

Esercizio A.

Si consideri il sistema dinamico costituito da una mongolfiera rappresentata in figura 1. Il sistema, soggetto alla forza peso ed ad eventuali correnti d'aria ascendenti o discendenti, è attuato per mezzo di un bruciatore che, riscaldando l'aria all'interno del pallone, permette alla mongolfiera di sollevarsi in verticale.

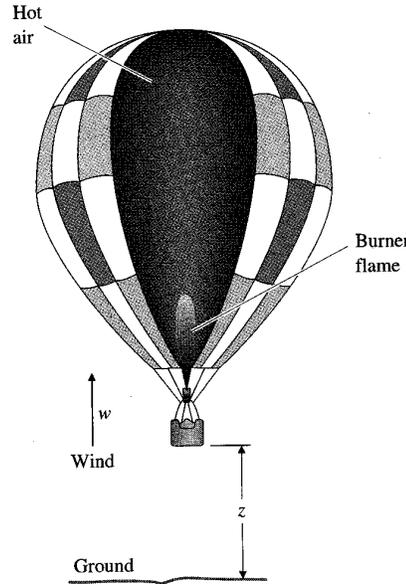


Figura 1: Mongolfiera.

Le equazioni che descrivono la dinamica del moto verticale della mongolfiera sono

$$\begin{cases} m \ddot{z} + b \dot{z} = -m g + V g \rho_a \left(1 - \frac{T_a}{T} \right) + w \\ C \dot{T} + K(T - T_a) = Q \end{cases}$$

dove z rappresenta la posizione verticale della mongolfiera rispetto al suolo, m la sua massa, b il coefficiente di attrito viscoso equivalente (utilizzato per modellare la resistenza dell'aria), g l'accelerazione di gravità, V il volume di aria contenuto nel pallone, w la forza esercitata dalle correnti d'aria, ρ_a la densità dell'aria alle condizioni ambientali di temperatura T_a e pressione 1 atm, T la temperatura dell'aria all'interno del pallone, C la capacità termica dell'aria, K il coefficiente di scambio termico tra pallone e ambiente e Q la potenza termica fornita dal bruciatore.

A.1 Si determini l'equilibrio del sistema per $w = \bar{w} = 0$ e una rappresentazione in forma di stato del sistema linearizzato intorno a tale equilibrio. Si assuma come ingresso di controllo la potenza termica Q fornita dal bruciatore ($u = Q$).

A.2 Si discutano la osservabilità e la detettabilità del sistema linearizzato calcolato al punto precedente al variare dei parametri del sistema, assumendo $g \neq 0$. Si consideri alternativamente la quota z o la temperatura T dell'aria interna al pallone come uscite del sistema.

Si considerino adesso i seguenti valori numerici: $m = 400$ Kg; $b = 15$ Ns/m; $g = 9.81$ m/s²; $V = 1500$ m³; $\rho_a = 1.2$ Kg/m³; $T_a = 298$ K; $C = 718$ J/K; $K = 2$ W/K.

A.3 Si progetti un compensatore basato su regolatore, che, per mezzo dell'ingresso Q ed usando la misura dell'uscita z , sia in grado di stabilizzare asintoticamente la quota z del sistema linearizzato nell'intorno dell'equilibrio, garantendo le seguenti specifiche:

- errore nullo a regime per disturbi costanti dovuti alle correnti d'aria w ;
- tempo di assestamento al 5% inferiore a 3 s.

A.4 Si realizzi in ambiente `Matlab/Simulink` una simulazione del sistema linearizzato chiuso in anello con il compensatore progettato al passo precedente, verificando il soddisfacimento delle specifiche.

A.5 Si effettui una simulazione del sistema originale chiuso in anello con il compensatore progettato, realizzando separatamente la dinamica non lineare del sistema di partenza.

Esercizio B.

