

Esercizio A.

Si consideri il modello dinamico del sistema meccanico rappresentato in figura 1.

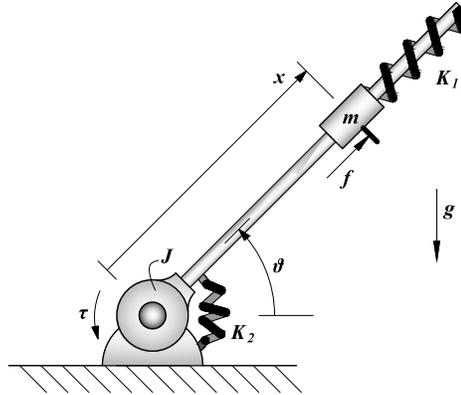


Figura 1: Sistema meccanico

Il sistema è composto da un cilindro di massa m che scorre su un'asta di lunghezza ℓ , rigidamente collegata ad un disco di inerzia J . Il disco è incernierato al telaio ed è soggetto ad una coppia di disturbo τ . L'accoppiamento cilindro-asta è caratterizzato da un coefficiente di attrito viscoso β_1 . Inoltre, sul cilindro agisce una forza f . Indicando con θ la posizione angolare dell'asta e con x , che può assumere solo valori positivi, la distanza del baricentro del cilindro rispetto al centro del disco (vedi figura 1), le equazioni che descrivono il comportamento dinamico del sistema sono:

$$m \ddot{x} = m x \dot{\theta}^2 - \beta_1 \dot{x} - m g \sin \theta + K_1 \left(\frac{\ell}{2} - x \right) - f$$

$$(J + m x^2) \ddot{\theta} = -2 m x \dot{x} \dot{\theta} - m g x \cos \theta - K_2 \theta + \tau.$$

- A.1** Si determini il valore della rigidezza K_2 tale per cui $\theta = \bar{\theta} = -\pi/3$ costituisca una posizione di equilibrio per l'asta con $f = \tau = 0$. Si determini inoltre la corrispondente posizione $x = \bar{x}$ della massa m .
- A.2** Supponendo di disporre della misura dell'angolo θ e di poter agire sulla forza f , si determini una rappresentazione in forma di stato del sistema linearizzato intorno all'equilibrio calcolato al punto precedente.

Si considerino i seguenti valori numerici: $J = 2 \text{ Kg m}^2 / \text{rad}$; $\beta_1 = 10 \text{ Kg/s}$; $m = 1 \text{ Kg}$; $K_1 = 10 \text{ N/m}$; $\ell = 5 \text{ m}$; $g = 9.81 \text{ m/s}^2$.

- A.3** Si determini la funzione di trasferimento tra l'ingresso $u_1 = f$ e l'uscita $y = \theta$ e quella tra il disturbo $u_2 = \tau$ e l'uscita $y = \theta$;
- A.4** Si determini una legge di controllo per f che agisca in modo da garantire che:
- A.4a)** partendo dalle condizioni di equilibrio, l'uscita $y = \theta$ che descrive la posizione angolare dell'asta raggiunga un valore pari a $-\pi/6$ senza mai superare un valore pari a $-8\pi/60$ entrando e mantenendosi nella fascia $-\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{300} \leq \theta \leq -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{300}$ entro un tempo non superiore a 100 ms ;
- A.4b)** supponendo che sul sistema agisca un disturbo costante $\tau = \bar{\tau}$ si garantisca che a regime l'effetto di tale disturbo sull'uscita sia completamente annullato.

Si disegni il diagramma a blocchi del sistema con il controllore progettato; si riporti esplicitamente il controllore ottenuto, il diagramma di Bode con le relative specifiche da rispettare e la risposta al gradino ottenuta con le caratteristiche significative.

- A.5** Si descrivano le istruzioni di un programma per elaboratore digitale che simuli la dinamica libera del sistema linearizzato partendo da condizioni di equilibrio con controllo $f = \bar{f}$ costante e disturbo $\tau = 0$. Si discuta sulla scelta del tempo di campionamento.

Esercizio B.

Si valuti la funzione di trasferimento tra l'uscita y e l'ingresso u e quella tra l'uscita y e il disturbo d relative al diagramma a blocchi rappresentato in figura 2.

