

Figura 1: Modello semplificato di trasloelevatore con colonna flessibile

Il sistema rappresentato in figura 1 è un modello semplificato di trasloelevatore per la gestione di magazzini ad elevato sviluppo verticale. Un carico di massa m_2 è posto su di una forca che scorre su una colonna fissata ad un carrello di massa m_1 . La colonna è snella ed ha elasticità non trascurabile, che viene modellata in prima battuta con una flessione angolare θ rispetto alla verticale concentrata alla base, una costante elastica K_θ e un coefficiente di smorzamento viscoso b_θ . L'altezza h del carico lungo la colonna è comandata attraverso un attuatore che applica una forza f_2 . La posizione orizzontale x del carrello m_1 è comandata attraverso un attuatore che applica una forza f_1 . Sullo stesso attuatore agisce anche una forza di disturbo orizzontale d_f . Le equazioni semplificate che descrivono il comportamento dinamico del sistema (trascurando la massa della colonna e il momento di inerzia della colonna e del carico) sono le seguenti:

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -\frac{\cos(\theta) (b_\theta \dot{\theta} + k_\theta \theta)}{h m_1} + \frac{f_2 \sin(\theta)}{m_1} + \frac{f_1}{m_1} \\ \ddot{h} &= -\frac{\sin(2\theta) (b_\theta \dot{\theta} + k_\theta \theta)}{2 h m_1} + \frac{f_2 \sin^2(\theta)}{m_1} + \frac{f_1 \sin(\theta)}{m_1} + \frac{f_2}{m_2} - g \cos(\theta) + h \dot{\theta}^2 \\ \ddot{\theta} &= -\frac{b_\theta \dot{\theta} + k_\theta \theta}{h^2 m_2} - \frac{\cos^2(\theta) (b_\theta \dot{\theta} + k_\theta \theta)}{h^2 m_1} + \frac{\cos(\theta) (f_2 \sin(\theta) + f_1)}{h m_1} + \frac{g \sin(\theta)}{h} - \frac{2 \dot{h} \dot{\theta}}{h}\end{aligned}$$

A.1 Si determinino i valori delle forze f_1 e f_2 che mantengono il sistema in un equilibrio verticale ($\theta = 0$) con posizione orizzontale \bar{x} e altezza \bar{h} assegnate.

A.2 Si determini una rappresentazione in forma di stato del sistema linearizzato intorno all'equilibrio calcolato al punto precedente, considerando dapprima come uscita la posizione orizzontale del carico $y = x - h \sin(\theta)$ e in seguito la posizione orizzontale della colonna $y_L = x - L \sin(\theta)$.

Si considerino i seguenti valori numerici:

$$m_1 = 180 \text{ [Kg]}, m_2 = 50 \text{ [Kg]}, K_\theta = 320 \text{ [Nm/rad]}, b_\theta = 100 \text{ [Nms/rad]}, g = 9.81 \text{ [m/s}^2\text{]}, L = 10 \text{ [m]}$$

e come uscita del sistema la posizione orizzontale del carico.

A.3 Si consideri il sistema per valori dell'altezza $\bar{h} \in \{0.5, 5, 10\}$. Si calcoli la f.d.t. dei sistemi ottenuti e se ne discutano le caratteristiche (stabilità, fase minima, analisi modale).

A.4 Per il caso di $\bar{h} = 0.5$ si determini una legge di controllo per f_1 che agisca in modo da garantire che:

A.4.1 la massa m_2 si porti lungo l'orizzontale esattamente alla posizione di 10 m, con sovravelongazione limitata a 10 cm, entrando in una tolleranza rispetto al valore di regime di ± 5 cm entro un tempo non superiore a 3 sec.

A.4.2 in corrispondenza di un disturbo di attuazione d_f costante e limitato tra ± 100 N, non si abbia a regime un errore di posizionamento della massa m_2 superiore a 5 mm.

Si riportino quindi:

- il diagramma di Bode con le relative specifiche da rispettare;
- il controllore progettato;
- il diagramma a blocchi del sistema con il controllore progettato;
- la risposta al gradino ottenuta con le caratteristiche significative.

A.5 Per il caso di $\bar{h} = 10$ si determini una legge di controllo per f_1 che riesca a stabilizzare il sistema attorno all'equilibrio.

B Si consideri il controllore $C(s)$ che stabilizza il sistema $G(s)$.

$$C(s) = 40 \frac{s+1}{s+10} \quad G(s) = \frac{1}{s^2 - s}$$

Si scriva una funzione MATLAB che simuli la dinamica discretizzata del solo controllore, discutendo sulla scelta del tempo di campionamento.

