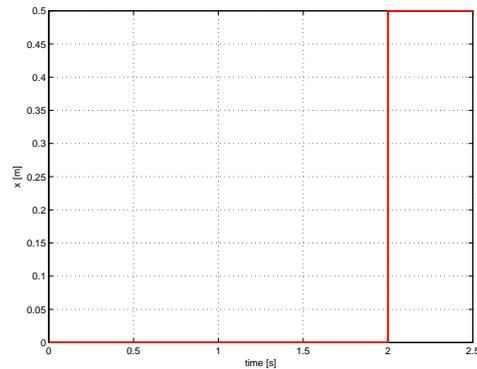


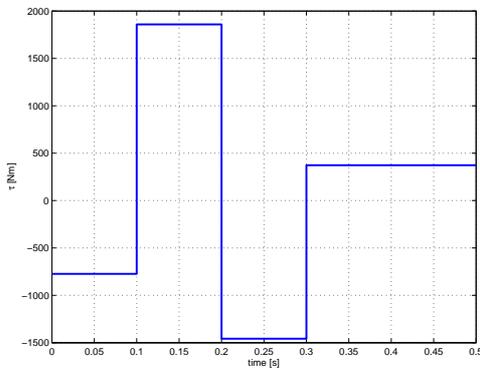
Figura 4: Schema Simulink adottato per la simulazione del sistema tempo discreto con la sequenza di controllo calcolata al punto e1).



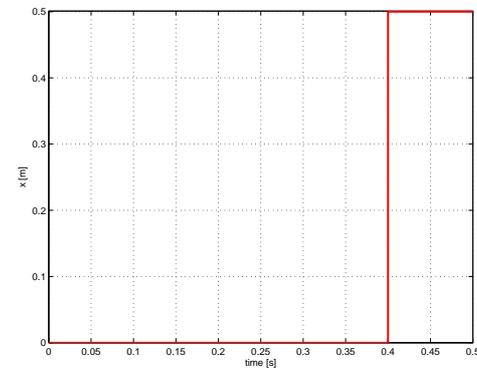
(a) Sequenza ottima dei valori di coppia τ per $T_s = 0.5$ s. Costo richiesto per il controllo $J = 3.06$.



(b) Sequenza delle posizioni x assunte dalla massa m per $T_s = 0.5$ s.



(c) Sequenza ottima dei valori di coppia τ per $T_s = 0.1$ s. Costo richiesto per il controllo $J = 6.32 \cdot 10^6$.



(d) Sequenza delle posizioni x assunte dalla massa m per $T_s = 0.1$ s.

Figura 5: Sequenza di controlli con relativo costo e andamento della posizione x della massa m per due diversi valori di T_s .

campionamento scelto, durante la fase transitoria, potrebbe essere necessaria applicare coppie τ maggiori di quella strettamente necessaria al mantenimento della configurazione statica q_s . Il valore τ^* sarà perciò scelto successivamente in fase di determinazione della sequenza ottima. Se il valore superiore di τ^* fosse assegnato a priori, si potrebbe determinare una sequenza di controllo in grado di rispettare le specifiche del motore ad esempio, ad esempio procedendo per tentativi, fissando il tempo di campionamento e aumentando via via il numero di passi fino a che il valore assunto dalla coppia di controllo in corrispondenza di ciascun intervallo non assume un valore assoluto inferiore a τ^* N m. Essendo nel problema posto τ^* un parametro libero di progetto, esso potrà invece essere scelto a posteriori sulla base del massimo tra i valori

richiesti dal controllo programmato per un certo profilo temporale: considerazioni economiche sul costo del motore potranno poi indicare l'opportunità di ridurre le prestazioni temporali per poter ridurre la taglia del motore stesso.

Poichè viene richiesto che il sistema tempo continuo raggiunga esattamente la posizione desiderata q_s , è necessario adottare metodi di approssimazione più precisi di quello detto "Eulero in avanti". In particolare, utilizzando ingressi costanti a tratti, è possibile utilizzare la formula di discretizzazione di Zero Order Hold (ZOH) che produce valori esatti ad ogni multiplo del tempo di campionamento, e quindi anche al tempo T per il quale il sistema raggiunge la configurazione desiderata. Le matrici del sistema discretizzato possono essere facilmente calcolate utilizzando la formula

$$\exp\left(\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T_s\right) = \begin{bmatrix} A_z & B_z \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

dove A e B sono le matrici relative al sistema linearizzato mentre A_z e B_z sono le matrici del sistema discretizzato con la tecnica ZOH.