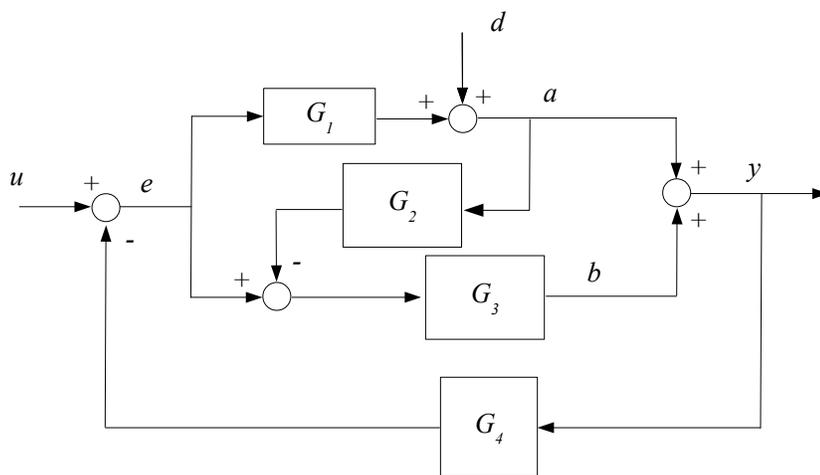


Figura 2: Diagramma a blocchi

Soluzione

Esercizio A.

A.1 Poichè l'equilibrio corrispondente al valore dell'ingresso $f = \bar{f} = 0$ costante, è caratterizzato da $\dot{x} = \dot{\theta} = \ddot{x} = \ddot{\theta} = 0$, sostituendo tali valori nelle equazioni della dinamica si ottiene

$$m g \sin \bar{\theta} - K_1 \left(\frac{\ell}{2} - \bar{x} \right) = 0 \quad (1)$$

$$m g \bar{x} \cos \bar{\theta} + K_2 \bar{\theta} = 0. \quad (2)$$

Dalla (2) otteniamo

$$\bar{x} = -\frac{K_2 \bar{\theta}}{m g \cos \bar{\theta}},$$

che, sostituito nella (1) permette di ottenere

$$m g \sin \bar{\theta} - \frac{K_1 \ell}{2} - \frac{K_1 K_2 \bar{\theta}}{m g \cos \bar{\theta}} = 0.$$

Quindi, poichè $\bar{\theta} \neq \pm \frac{\pi}{2}$, si può scrivere

$$m^2 g^2 \sin \bar{\theta} \cos \bar{\theta} - \frac{m g K_1 \ell}{2} \cos \bar{\theta} - K_1 K_2 \bar{\theta} = 0.$$

da cui, sostituendo il valore di $\bar{\theta}$ assegnato si ottiene:

$$K_2 = \frac{3m^2 g^2 \sqrt{3}}{4K_1 \pi} + \frac{3m g \ell}{4\pi}.$$

Infine, la posizione della massa m all'equilibrio corrispondente al valore K_2 calcolato precedentemente è

$$\bar{x} = \frac{2K_2 \pi}{3m g}.$$

A.2 Indicando con $\tilde{q} = [\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \tilde{q}_3, \tilde{q}_4]^T = [x - \bar{x}, \theta - \bar{\theta}, \dot{x}, \dot{\theta}]^T$ le variabili di stato traslate nell'equilibrio generico e con $\tilde{u} = [\tilde{u}_1, \tilde{u}_2]^T = [f, \tau]^T$ il vettore degli ingressi, il sistema non lineare scritto in forma di stato attorno al generico equilibrio $\bar{q} = [\bar{x}, \bar{\theta}, 0, 0]^T$ è dato da

$$\begin{cases} \dot{\tilde{q}}_1 = \tilde{q}_3 \\ \dot{\tilde{q}}_2 = \tilde{q}_4 \\ \dot{\tilde{q}}_3 = (\tilde{q}_1 + \bar{x}) \tilde{q}_4^2 - \frac{\beta_1}{m} \tilde{q}_3 - g \sin(\tilde{q}_2 + \bar{\theta}) + \frac{K_1}{m} \left(\frac{\ell}{2} - \tilde{q}_1 - \bar{x} \right) + \frac{u_1}{m} \\ \dot{\tilde{q}}_4 = \frac{1}{I + m(\tilde{q}_1 + \bar{x})^2} \left[-(\tilde{q}_1 + \bar{x})(2m\tilde{q}_3\tilde{q}_4 + m g \cos(\tilde{q}_2 + \bar{\theta})) - K_2 \tilde{q}_2 + u_2 \right]. \end{cases} \quad (3)$$