Si consideri il seguente sistema non lineare

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_2^2 - x_1^3 - x_1 \\ \dot{x}_2 = -2x_1^3x_2 + u. \end{cases}$$

B.1 Si studi la stabilità del sistema autonomo ($u = 0$) nell'origine utilizzando il criterio indiretto di Lyapunov. Qualora fosse necessario si utilizzi la funzione candidata di Lyapunov $V(x_1, x_2) = x_1^4 + 2x_2^2$;

B.2 Imponendo $u = k_1x_1 + k_2x_2$ si determini per quali valori non nulli dei guadagni k_1 e k_2 l'origine è un punto di equilibrio asintoticamente stabile.

Soluzione

Esercizio A

A.1 Sostituendo $w = \bar{w} = 0$ nella dinamica del sistema e imponendo le condizioni di equilibrio, ovvero $\dot{z} = \dot{\bar{z}} = \dot{T} = 0$, si ottiene

$$\bar{T} = \frac{V\rho_a T_a}{V\rho_a - m}$$

$$\bar{Q} = K(\bar{T} - T_a) = \frac{m K T_a}{V\rho_a - m}.$$

con \bar{z} costante qualsiasi.

Indicando con $\tilde{x} = [\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3]^T = [z - \bar{z}, \dot{z}, T - \bar{T}]^T$ e con $\tilde{u} = Q - \bar{Q}$ lo stato e l'ingresso traslato nell'equilibrio, e con $d = w$ il disturbo relativo alle correnti d'aria, il sistema in forma di stato nonlineare traslato nell'equilibrio è dato da:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_1 = \tilde{x}_2 \\ \dot{\tilde{x}}_2 = -\frac{b}{m}\tilde{x}_2 + \frac{Vg\rho_a}{m}\left(1 - \frac{T_a}{\tilde{x}_3 + \bar{T}}\right) - g + \frac{d}{m} \\ \dot{\tilde{x}}_3 = -\frac{K}{C}(\tilde{x}_3 + \bar{T} - T_a) + \frac{\tilde{u} + \bar{Q}}{C}. \end{cases} \quad (1)$$

Linearizzando attorno al punto di equilibrio delle nuove variabili di stato \tilde{x} , ovvero l'origine, si ottiene

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + B_u\tilde{u} + B_d d = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{b}{m} & \frac{g(V\rho_a - m)^2}{mV\rho_a T_a} \\ 0 & 0 & -\frac{K}{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{C} \end{bmatrix} \tilde{u} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \\ 0 \end{bmatrix} d.$$

A.2 Considerando la quota z come uscita del sistema, ovvero la variabile di stato \tilde{x}_1 nelle nuove coordinate, la matrice delle uscite è

$$C_z = [1 \quad 0 \quad 0].$$

La matrice di osservabilità è

$$O_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{b}{m} & \frac{g(V\rho_a - m)^2}{mV\rho_a T_a} \end{bmatrix},$$

il cui determinante $\det(O_z) = \frac{g(V\rho_a - m)^2}{mV\rho_a T_a}$. Assumendo che tutti i parametri siano diversi da zero, si può concludere sulla completa osservabilità del sistema a partire dalla misura della quota z se la condizione $m = V\rho_a$ non è soddisfatta. Nel caso in cui invece $m = V\rho_a$, la matrice di osservabilità O_z perde di rango ed il sistema non risulterebbe completamente osservabile. Poichè $\text{Ker}(O_z) = [0, 0, 1]^T$, lo stato non osservabile è la temperatura T dell'aria interna al pallone. Ponendo $m = V\rho_a$ nella matrice dinamica A del sistema linearizzato, ed osservando che essa è già posta nella forma standard di osservabilità, si può concludere sulla detettabilità del sistema, in quanto l'unico autovalore associato al sottosistema non osservabile è pari a $-K/C$ a cui corrisponde un modo esponenzialmente convergente.