Infine viene richiesto che il sistema tempo continuo una volta raggiunta la configurazione desiderata vi rimanga per un tempo indefinito. Per soddisfare ad un tale requisito, si può procedere imponendo che il valore dello stato al passo N coincida con quello al passo $N - 1$, ovvero pari al valore desiderato x_f (si vedano le dispense per una motivazione di questo). Ovviamente, il vincolo imposto sulla coppia nell'intervallo finale della sequenza non garantisce più una soluzione con $N = 4$ passi, servendone almeno 5. Di seguito è riportato il codice Matlab in grado di determinare una sequenza di controlli che rispetta tutti i requisiti richiesti.

```

Ts = 0.5; % Tempo di campionamento.
N_i = 5; % Numero di passi minimo per realizzare il compito.

% Condizioni iniziali.
Xo = [0 0 0 0] ;
% Condizioni finali.
Xf = [0.5 0 0 0] ;

% Orizzonte temporale.
T = Ts * N;

% Sistem tempo discreto con tecnica ZOH.
n = size(As,1); % Dimensione del sistema tempo continuo.
MM = expm([As Bs; zeros(1,n+1)] Ts);
Az = MM(1:n,1:n); % Matrice dinamica TD.
Bz = MM(1:n,n+1); % Matrice ingressi TD.

Stop = 0; % Variabile di stop
N = N_i; % Inizializzazione numero passi.
while Stop == 0
% Calcolo matrice Raggiungibilita in N passi.
R_N = Bz;
for k = 2:N
R_N = [R_N Az R_N(:,k-1)];
end

%% Calcolo della sequenza di controllo.
RR = [zeros(size(Bz)), R_N; R_N, Az R_N(:,N)];
u_N = pinv(RR) [(Xf-Az^(N-1) Xo); (Xf-Az^N Xo)];

% Verifica del vincolo sul controllo.
a = sum(abs(u_N) > 3.5);
if a > 0
N = N+1; % Obiettivo non raggiunto: aumenta di uno il numero di passi.
elseif a == 0
Stop = 1; % Obiettivo raggiunto: termina l'esecuzione del ciclo while.
end
end
usimulinkN = [Ts (0:length(u_N)-1) flipud(u_N)];

```

Sulla base del tempo di campionamento scelto, ovvero $T_s = 0.5$ s, il valore di coppia τ^* in grado di portare il sistema nella configurazione desiderata mantenendola per un tempo indefinito è pari a $\tau^* = 3.5$ N m. Con tale scelta il numero di passi minimo N che permette di soddisfare anche la specifica sul valore di coppia massima che il motore è in grado di generare è pari a 6. In figura 7 sono riportati la sequenza di controllo e gli andamenti della posizione della massa m ottenuti simulando il sistema tempo continuo con lo schema Simulink di figura 6. Come si può notare, tutti i requisiti sono soddisfatti al tempo $N * T_s = 3$, orizzonte della pianificazione, e sono mantenuti fino circa al tempo 10. Si osserva anche che, per tempi di simulazione più lunghi, il sistema tempo continuo si allontana dall'equilibrio desiderato e diverge. Questo

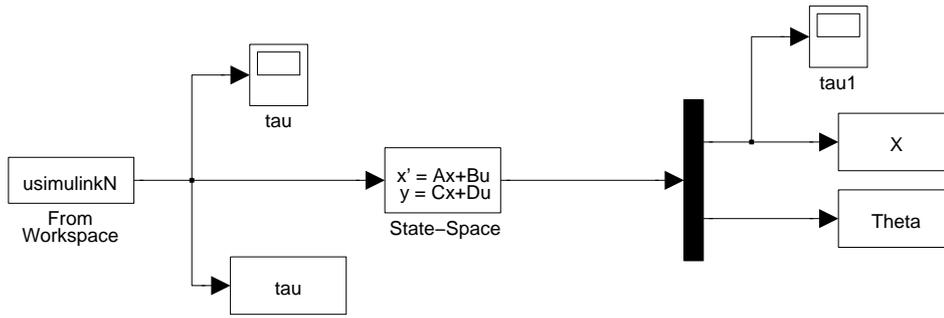
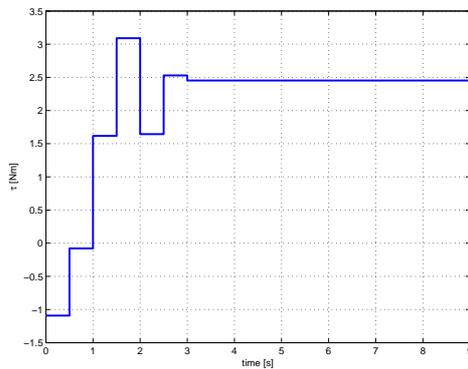
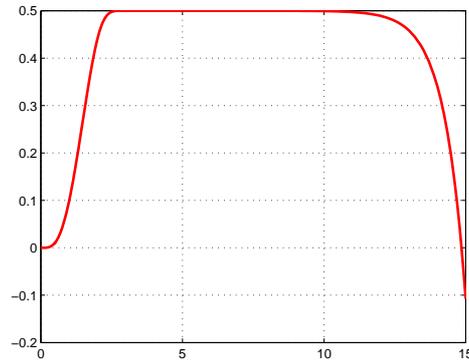