Il sistema linearizzato approssimato di tale sistema attorno al nuovo punto di equilibrio delle nuove variabili di stato \tilde{q} , ovvero l'origine, è

$$\dot{\tilde{q}} = A\tilde{q} + B\tilde{u}$$

dove,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{K_1}{m} & -g \cos \bar{\theta} & -\frac{\beta_1}{m} & 0 \\ -\frac{m g \cos \bar{\theta} (I - m \bar{x}^2) - 2m K_2 \bar{x}^2 \bar{\theta}}{(I + m \bar{x}^2)^2} & \frac{m g \bar{x} \sin \bar{\theta} - K_2}{I + m \bar{x}^2} & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & \frac{1}{I + m \bar{x}^2} \end{bmatrix}.$$

A.3 Sostituendo i valori numerici assegnati, e considerando il punto di equilibrio dato, si ottiene

$$\dot{\tilde{q}} = A\tilde{q} + B_1u_1 + B_2u_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -10 & -4.9 & -10 & 0 \\ -1.85 & -3.34 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{q}_1 \\ \tilde{q}_2 \\ \tilde{q}_3 \\ \tilde{q}_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix} \tilde{u}_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.0756 \end{bmatrix} \tilde{u}_2$$

$$y = C\tilde{q} = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0] \tilde{q}.$$

La funzione di trasferimento tra l'ingresso di controllo $u = \tilde{u}_1$ (ovvero la forza agente sulla massa m) e l'uscita y (ovvero la posizione angolare dell'asta) è

$$G_u(s) = -\frac{1.85}{(s + 8.89)(s + 0.85)(s^2 + 0.26s + 3.23)}. \quad (4)$$

La funzione di trasferimento presenta quindi 2 poli reali e 2 complessi coniugati tutti a parte reale negativa. Il sistema risulta quindi asintoticamente stabile.

La funzione di trasferimento tra l'ingresso di disturbo $d = \tilde{u}_2$ e l'uscita y è

$$G_d(s) = \frac{0.076(s + 8.87)(s + 1.13)}{(s + 8.89)(s + 0.85)(s^2 + 0.26s + 3.23)}. \quad (5)$$

Infine, in figura 3) è riportato il diagramma a blocchi rappresentante il sistema con due ingressi (di controllo f e di disturbo τ) e l'uscita di misura y .

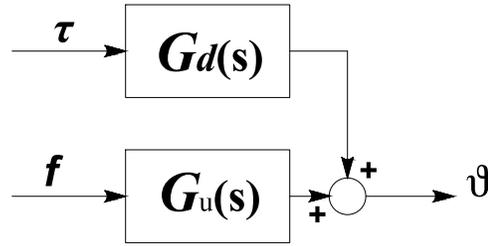


Figura 3: Diagramma a blocchi del sistema.

A.4 Siccome il sistema è asintoticamente stabile si può procedere direttamente con il progetto di un controllore del tipo

$$C(s) = \frac{K_c}{s^t} C_0(s), \text{ con } C_0(0) \geq 1.$$

in grado di soddisfare sia le specifiche statiche che quelle dinamiche, direttamente sui diagrammi di Bode.

A.4a La specifica richiede che l'asta raggiunga esattamente un valore pari a $-\pi/6$: questo significa che la f.d.t. in anello aperto deve possedere un polo nell'origine. Poichè il sistema non ne possiede già uno, è necessario inserirlo nel controllore, ovvero scegliere $t = 1$. Inoltre, la posizione angolare θ dell'asta durante il transitorio non deve mai superare un valore pari a $-8\pi/60$: questo si traduce nel richiedere che la sovralongazione massima non può eccedere il 20% del valore di regime. Infine, si richiede che l'uscita y entri e rimanga all'interno di una fascia $-\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{300} \leq \theta \leq -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{300}$, ovvero il 2% del valore di regime, in un tempo non superiore a 100 ms.