Se invece l'uscita del sistema è la temperatura T dell'aria all'interno del pallone, ovvero \tilde{x}_3 nelle nuove coordinate, allora

$$C_T = [0 \quad 0 \quad 1].$$

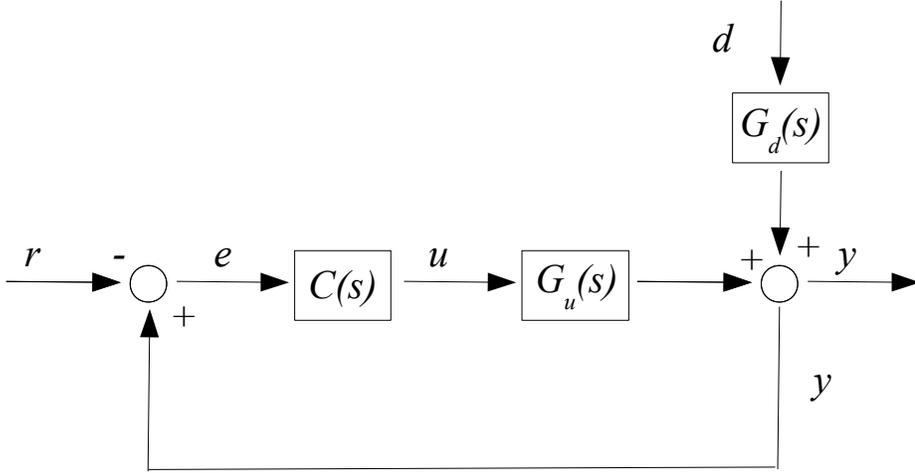


Figura 2: Diagramma a blocchi del sistema.

La matrice di osservabilità è

$$O_z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{K}{C} \\ 0 & 0 & \frac{K^2}{C^2} \end{bmatrix}.$$

In tal caso il sistema non è completamente osservabile indipendentemente dai valori assunti dai parametri. Assumendo comunque che tutti i parametri siano non nulli, il rango della matrice O_T è pari ad 1. Poichè

$$\text{Ker}(O_T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

si conclude che le variabili di stato non osservabili sono la quota z e la velocità di salita/discesa verticale \dot{z} . La matrice dinamica associata al sottosistema non osservabile è

$$A_{\bar{O}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{b}{m} \end{bmatrix}$$

la quale possiede un autovalore nullo, rendendo quindi il sistema non detettabile.

A.3 Si consideri lo schema a blocchi di figura 2 relativo al sistema chiuso in retroazione con il compensatore $C(s)$ da progettare montato in catena diretta. Assumendo $u = Q$ e $y = z$, le f.d.t. $G_u(s)$ e $G_d(s)$ sono

$$G_u(s) = \frac{0.000125}{s(s + 0.0375)(s + 0.002786)}$$

$$G_d(s) = \frac{0.0025}{s(s + 0.0375)}.$$

La prima specifica richiede un errore nullo per disturbi d costanti. Applicando il teorema del valore finale possiamo determinare se è necessario inserire poli nell'origine nel controllore posto in catena diretta. Si noti che sia $G_u(s)$ che $G_d(s)$ possiedono già un polo nell'origine.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} -s \frac{G_d(s)}{1 + C(s)G_d(s)} \frac{\bar{w}}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} -\frac{s^t \bar{G}_d(s)}{s^{t+1} + C_o(s) \bar{G}_d(s)} \bar{w}$$

dove $\bar{G}_u(s)$ e $\bar{G}_d(s)$ sono le f.d.t. omonime private dei poli nell'origine (per il controllore si assume un prototipo del tipo $C_o(s)/s^t$, con $C_o(0) \geq 1$). Affinchè l'errore a regime sia nullo per ingressi costanti è necessario inserire un polo nell'origine nel controllore ($t = 1$).

La seconda specifica riguarda il tempo di assestamento al 5%. Affinchè sia minore di 3 s, e assumendo che il controllore progettato sia tale per cui il sistema complessivo chiuso in retroazione sia ben

approssimabile con un sistema ad un polo dominante, è necessario che il polo più lento, ovvero quello dominante, abbia una parte reale in modulo non inferiore a circa $3/T_a = 1$. Ovviamente, poichè non è stata data nessuna indicazione sulla sovraelongazione, si potrebbe optare anche per il progetto di un controllore tale per cui il sistema complessivo chiuso in retroazione sia ben approssimabile con un sistema a due poli dominanti (complessi coniugati). Avendo libera scelta sullo smorzamento, si può assumere $\delta = 0.45$, ottenendo

$$\omega_n \approx \frac{1}{\delta} = 2.22 \text{ rad/s},$$

da cui, si ottiene che la parte reale dei poli (dominanti) complessi e coniugati deve essere in modulo non inferiore a $\delta\omega_n = 1$, analogamente a quanto ottenuto sopra.