Soluzioni

A.1 Indicando con $x = [x \ h \ \theta \ \dot{x} \ \dot{h} \ \dot{\theta}]^T$ il vettore di stato ed imponendo le condizioni di equilibrio, $x = \bar{x}$, $h = \bar{h}$, $\theta = \dot{\theta} = \dot{h} = \dot{x} = \ddot{\theta} = \ddot{h} = \ddot{x} = 0$, con disturbo $d_f = 0$ si ottiene semplicemente:

$$\begin{cases} f_1 = 0 \\ \bar{f}_2 = m_2 g \end{cases}$$

A.2 Indicando con $\tilde{x} = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6]^T = [x - \bar{x}, h - \bar{h}, \theta, \dot{x}, \dot{h}, \dot{\theta}]^T$, il vettore delle variabili di stato traslate nell'equilibrio e con $\tilde{u} = [u_1, u_2]^T = [f_1, f_2 - m_2 g]$ il vettore degli ingressi anch'essi traslati, il sistema lineare scritto in forma di stato attorno all'equilibrio è

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_4 \\ \dot{x}_2 = x_5 \\ \dot{x}_3 = x_6 \\ \dot{x}_4 = -\frac{\cos(x_3)(b_t x_6 + x_3 k_\theta)}{m_1(\bar{h} + x_2)} + \frac{(\bar{f}_2 + u_2) \sin(x_3)}{m_1} + \frac{(\bar{f}_1 + u_1)}{m_1} \\ \dot{x}_5 = -\frac{\sin(x_3) \cos(x_3)(b_t x_6 + x_3 k_\theta)}{m_1(\bar{h} + x_2)} - g \cos(x_3) + \frac{(\bar{f}_2 + u_2) \sin^2(x_3)}{m_1} + \frac{(\bar{f}_1 + u_1) \sin(x_3)}{m_1} + \frac{(\bar{f}_2 + u_2)}{m_2} + (\bar{h} + x_2) x_6^2 \\ \dot{x}_6 = -\frac{b_t x_6 + x_3 k_\theta}{m_2(\bar{h} + x_2)^2} - \frac{\cos^2(x_3)(b_t x_6 + x_3 k_\theta)}{m_1(\bar{h} + x_2)^2} + \frac{g \sin(x_3)}{(\bar{h} + x_2)} + \frac{(\bar{f}_1 + u_1) \cos(x_3)}{m_1(\bar{h} + x_2)} + \frac{(\bar{f}_2 + u_2) \sin(x_3) \cos(x_3)}{m_1(\bar{h} + x_2)} - \frac{2x_5 x_6}{(\bar{h} + x_2)} \end{cases}$$

Linearizzando il sistema attorno all'equilibrio, si ottiene il sistema linearizzato approssimato con la consueta forma di stato

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= A\tilde{x} + B\tilde{u} \\ y &= C\tilde{x} \end{aligned}$$

dove,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{g\bar{h}m_2 - k_\theta}{\bar{h}m_1} & 0 & 0 & -\frac{b_t}{\bar{h}m_1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(m_1 + m_2)(g\bar{h}m_2 - k_\theta)}{\bar{h}^2 m_1 m_2} & 0 & 0 & -\frac{b_t(m_1 + m_2)}{\bar{h}^2 m_1 m_2} \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{m_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} \\ \frac{1}{\bar{h}m_1} & 0 \end{bmatrix},$$

$$C = [1 \ 0 \ -\bar{h} \ 0 \ 0 \ 0].$$

Nel secondo caso in cui l'uscita è l'altezza della colonna si ha

$$C = [1 \ 0 \ -L \ 0 \ 0 \ 0]$$

A.3 La generica f.d.t. fra l'ingresso u_1 e l'uscita y ,

$$G_h(s) = \frac{m_1^2 s^2 (-gm_2 \bar{h} + sb_t + k_\theta) + m_2 \bar{f}_1^2}{m_1 s^2 (m_1 s^2 (-m_2 \bar{h} (\bar{f}_2 + gm_1) + m_1 m_2 s^2 \bar{h}^2 + (m_1 + m_2)(sb_t + k_\theta)) + m_2 \bar{f}_1^2)}$$

Si sono lasciati i parametri \bar{f}_1, \bar{f}_2 per mostrare il corretto numero di singolarità del sistema. Difatti si può notare che, sostituendo i valori di equilibrio per le forze, si hanno due singolarità nell'origine sia

nel numeratore che nel denominatore. Questo spiega la riduzione dell'ordine del sistema mostrato nella funzione sottostante.

$$G_h(s) = \frac{sb_\theta + K_\theta - gm_2\bar{h}}{s^2(s^2m_1m_2\bar{h}^2 + sb_\theta(m_1 + m_2) + (m_1 + m_2)(K_\theta - m_2^2g\bar{h}))}$$

Il sistema presenta 2 poli in zero associati alle dinamiche di x e h , dunque indipendenti dal valore della costante \bar{h} . I restanti due poli risentono invece della variazione del parametro come riportato di seguito:

$$s \rightarrow -\frac{b_\theta(m_1+m_2) + \sqrt{(m_1+m_2)(4gm_1m_2^2\bar{h}^3 - 4m_1m_2\bar{h}^2k_\theta + b_\theta^2(m_1+m_2))}}{2m_1m_2\bar{h}^2},$$

$$s \rightarrow -\frac{-b_\theta(m_1+m_2) + \sqrt{(m_1+m_2)(4gm_1m_2^2\bar{h}^3 - 4m_1m_2\bar{h}^2k_\theta + b_\theta^2(m_1+m_2))}}{2m_1m_2\bar{h}^2}$$

Si osserva un discriminante negativo (poli complessi coniugati, nello specifico a parte reale negativa essendo sicuramente $b_\theta(m_1 + m_2) > 0$) per

$$\bar{h} < -0.35889,$$

mentre sono sempre reali negativi per valori ammissibili di $0 > \bar{h} > 0.6524$ mentre sono di segno opposto per valori superiori. L'unico zero del sistema risulta:

$$s = \frac{-320 + 490.5\bar{h}}{100},$$

a fase non minima per $\bar{h} > 0.6524$.

