

Si consideri il sistema in figura, che rappresenta un'approssimazione del modello della cabina di un veicolo da esibizione di tipo Monster Truck e delle sue sospensioni sul piano trasversale. Considerando la massa  $m$  del veicolo concentrata in un punto, il sistema può essere rappresentato da un insieme massa-molla-smorzatore (con parametri caratteristici rispettivamente  $m - k_l - b_l$ ) incernierato ad una estremità e vincolato rispetto alla direzione verticale tramite un accoppiamento molla-smorzatore torsionali (di parametri caratteristici  $k_r - b_r$ ).

La dinamica del sistema (schematizzato in figura) è descritta dalle seguenti equazioni differenziali:

$$\begin{aligned} m\ddot{l} + b_l\dot{l} + k_l(l - l_0) - ml\dot{\theta}^2 + mg \cos \theta &= -F_d \\ ml^2\ddot{\theta} + b_r\dot{\theta} + k_r\theta - mgl \sin \theta + 2ml\dot{\theta} &= \tau \end{aligned}$$

dove  $l$  è la distanza della massa dalla cerniera ed  $l_0$  è il suo valore in condizione di molla lineare a riposo;  $g$  è il modulo dell'accelerazione di gravità;  $\tau$  rappresenta la coppia equivalente applicata sull'assieme attorno alla cerniera da un sistema di controllo dedicato all'attenuazione delle vibrazioni;  $F_d$  è una forza di disturbo agente lungo la direzione dell'assieme massa-molla-smorzatore. Tramite un opportuno sensore, si misura l'altezza dal suolo della massa  $m$ , pari a  $d = l \cos(\theta)$ .

- 1 Si determinino le condizioni di equilibrio del sistema in funzione di un generico angolo  $\bar{\theta}$  costante, considerando nullo il disturbo  $F_d$ .
- 2 Si determini una rappresentazione del sistema linearizzato in forma di stato attorno alla configurazione di equilibrio corrispondente ad una inclinazione dell'asta pari a  $\bar{\theta} = \frac{\pi}{8} \text{ rad}$ .
- 3 Si considerino i seguenti valori numerici per i parametri del modello:  $m = 3740 \text{ kg}$ ,  $l_0 = 5 \text{ m}$ ,  $g = 9.81 \text{ m/s}$ ,  $b_l = 1673 \text{ N s/m}$ ,  $k_l = 18700 \text{ N/m}$ ,  $b_r = 33460 \text{ Nms}$ ,  $k_r = 0 \text{ Nm}$ .
  - Si scrivano le matrici numeriche del sistema linearizzato in forma di stato;
  - si ricavano le funzioni di trasferimento tra gli ingressi (di controllo  $\tau$  e di disturbo  $F_d$ ) e l'uscita  $d$ ;
  - si discuta circa la stabilità del sistema.

Verificare che le funzioni di trasferimento abbiano approssimativamente la forma

$$\begin{aligned} G(s) &= -3 \cdot 10^{-5} \frac{(s^2 + 0.44s + 2.15)}{(s + 2.23)(s - 1.35)(s^2 + 0.46s + 5.17)} \\ G_d(s) &= -2.5 \cdot 10^{-4} \frac{(s + 2.32)(s - 1.44)}{(s + 2.23)(s - 1.35)(s^2 + 0.46s + 5.17)} \end{aligned}$$

in caso negativo, per i punti successivi, è possibile utilizzare le funzioni di trasferimento qui fornite.

- 4 Si sintetizzi un controllore stabilizzante che, agendo sull'ingresso  $\tau$ , e considerando condizioni iniziali per il sistema pari a quelle di equilibrio, rispetti le seguenti specifiche:

- sia in grado di portare il veicolo in posizione  $d = 3.045m \pm 0.001m$  senza mai superare la distanza di  $3.05m$  dal suolo. Si vuole inoltre che, trascorsi  $0.5s$ , la distanza  $d$  dal suolo entri, senza più uscirne nell'intervallo  $[3.04, 3.05]m$ .
- A fronte di una forza di disturbo  $F_d(t) = 100\sin(\omega_d t)$  N con  $\omega_d < 0.01rad/s$ , le oscillazioni indotte sulla quota  $d$  siano caratterizzate da un'ampiezza minore di  $1mm$ .
- In presenza di un rumore di misura agente a pulsazioni  $\omega_\nu > 5000rad/s$ , si richiede che l'ampiezza dell'effetto sull'uscita sia inferiore allo 1% del rumore stesso.

Si riportino quindi:

- le specifiche tradotte nel dominio della frequenza e visualizzate sul diagramma di Bode,
- il procedimento di progettazione del controllore illustrato con diagrammi a blocchi,
- la funzione di trasferimento del controllore progettato,
- i diagrammi di Bode del sistema nelle diverse fasi del progetto (mostrando il raggiungimento delle specifiche),
- la risposta al gradino del sistema controllato riportando le caratteristiche più significative.

Al fine di valutare quanto svolto al computer lo studente deve salvare ogni progetto del controllore effettuato con sisotool attraverso il comando "Save Session" che si trova nel sisotool stesso. Il nome del file da salvare deve essere nella forma CognomeMatricola.i.mat con "i" numero del controllore progettato. Il numero del controllore progettato deve essere coerente con quanto scritto nel foglio.

I file ottenuti devono essere inviati al docente del corso:

- Teoria dei sistemi: [lucia.pallottino@unipi.it](mailto:lucia.pallottino@unipi.it)
- Fondamenti di automatica: [riccardo.costanzi@unipi.it](mailto:riccardo.costanzi@unipi.it)

La versione elettronica del controllore verrà considerata solo nel caso di corrispondenza con quanto scritto nel foglio e pertanto NON sostituisce la descrizione cartacea del progetto del controllore richiesta nel compito.