Si può procedere quindi tentando di progettare di un controllore capace di rendere la f.d.t. in anello chiuso ben approssimabile con un sistema a due poli dominanti per il quale le specifiche si traducono come segue:

$$S_{\%} < 20\% \quad \Rightarrow \quad \delta > 0.45 \quad \Rightarrow \quad MF > 45^\circ$$

$$\omega_T > \frac{4}{\delta T_a} \approx 90 \text{ rad/s}.$$

La figura 4 mostra il diagramma di Bode di $G(s)/s$ con specifica sulla banda passante.

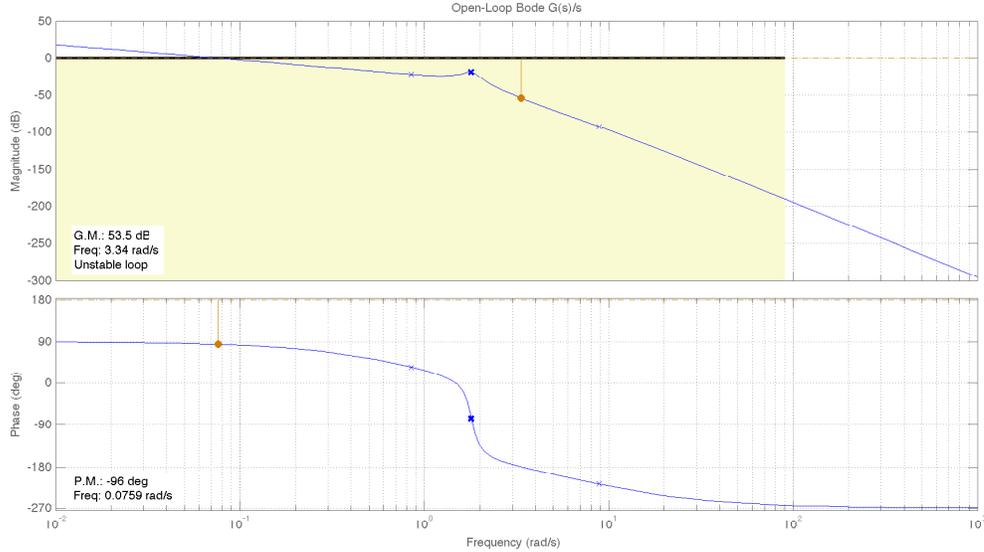


Figura 4: Diagrammi di Bode della f.d.t. $G(s)/s$ con specifica sulla banda passante.

A.4b La specifica richiede l'annullamento di un qualunque disturbo τ costante sull'uscita. Questo richiederebbe la presenza di un polo nell'origine a monte del punto di ingresso del disturbo stesso. Siccome la f.d.t. del sistema non ne possiede già uno, sarebbe necessario inserirlo nel controllore. Poichè è stato già inserito per annullare l'errore a regime, di fatto il soddisfacimento di tale specifica risulta essere garantito.

Progetto del controllore.

Un controllore capace di rispettare tutte le specifiche compresa quella sulla causalità è il seguente:

$$C(s) = -\frac{7419745908638868(s^2 + 8.952s + 24.42)(s^2 + 20.81s + 116)}{s(s^2 + 5433s + 7.38 \cdot 10^6)(s^2 + 5700s + 8.14 \cdot 10^6)}.$$

Il controllore presenta un polo nell'origine necessario per garantire errore nullo a regime e contemporaneamente l'annullamento sull'uscita dell'effetto di un disturbo costante, e due reti anticipatrici complesse coniugate in prossimità della pulsazione di taglio al fine di alzare il margine di fase in tale zona rispettando così la sovralongazione massima. In figura 5 è mostrato il diagramma di Bode della f.d.t. in anello aperto $C(s)G(s)$ con relative specifiche.

La f.d.t. in anello chiuso è

$$G_c(s) = \frac{13732620587681670(s^2 + 8.952s + 24.42)(s^2 + 20.81s + 116)}{(s + 4130)(s + 679.9)(s + 416.3)(s^2 + 8.846s + 23.88)(s^2 + 22.29s + 130.5)(s^2 + 5886s + 1.07 \cdot 10^7)}.$$

La risposta al gradino è riportata in figura 6. Come si può osservare, la risposta ottenuta è lontana da quella relativa ad un sistema del secondo ordine con due poli complessi coniugati. In effetti, il tentativo di progettare un controllore tale che il sistema in anello chiuso sia ben approssimabile con un sistema a due poli dominanti complessi coniugati non è perfettamente riuscito come si evince anche dalla f.d.t. G_c . Le specifiche risultano comunque ampiamente soddisfatte centrando quindi l'obiettivo. Infine, il diagramma a blocchi complessivo è riportato in figura 7.