Sostituendo i valori numerici assegnati, e considerando il punto di equilibrio di interesse si ottiene:

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + Bu = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{490.5\bar{h} - 320}{180\bar{h}} & 0 & 0 & -\frac{5}{9\bar{h}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{112815\bar{h} - 73600}{9000\bar{h}^2} & 0 & 0 & -\frac{23}{9\bar{h}^2} \end{bmatrix} \tilde{x} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{180} & 0 \\ 0 & \frac{1}{50} \\ \frac{1}{180\bar{h}} & 0 \end{bmatrix} u,$$

$$y = C\tilde{x} = [1 \quad 0 \quad -\bar{h} \quad 0 \quad 0 \quad 0] \tilde{x}.$$

La funzione di trasferimento parametrica in \bar{h} risulta:

$$G = \frac{0.0111111s + 0.0355556 - 0.0545\bar{h}}{s^2(s^2\bar{h}^2 + 2.55556s + 8.17778 - 12.535\bar{h})}.$$

Valutando dunque la f.d.t. per i valori di \bar{h} richiesti si ottiene:

- $\bar{h} = 0.5$

$$\frac{0.0444444(s + 0.7475)}{s^2(s + 0.812)(s + 9.41)}$$
- $\bar{h} = 5$

$$\frac{0.000444444(s - 21.33)}{s^2(s - 1.426)(s + 1.528)}$$
- $\bar{h} = 10$

$$\frac{0.000111111(s - 45.85)}{s^2(s - 1.07)(s + 1.095)}$$

da cui si riscontra una corrispondenza dei valori di poli e zeri con lo studio effettuato in precedenza. Nello specifico, per $\bar{h} \in \{5, 10\}$ il sistema presenta un modo esponenzialmente instabile ed uno zero a fase non minima; per quanto riguarda il caso di $\bar{h} = 0.5$, tutte le singolarità hanno parte reale non positiva, ma i due poli nell'origine fanno parte di uno stesso blocco di Jordan (autovalore nullo con molteplicità algebrica 2 e geometrica 1); anche tale f.d.t. è dunque instabile, però polinomialmente.

I modi del sistema sono esponenziali convergenti o divergenti a seconda del segno dell'autovalore associato, più un modo costante ed uno lineare in t associato alla coppia di poli nell'origine.

A scopo didattico si studia ora la funzione di trasferimento considerando la seconda uscita indicata nel testo. Anche in questo caso si verifica una riduzione dell'ordine del sistema. La funzione cercata è:

$$G_L(s) = \frac{s^2(\bar{h}^2 - \bar{h}L)m_2 + sb_\theta + K_\theta - gm_2\bar{h}}{s^2(s^2m_1m_2\bar{h}^2 + sb_\theta(m_1 + m_2) + (m_1 + m_2)(K_\theta - m_2^2g\bar{h}))}$$

Nel numeratore si osserva che la presenza di zeri a fase minima o non minima dipende dai coefficienti

$$\begin{cases} \bar{h} - L \\ K_\theta - gm_2\bar{h} \end{cases}$$

la combinazione di questi genera all'interno del polinomio al più due cambiamenti di segno. Applicando il criterio di Routh o Cartesio, si evince che esistono tre possibili combinazioni di zeri: due a fase non minima, uno a fase minima e uno non minima, entrambi a fase minima. Ovviamente nel caso di $\bar{h} = L$ si ritorna al caso studiato precedentemente.

A.4 In figura 2 è riportato il diagramma a blocchi rappresentante il sistema con due ingressi (di controllo F e di disturbo di attuazione d_f) e l'uscita di misura y . Il sistema è polinomialmente divergente (come si può

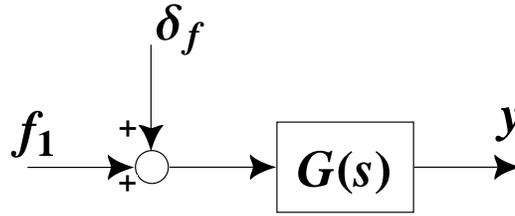


Figura 2: Diagramma a blocchi del sistema.

vedere studiando la forma di Jordan della matrice del sistema). Sarebbe possibile procedere direttamente alla sintesi del controllore utilizzando i diagrammi di Bode, ad ogni modo si preferisce in questa sede progettare un controllore stabilizzante $C_1(s)$ utilizzando il luogo delle radici. In seguito si soddisfano le specifiche con un secondo controllore $C_2(s)$, realizzando quindi un controllo in cascata come rappresentato in figura 3.