Ai fini del progetto del regolatore, analizziamo numericamente le proprietà di raggiungibilità e osservabilità del sistema con ingresso u e uscita di misura z . A tal fine, si può procedere come di consueto calcolando numericamente le matrici di raggiungibilità ed osservabilità e valutandone il rango che in tal caso risulta pari a 3.

La specifica sull'errore a regime nullo comporta l'inserimento di un polo nell'origine, nonostante il sistema ne possieda già uno. Tenendo in considerazione anche la specifica sul tempo di assestamento, scegliamo di allocare i poli del sistema in $p = [-2, -4, -5, -6]^T$. Una procedura per ottenere il compensatore basato su regolatore consiste nel calcolare preliminarmente la matrice K di retroazione degli stati in modo da allocare i poli della matrice $A_e - B_e K$ in p , dove A_e e B_e sono le matrici del sistema esteso, ottenuto aggiungendo il polo nell'origine necessario per rispettare la specifica sull'errore a regime. Utilizzando la funzione di **Matlab** $K = \text{place}(A_e, B_e, p)$, si ottiene:

$$K = 10^6 [3.07 \quad 3.2 \quad 1.11 \quad 0.014] .$$

Poichè non si ha accesso a tutte le variabili di stato ma il sistema risulta completamente osservabile, si può realizzare un osservatore di Luenberger per ricostruire lo stato. La matrice L di iniezione delle uscite è calcolata in modo che la matrice dinamica dello stimatore $A_e - LC_e$, dove C_e è la matrice delle uscite del sistema esteso, abbia autovalori in $q = 2p$. Sempre impiegando il comando **Matlab** $L = \text{transpose}(\text{place}(A_e', C_e', q))$ si ottiene:

$$L = 10^4 [0.004 \quad 0.056 \quad 0.32 \quad 6.84]^T .$$

Il compensatore basato sul regolatore appena progettato ha dinamica $K(sI - A_e + B_e K + LC_e)^{-1}L$, e si costruisce con il comando `rsys = ss(Ae-Be*K-L*Ce,L,K,0)` ovvero, a meno di un segno, con `rsys = reg(Syse,K,L)`, ove `Syse = ss(Ae,Be,Ce,0)`. La sequenza di comandi **Matlab** necessari allo scopo è la seguente:

```
integrator = ss(1/tf('s'));
sys_esteso = integrator * ss(As,Bsu,Cs,0);
p = [-2 -4 -6 -8];
K = place(sys_esteso.a, sys_esteso.b, p);
q = 2*p;
L = place(sys_esteso.a', sys_esteso.c', q)';
rsys = -reg(sys_esteso, K, L);
kreg = rsys.c * inv(-rsys.a) * rsys.b;
```

Infine, la funzione di trasferimento complessiva del sistema così realizzato è

$$Gc(s) = \frac{0.00012481(s^2 + 47.12s + 633.6)(s^2 + 12.84s + 259)}{(s + 16)(s + 12)(s + 8)^2(s + 6)(s + 4)^2(s + 2)}$$

che, come si può notare, possiede sia i poli del controllore, allocati con la scelta della matrice di retroazione K sia quelli dello stimatore allocati con la matrice di iniezione delle uscite L . Gli zeri invece non sono altro che l'insieme costituito dagli zeri del sistema e gli zeri del controllore.

A.4 Uno schema **Simulink** per la simulazione del sistema linearizzato nell'origine con il compensatore basato sul regolatore progettato al punto precedente, è riportato in figura 3.

In figura 4 è riportato l'andamento dell'uscita z a partire dalle condizioni iniziali $\tilde{x}(0) = [2, 0, 0]^T$ (a sinistra) e per effetto di un disturbo dovuto alle correnti d'aria costante che agisce all'istante $t = 1$ s e di ampiezza pari a 20 (s destra). Come si può facilmente osservare, le specifiche di progetto sono ampiamente rispettate.