QUI

A.6 Si consideri il sistema in forma di stato nonlineare riportato in (3). Utilizzando il metodo di Eulero in avanti $\dot{x} \approx (\tilde{q}(k+1) - \tilde{q}(k))/T$ (dove T rappresenta il tempo di campionamento, da scegliere opportunamente) e ponendo $\tilde{u}_1 = \tilde{f}$ con $\tilde{u}_2 = 0$, il sistema discretizzato diventa

$$\begin{aligned}\tilde{q}(k+1) &= A_D \tilde{q}(k) + B_D \tilde{u}_1(k) \\ y(k) &= C_D \tilde{q}(k)\end{aligned}$$

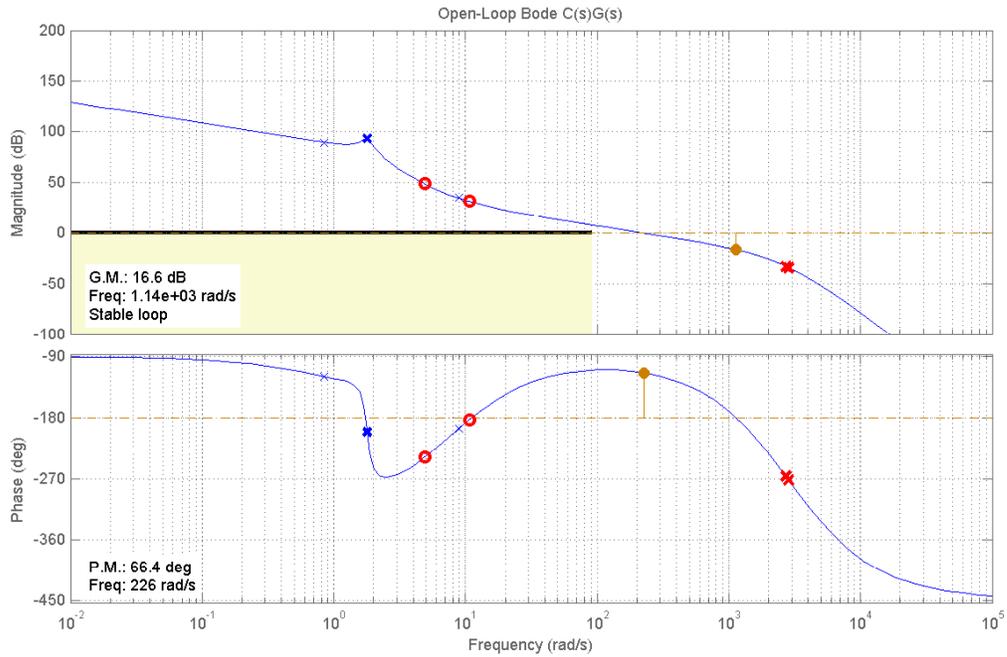


Figura 5: Diagrammi di Bode della f.d.t. $C(s)G(s)$ con specifiche da rispettare.