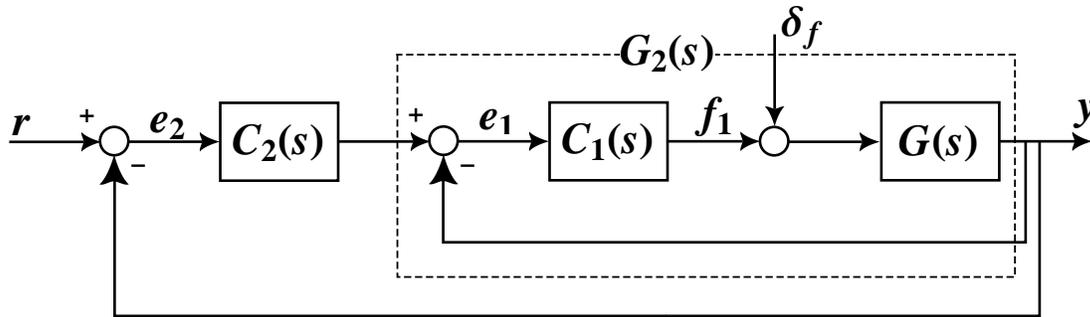


Figura 3: Diagramma a blocchi del sistema complessivo.

In figura 4 si mostra il luogo delle radici del sistema. Per attrarre i due rami associati ai poli nell'origine nel semipiano a parte reale negativa, si può utilizzare un'azione anticipatrice con zeri complessi coniugati sufficientemente vicini all'origine. Un controllore stabilizzante è il seguente:

$$C_1(s) = \frac{7.8636e11(s^2 + 0.3227s + 0.2376)}{(s^2 + 1.057e04s + 2.804e07)}$$

In figura 5 è rappresentato il luogo delle radici del sistema $C_1(s)G(s)$, ovvero in seguito al progetto del controllore stabilizzante $C_1(s)$.

Il sistema una volta chiuso in retroazione con il controllore stabilizzante $C_1(s)$ è

$$G_2(s) = \frac{3.4949e10(s + 0.7475)(s^2 + 0.3227s + 0.2376)}{(s + 7427)(s + 0.7479)(s^2 + 0.3202s + 0.2357)(s^2 + 3151s + 4.74e06)}$$

Adesso passiamo a progettare un controllore per soddisfare le specifiche. Tale controllore sarà del tipo

$$C(s) = \frac{K}{s^t} C_0(s), \text{ con } C_0(0) \geq 1.$$

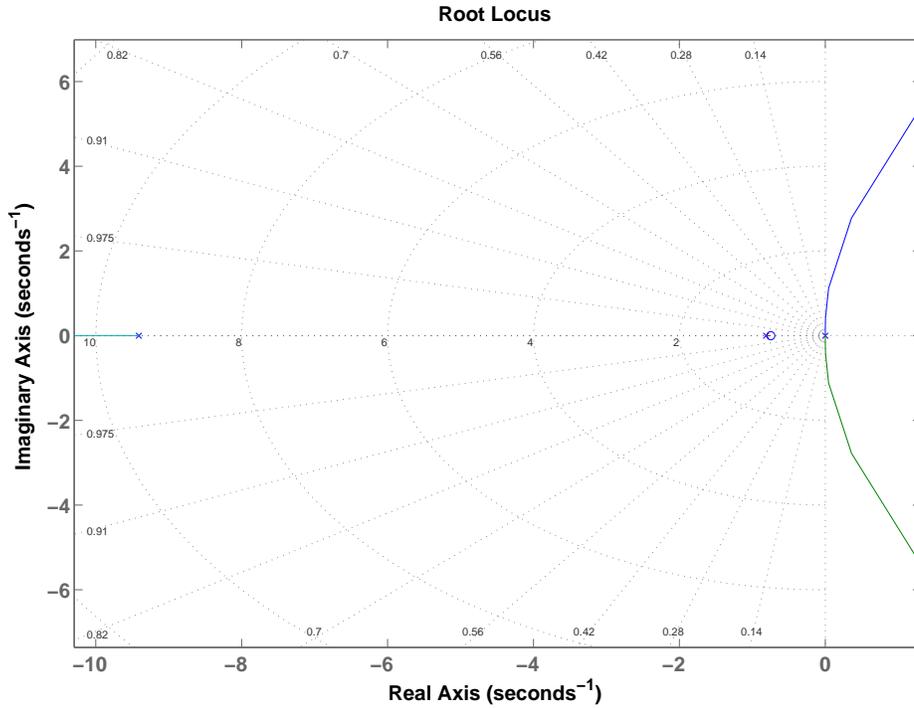


Figura 4: Luogo delle radici del sistema con $\bar{h} = 0.5$.

A.4.1 Le specifiche da rispettare sono:

- raggiungere esattamente la posizione richiesta: la funzione di anello deve contenere un polo nell'origine che, non essendo presente nella $G_2(s)$, deve essere inserito nel controllore;
- sovraelongazione massima ammessa di 10 cm per un gradino di 10 m: $S\% = 1\%$;
- assestamento entro un intervallo di ± 5 cm entro un tempo di 3 sec, ovvero un tempo di assestamento allo 0.5% di 3 sec.