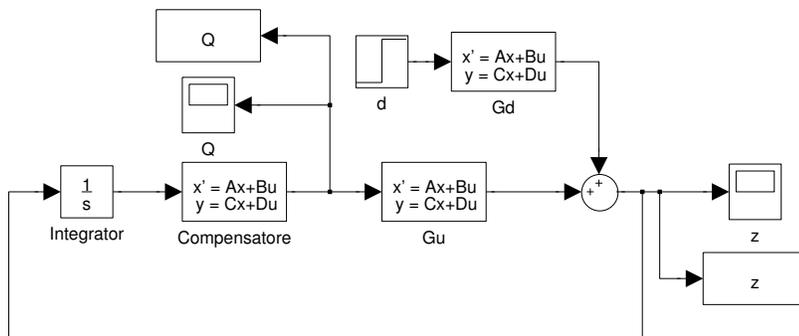


Figura 3: Montaggio del compensatore in catena diretta.

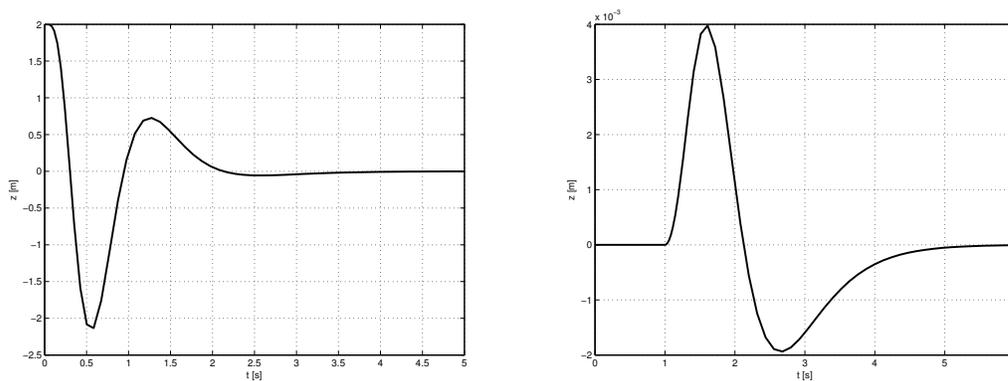


Figura 4: Andamenti delle variabile z con schema di montaggio riportato in figura 3 a partire dalle condizioni iniziali $\tilde{x}(0) = [2, 0, 0]^T$ (a sinistra) e per effetto di un disturbo dovuto alle correnti d'aria costante che agisce all'istante $t = 1$ s e di ampiezza pari a 20 (a destra).

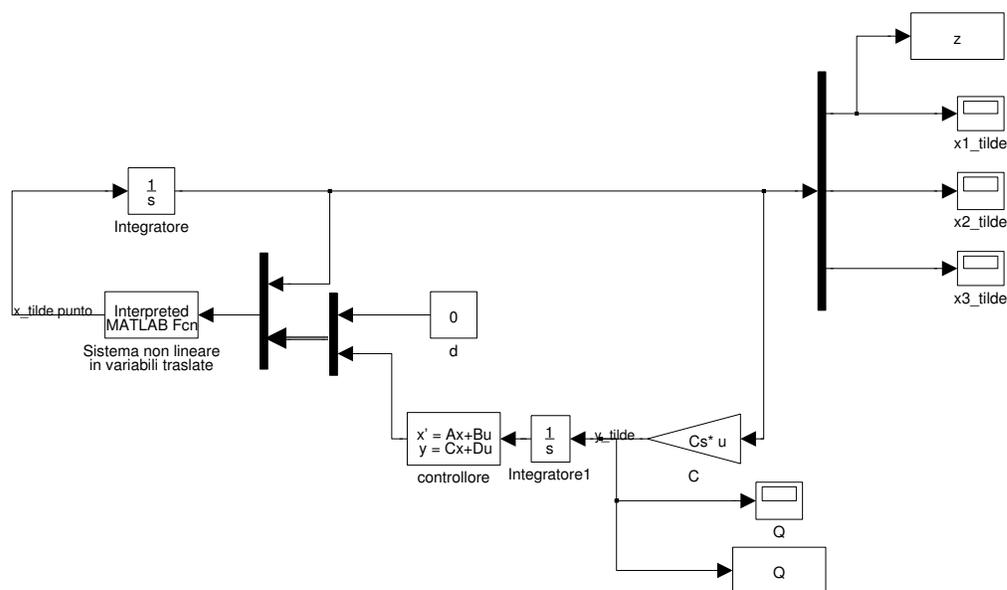


Figura 5: Montaggio del compensatore con il sistema non lineare.