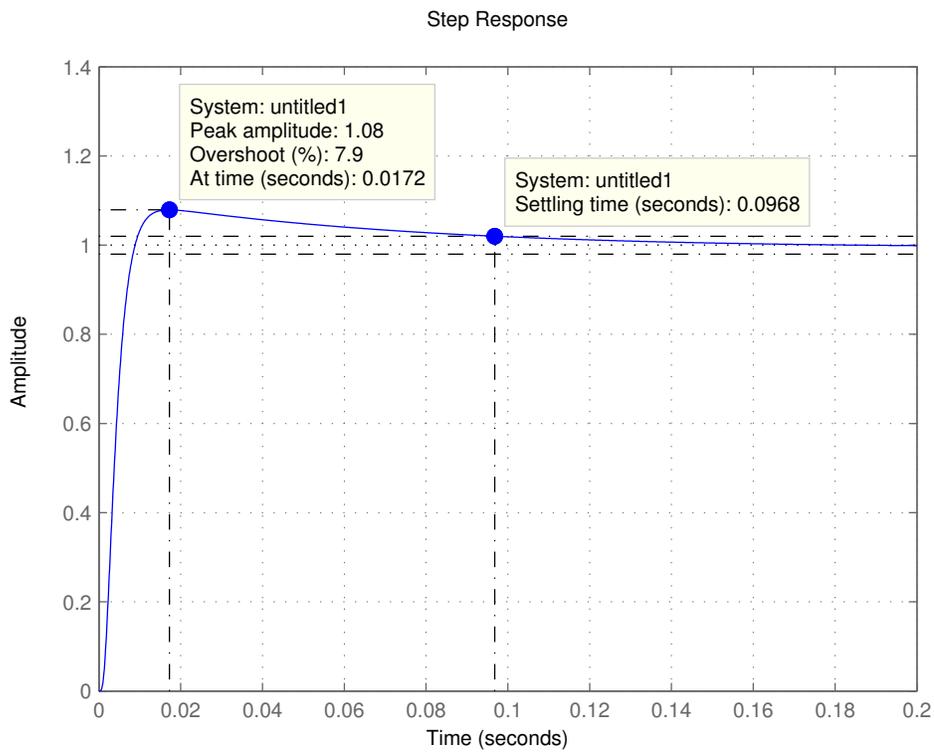


Figura 6: Risposta al gradino del sistema controllato.

dove,

$$A_D = AT + I, \quad B_D = BT, \quad C_D = C.$$

Il sistema discretizzato precedentemente ottenuto può essere simulato con il seguente programma

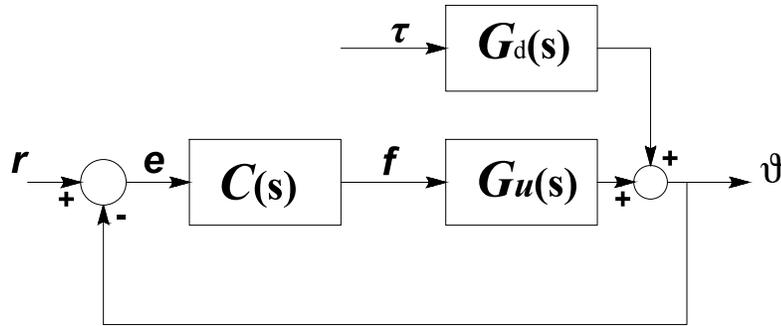


Figura 7: Diagramma a blocchi del sistema.

```

T=0.001; % Scelta del tempo di campionamento T

% Parametri del sistema
J = 2; % Kg m^2/rad
beta1 = 10; % Kg m^2/rad/s
m = 1; % Kg
g = 9.81; % m/s^2
K1 = 10; % N/m
L = 5; % m
K2 = 3*M^2*g^2*sqrt(3)/4/pi/K1+3*M*g*L/4/pi; % Nm

% Condizioni iniziali
tilde_q = [tilde_q10, tilde_q20, tilde_q30, tilde_q40]

% Ingresso
\tilde{u} = 5;

% Ciclo indefinito fino ad interruzione
while(condizione_arresto == 'false')

    % Salvataggio stati
    write tilde_q

    y = tilde_q(2); % L'uscita e' la seconda componente del vettore degli stati

    % Scrivi il valore di uscita y sulla porta 'output'
    write(y, output);

    % Sistema discretizzato
    Ad=A*T+eye(4);
    Bd = B*T;

    % Aggiorna lo stato
    tilde_q=Ad*tilde_q+Bd*tilde_u;

end

```

Esercizio B.

Esplicitando le equazioni dei vari rami del diagramma a blocchi riportato nel testo si ottiene il seguente sistema lineare

$$\begin{aligned}
 y &= a + b \\
 a &= d + G_1 e \\
 b &= G_3(e - G_2 a) \\
 e &= u - G_4 y.
 \end{aligned}$$

Eliminando le variabili a, b, e si ottiene

$$y = \frac{1 - G_2 G_3}{1 - (G_2 G_3 G_4 - G_1 G_3 - G_3 G_4)} d + \frac{G_1 + G_3 - G_1 G_2 G_3}{1 - (G_1 G_2 G_3 G_4 - G_1 G_4 - G_3 G_4)} u.$$