Si può cercare di rispettare tali specifiche con un controllo che punti ad approssimare il sistema in ciclo chiuso con un sistema a due poli dominanti, per il quale le specifiche si traducono come segue:

$$S\% = 100 e^{-\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}} \leq 1\% \quad \implies \quad \delta > 0.83 \quad \implies \quad M_\phi = 2 \arcsin(\delta) > 110^\circ$$

$$T_{a0.5} \simeq \frac{-\ln\left(\frac{0.5}{100}\right) - \frac{1}{2} \ln(1 - \delta^2)}{\delta \omega_T} \quad \implies \quad \omega_T > \frac{7.1}{T_{a0.5}} = 2.35 \text{ rad/s}.$$

Si noti che l'uso delle formule approssimate, generalmente valido, non si applica in questo caso in cui lo smorzamento richiesto è decisamente elevato.

A.4.2 Un errore ad un disturbo di attuazione costante deve essere attenuato alzando sufficientemente il guadagno in bassa frequenza dell'anello; essendo però presente un polo nell'origine a monte del punto d'ingresso del disturbo (ovvero, nel controllore, dov'è stato inserito per ottenere errore a regime nullo), questa specifica risulta già soddisfatta.

La figura 6 mostra il diagramma di Bode di $G_2(s)$ con le specifiche sulla banda passante.

Un controllore che permette al sistema di rispettare le specifiche, compresa la causalità, è il seguente:

$$C_2(s) = \frac{315.25(s + 9.713)}{s(s + 346.8)}.$$

Il controllore può essere progettato inserendo come prima cosa il polo nell'origine, necessario per garantire errore a regime nullo. Al fine poi di rispettare la specifica sul margine di fase, si può procedere con l'inserimento di una rete anticipatrice.

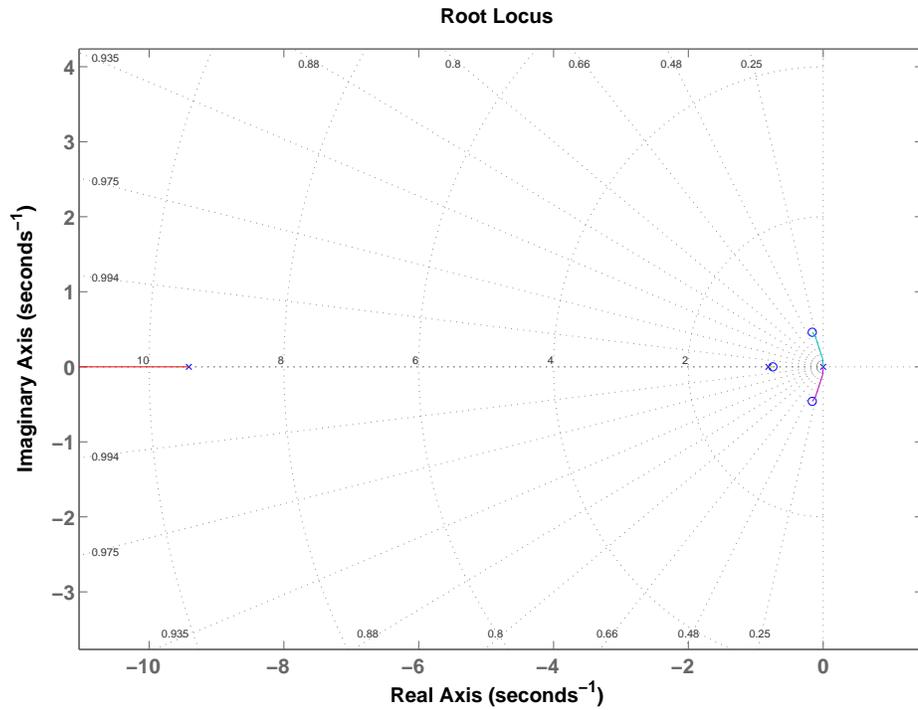


Figura 5: Luogo delle radici del sistema con $\bar{h} = 0.5$ con controllore stabilizzante.