Figura 6: Schema Simulink adottato per la simulazione del sistema tempo continuo con la sequenza di controllo calcolata al punto e3).



(a) Sequenza ottima dei valori di coppia τ .



(b) Sequenza delle posizioni x assunte dalla massa m .

Figura 7: Sequenza di controllo e posizione della massa con numero di passi tale da garantire il vincolo sulla coppia massima.

comportamento può essere interpretato come l'effetto dei piccoli errori numerici che causano una leggera discrepanza tra il modello ZOH ed il sistema reale, la quale, a causa della instabilità del sistema in anello aperto, porta alla divergenza. Questo fenomeno indica che la soluzione di avere il solo controllo in feed-forward non è chiaramente accettabile.

F Utilizzando lo schema Simulink rappresentato in figura 8, è stata effettuata una simulazione utilizzando come riferimento per l'uscita del sistema TC da controllare, l'uscita nominale ottenuta applicando la sequenza di controllo ottimo τ calcolata al punto e3) al modello di riferimento con condizioni iniziali di equilibrio. Inoltre, come si nota nello schema di figura, tra il compensatore e il sistema è sommata la stessa sequenza ottima τ . In figura 9 sono riportati gli andamenti del valore del controllo totale (somma del termine di feedforward e di feedback) e dell'uscita del sistema TC.

Per confrontare i risultati dei diversi schemi, si può valutare il costo del controllo secondo la formula

$$J(u) = \int_0^{T_f} u(t)^2 dt.$$

che è valutata direttamente negli schemi Simulink di fig. 2 e fig. ???. In assenza di feedforward, applicando direttamente come riferimento il gradino di ampiezza 0.5 (fig. 2), il costo del controllo per un tempo $T_f = 15s$ è $J = 445N^2m^2s$. Se si utilizza il feedforward, il costo del controllo sullo stesso orizzonte temporale è pari a $J = 101N^2m^2s$. Il costo potrebbe essere ulteriormente ridotto raffinando il tempo di campionamento T_s del modello discretizzato, o ancora semplicemente usando versioni interpolate delle sequenze discrete di pianificazione del controllo e dello stato (in quest'ultimo caso, si ottiene $J = 87N^2m^2s$).

Esercizio 2. La derivata direzionale di $V(\mathbf{x})$ lungo le traiettorie del sistema è identicamente nulla per qualsiasi valore di \mathbf{x} , cioè $\dot{V}(\mathbf{x}) = 0, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$. Si può quindi concludere sulla stabilità

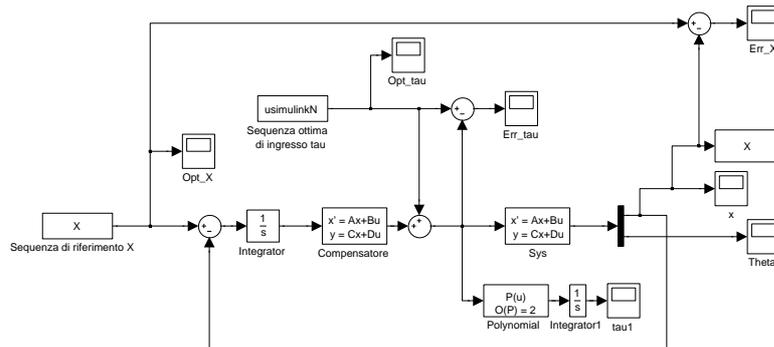
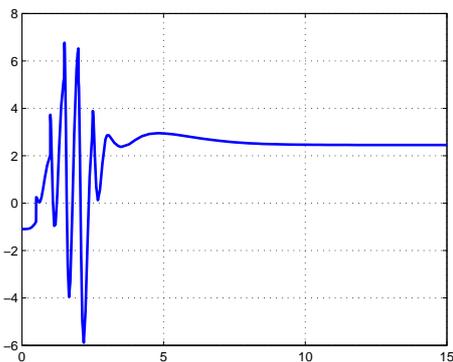
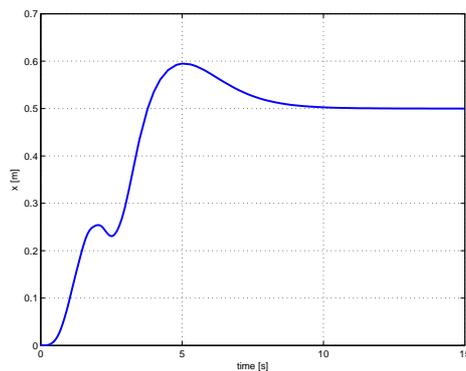