A.5 In figura 5 è riportato lo schema *Simulink* dove il compensatore è connesso con il sistema non lineare di partenza. In figura 6 è riportato l'andamento della variabile di uscita z corrispondente alla condizione iniziale $\tilde{x}(0) = [0.5, 0, 0]^T$.

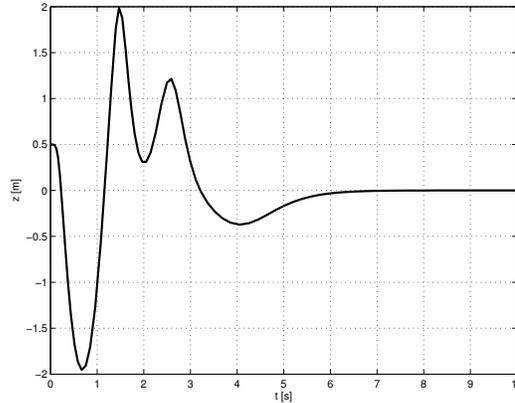


Figura 6: Andamenti delle variabile z con schema di montaggio riportato in figura 5 a partire dalle condizioni iniziali $\tilde{x}(0) = [0.5, 0, 0]^T$.

Esercizio B

B.1 L'origine è un punto di equilibrio per il sistema. La matrice dinamica del sistema linearizzato attorno all'origine è

$$A(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} -3x_1^2 - 1 & 4x_2 \\ -6x_1^2 x_2 & -2x_1^3 \end{bmatrix} \Big|_{(0,0)} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Poichè uno degli autovalori è sull'asse immaginario, il metodo indiretto di Lyapunov non è in grado di concludere nulla circa le proprietà di stabilità dell'equilibrio in questione. Se si utilizza la funzione candidata di Lyapunov suggerita nel testo $V(x_1, x_2) = x_1^4 + 2x_2^2$ si ottiene:

$$\dot{V}(x_1, x_2) = -4x_1^4(1 + x_1^2) \neq 0.$$

Essendo \dot{V} semidefinita negativa si può concludere che il sistema è almeno stabile nell'intorno dell'origine. Si osservi che $V(x_1, x_2)$ è radialmente limitata e le sue curve di livello sono chiuse ovunque. Si consideri quindi l'insieme $\Omega_\ell = \{x = (x_1, x_2) | V(x_1, x_2) < \ell\}$, ovvero l'insieme delimitato dalla curva chiusa $V(x_1, x_2) = \ell$, e si consideri l'insieme $R = \{x \in \Omega_\ell | \dot{V}(x_1, x_2) = 0\} = \{x \in \Omega_\ell | x_1 = 0, x_2 \in \mathbb{R}\}$. L'insieme invariante massimo in R si ottiene per sostituzione nelle equazioni differenziali del sistema non lineare, ottenendo che anche $x_2 = 0$. Qualsiasi traiettoria quindi che inizia in Ω_ℓ finisce nell'origine e quindi, per il teorema di LaSalle-Krasowskii si può affermare che l'origine è un punto di equilibrio A.S..

B.2 In presenza della retroazione $u = k_1 x_1 + k_2 x_2$, il sistema diventa

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_2^2 - x_1^3 - x_1 \\ \dot{x}_2 = -2x_1^3 x_2 + k_1 x_1 + k_2 x_2, \end{cases}$$

e la matrice dinamica del sistema linearizzato diviene:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ k_1 & k_2 \end{bmatrix}.$$

Per il metodo indiretto di Lyapunov l'origine è localmente asintoticamente stabile se $k_2 < 0$, e $\forall k_1 \in \mathbb{R}$.