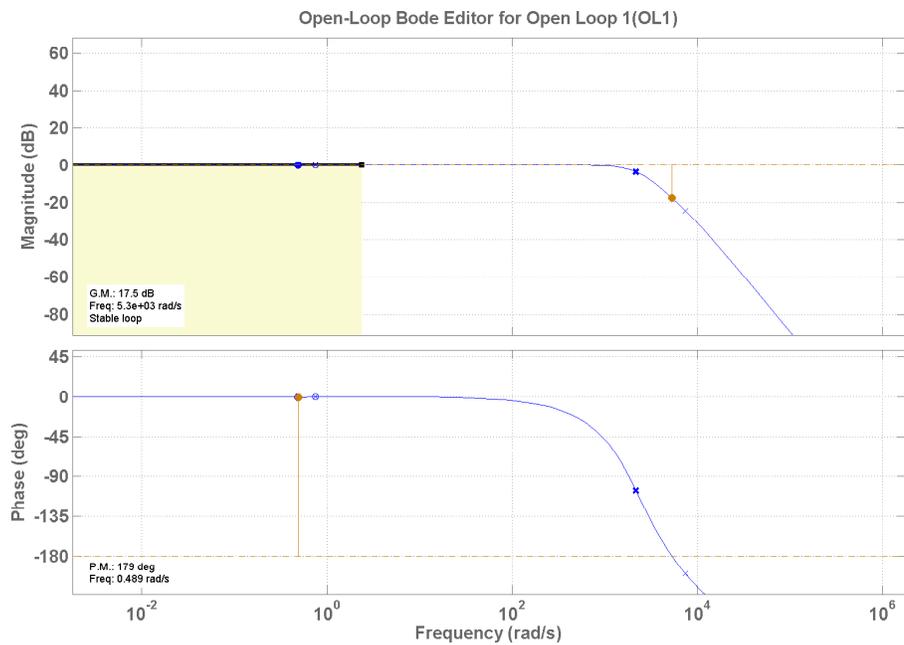


Figura 6: Diagrammi di Bode della f.d.t. $G_2(s)$ con le specifiche sulla banda passante.

In figura 8 è riportata la risposta al gradino. Come si può osservare, il tentativo di progettare un controllore che renda il sistema in anello chiuso ben approssimabile con un sistema a due poli dominanti sovrasmorzato è riuscito, ed infatti le specifiche risultano rispettate. La f.d.t. del sistema in anello chiuso complessiva è

la seguente:

$$G_c = \frac{1.1018e13(s + 0.7475)(s + 9.713)(s^2 + 0.3227s + 0.2376)}{(s + 7383)(s + 1004)(s + 4.648)(s + 0.7475)(s^2 + 0.3226s + 0.2376)(s^2 + 2532s + 3.105e06)} \cdot \quad (1)$$

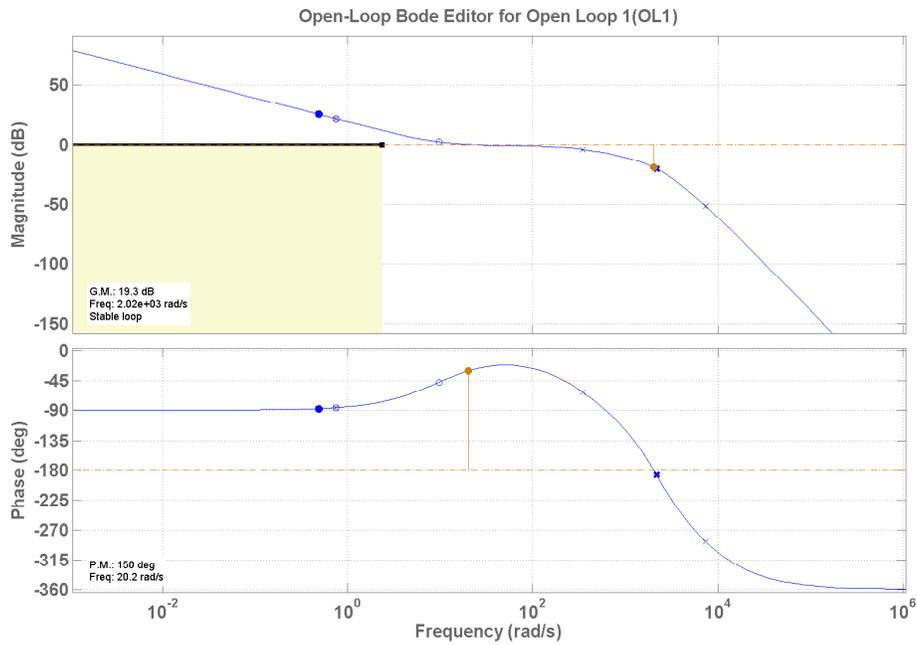


Figura 7: Diagrammi di Bode della f.d.t. $C_2(s)G_2(s)$.

- A.5** La f.d.t. del sistema per $\bar{h} = 10$ m presenta un polo instabile ed uno zero a fase non minima. La sua stabilizzazione può essere effettuata sul luogo delle radici. Come si vede dalla figura 9, esso presenta un ramo interamente contenuto nel semipiano a parte reale positiva che deve essere interrotto inserendo, attraverso il controllo, un polo instabile per ottenerci un punto di biforcazione. Una volta ottenuto ciò, si utilizzando due reti anticipatrici complesse per attrarre tali rami nel semipiano sinistro. La figura 10 riporta l'andamento del luogo in seguito alla stabilizzazione.