Figura 8: Schema Simulink del sistema TC in retroazione con il compensatore, con iniezione in feed-forward del controllo pianificato, e con riferimento corrispondente.



(a) Andamento del segnale di controllo ottenuto sommando il termine di feedforward a quello di feedback.



(b) Andamento della posizione x della massa utilizzando la somma delle azioni in feedforward e feedback e, come riferimento, la traiettoria generata dalla simulazione del sistema tempo discreto con la sequenza di controllo ottima.

Figura 9: Andamento della posizione x della massa m con riferimento di posizione e feedforward della sequenza di controllo ottima.

del sistema. In questo caso si può anche escludere la asintotica stabilità del sistema. Infatti le traiettorie del sistema sono confinate nelle curve di livello della $V(\mathbf{x})$: se il sistema è inizializzato in una condizione tale da avere $V(\mathbf{x}) = c$, essendo $\dot{V}(\mathbf{x}) \equiv 0$, allora $V(\mathbf{x}(t)) \equiv c$. Si osservi infine che, non essendo la $V(x)$ radialmente illimitata, non si può garantire che le sue curve di livello siano chiuse, e non si può quindi escludere la divergenza delle traiettorie per condizioni iniziali non sufficientemente vicine all'origine. Questo è in effetti il caso, come si può osservare dalla fig. 10 in cui è mostrato il grafico dello spazio delle fasi con l'andamento di alcune traiettorie del sistema.

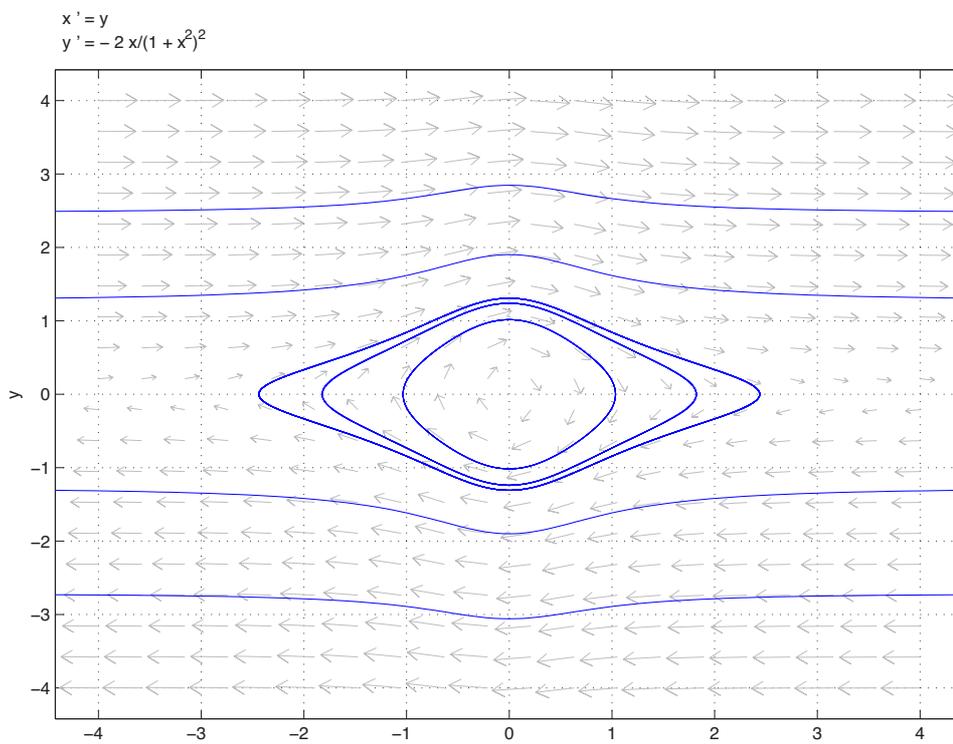


Figura 10: Grafico dello spazio delle fasi e traiettoria del sistema di cui all'esercizio 3 per differenti condizioni iniziali.