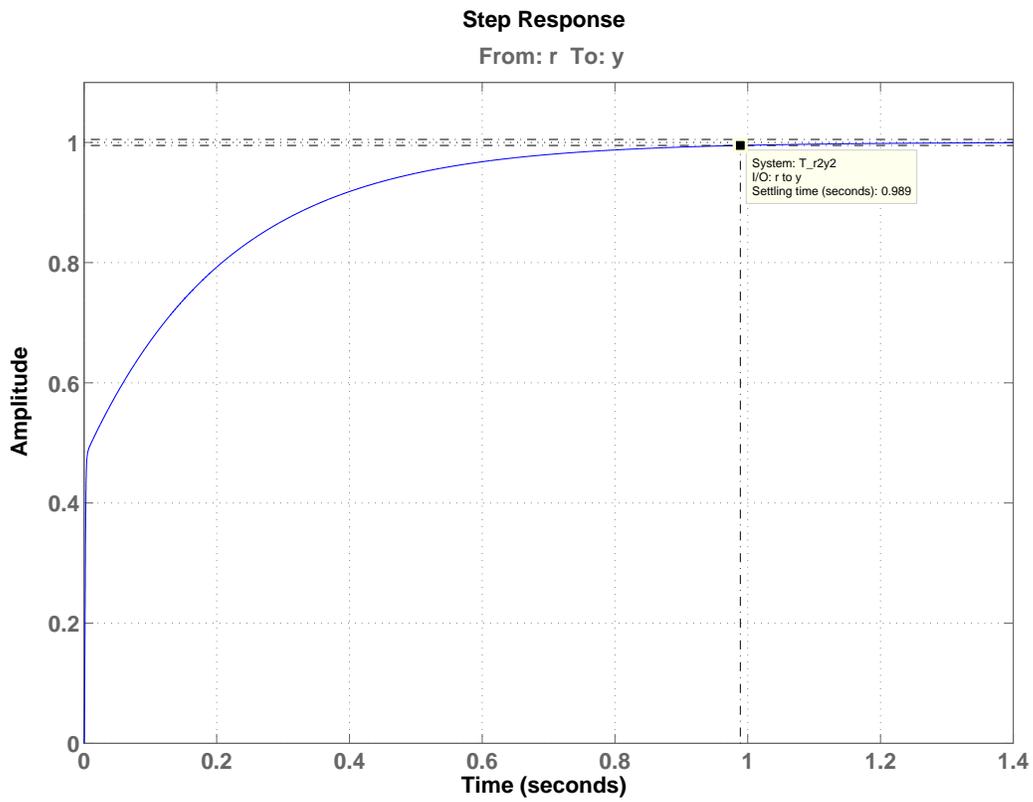


Figura 8: Risposta per ingresso a gradino del sistema controllato.

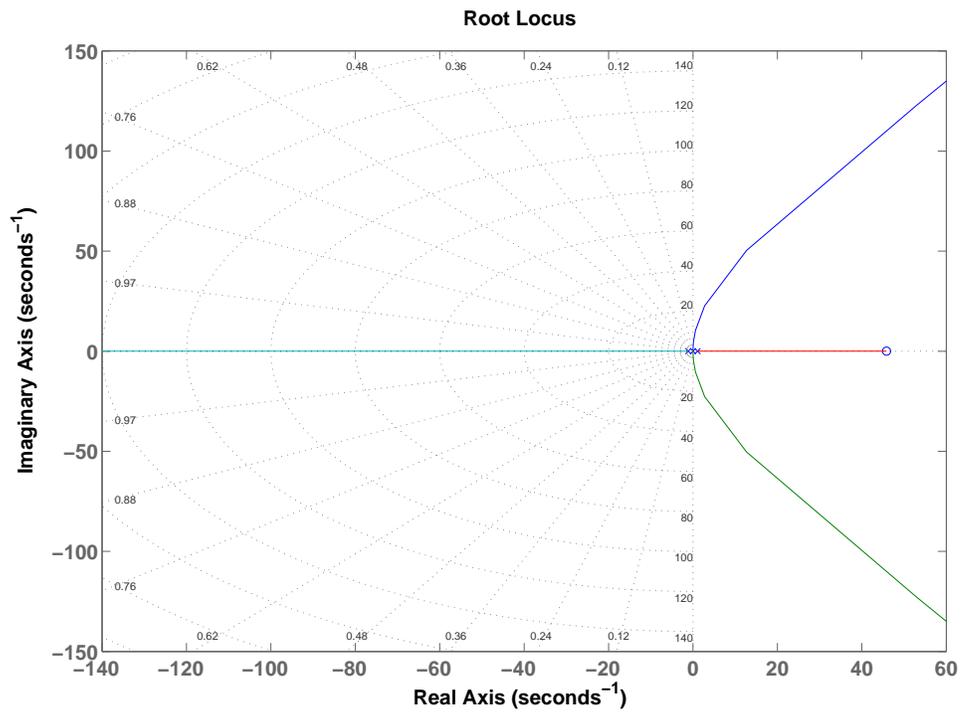


Figura 9: Luogo delle radici del sistema con $\bar{h} = 10$.

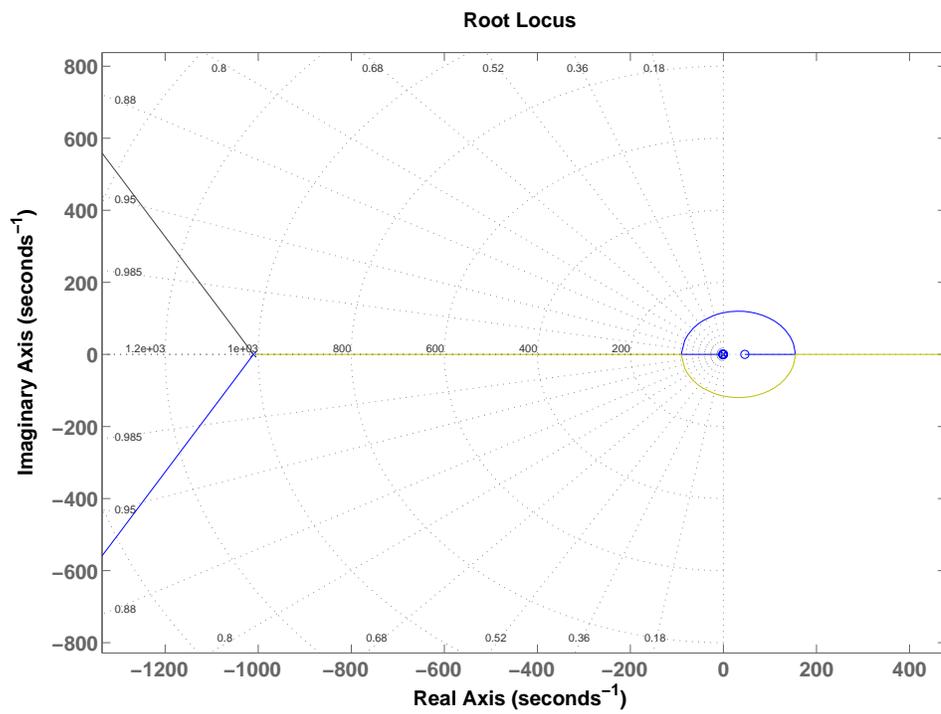


Figura 10: Luogo delle radici del sistema con $\bar{h} = 10$ con controllore stabilizzante.

B Il diagramma a blocchi Simulink del sistema con controllore è riportato in figura 11, il codice MATLAB del controllore è riportato di seguito.

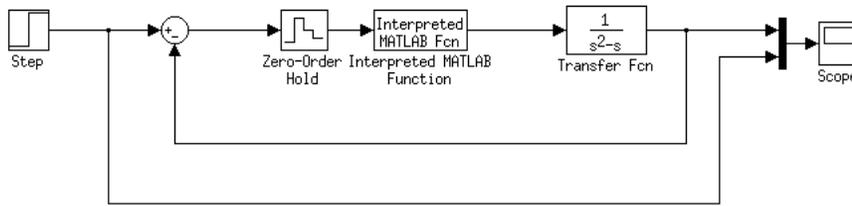


Figura 11: Schema Simulink: Sistema + Controllore

```
function out = esercizio_b(in)
% function out = esercizio_b(in)
%
% in:    error signal e
% out:   control signal to be given as input to the plant

e = in;

%controller state, state(0)=0
global state

% discretization time, T=0.1
global T

s = tf('s');

% controller
C1 = 40*(s + 1)/(s + 10);
Sys_C1 = ss(C1);

A = Sys_C1.a;
B = Sys_C1.b;
C = Sys_C1.c;
D = Sys_C1.d;

% discretizing using forward Euler
Ad = eye(size(A)) + A*T;
Bd = B*T;
Cd = C;
Dd = D;

%controller dynamics
output = Cd*state + Dd*e;
state=Ad*state+Bd*e;

% controller output
out = output;
end
```

La risposta al gradino del sistema controllato è riportata in figura 12.

Per quanto riguarda la scelta del tempo di campionamento T , si è fatto in modo che gli autovalori della matrice dinamica discretizzata A_d del controllore non siano esterni al cerchio unitario centrato in zero:

$$A = -10 \quad A_d = 1 - 10T \implies |1 - 10T| < 1 \implies 0 < T < \frac{1}{5}$$

e che $\frac{1}{T}$ sia almeno il doppio della frequenza del polo dominante $s = -10$:

$$\frac{1}{T} > 2 \frac{10}{2\pi} \implies T < \frac{\pi}{10}$$

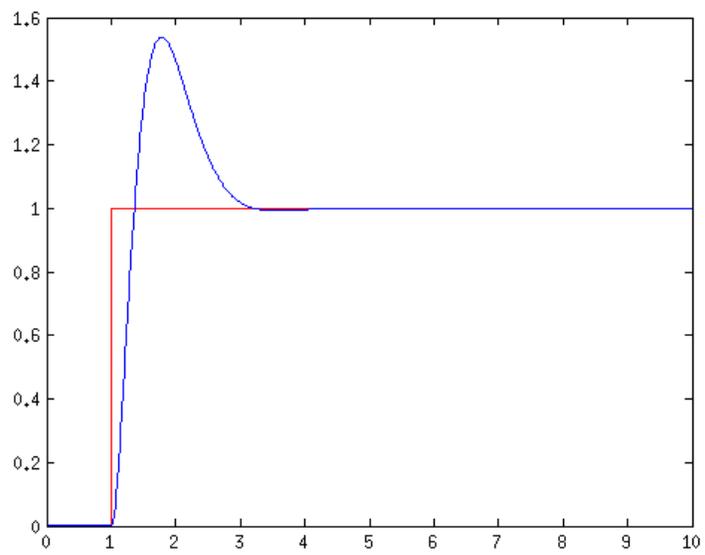


Figura 12: Risposta al gradino