*Nota: Si riportino tutti i risultati numerici con almeno 3 cifre significative*

- 1 Gli equilibri del sistema si ottengono imponendo velocità e accelerazioni nulle, i.e.  $\dot{L} = \dot{\theta} = \ddot{L} = \ddot{\theta} = 0$ . Si ottiene così il sistema seguente, valutato per le condizioni di equilibrio  $\bar{l}$ ,  $\bar{\theta}$  e  $\bar{\tau}$  (con  $\bar{F}_d = 0$ ):

$$\begin{aligned} k_l \bar{l} &= k_l l_0 - mg \cos(\bar{\theta}) \\ k_r \bar{\theta} &= mgl \sin(\bar{\theta}) + \bar{\tau} \end{aligned}$$

Risolvendo in funzione di  $\bar{\theta}$  si ottengono le espressioni seguenti:

$$\begin{aligned} \bar{l} &= l_0 - \frac{mg}{k_l} \cos(\bar{\theta}) \\ \bar{\tau} &= \frac{m^2 g^2}{k_l} \sin(\bar{\theta}) \cos(\bar{\theta}) - mgl_0 \sin(\bar{\theta}) + k_r \bar{\theta} \end{aligned}$$

- 2 Indicando con  $x$  il vettore degli stati del sistema, vale a dire  $x = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T := [L \ \theta \ \dot{L} \ \dot{\theta}]^T$ , e con  $u := [\tau \ F_d]^T$  il vettore degli ingressi, la dinamica del sistema non lineare espressa in forma di stato risulta:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_3 \\ \dot{x}_2 &= x_4 \\ \dot{x}_3 &= \frac{1}{m_1} [-u_2 - b_l x_3 - k_l x_1 + m x_1 x_4^2 - mg \cos(x_2) + k_l l_0] \\ \dot{x}_4 &= \frac{1}{m x_1^2} [u_1 - b_r x_4 - k_r x_2 + mg x_1 \sin(x_2) - 2m x_1 x_3 x_4] \end{aligned}$$

$$y = l \cos(x_2)$$

Definendo le nuove variabili  $\tilde{x} := x - \bar{x}$ ,  $\tilde{u} := u - \bar{u}$  e  $\tilde{y} := y - \bar{y}$ , una approssimazione al primo ordine (lineare) del sistema dato risulta:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + B\tilde{u} \\ \tilde{y} = C\tilde{x} + D\tilde{u} \end{cases}$$

con  $A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=\bar{x}, u=\bar{u}}$ ,  $B = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{x=\bar{x}, u=\bar{u}}$ ,  $C = \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{x=\bar{x}, u=\bar{u}}$ ,  $D = \left. \frac{\partial h}{\partial u} \right|_{x=\bar{x}, u=\bar{u}}$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_l}{m} & & & & \\ \frac{1}{m^2 \bar{x}_1^4} [m^2 g \bar{x}_1^2 \sin(\bar{x}_2) - 2m \bar{x}_1 (\bar{u}_1 - k_r \bar{x}_2 + mg \bar{x}_1 \sin(\bar{x}_2))] & \frac{g \sin(\bar{x}_2)}{m \bar{x}_1^2} & -\frac{b_l}{m} & 0 & -\frac{b_r}{m \bar{x}_1^2} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{m} \\ \frac{1}{m \bar{x}_1^2} & 0 \end{bmatrix} \quad C = [\cos(\bar{x}_2) \quad -\bar{x}_1 \sin(\bar{x}_2) \quad 0 \quad 0] \quad D = [0 \quad 0].$$

- 3 Sostituendo i valori numerici per le variabili coinvolte, si ottengono le seguenti espressioni (con le opportune unità di misura):

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -5 & 3.7541 & -0.4472 & 0 \\ 0.3695 & 2.8435 & 0 & -0.8804 \end{bmatrix} \quad B = 10^{-3} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -0.2674 \\ 0.263 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = [0.9239 \quad -1.2197 \quad 0 \quad 0] \quad D = [0 \quad 0]$$

Indicando con  $B_\tau$  e  $D_\tau$  la prima colonna delle matrici  $B$  e  $D$ , corrispondenti all'ingresso  $\tau$ , e con  $B_d$  e  $D_d$  la seconda colonna, corrispondenti all'ingresso di disturbo  $F_d$ , le funzioni di trasferimento cercate si possono ottenere calcolando:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1} B_\tau + D_\tau = -3.2102 \cdot 10^5 \frac{(s^2 + 0.4472s + 2.156)}{(s + 2.227)(s - 1.355)(s^2 + 0.456s + 5.171)}$$

$$G_d(s) = C(sI - A)^{-1} B_d + D_d = -2.4703 \cdot 10^{-4} \frac{(s + 2.318)(s - 1.437)}{(s + 2.227)(s - 1.355)(s^2 + 0.456s + 5.171)}$$

La funzione di trasferimento del sistema presenta 1 polo a parte reale positiva. Questo permette di concludere che il sistema è instabile.

- 4 Per quanto riguarda il controllore è opportuno procedere alla progettazione di un sistema in cascata con doppio anello di retroazione - l'anello interno con il solo scopo di stabilizzare il sistema, l'anello esterno con lo scopo di soddisfare le specifiche richieste.

Si procede alla progettazione lavorando sul luogo delle radici; la forma del luogo ottenuto dalla funzione di trasferimento del sistema è riportato in figura 1. Un possibile approccio per la progettazione di un

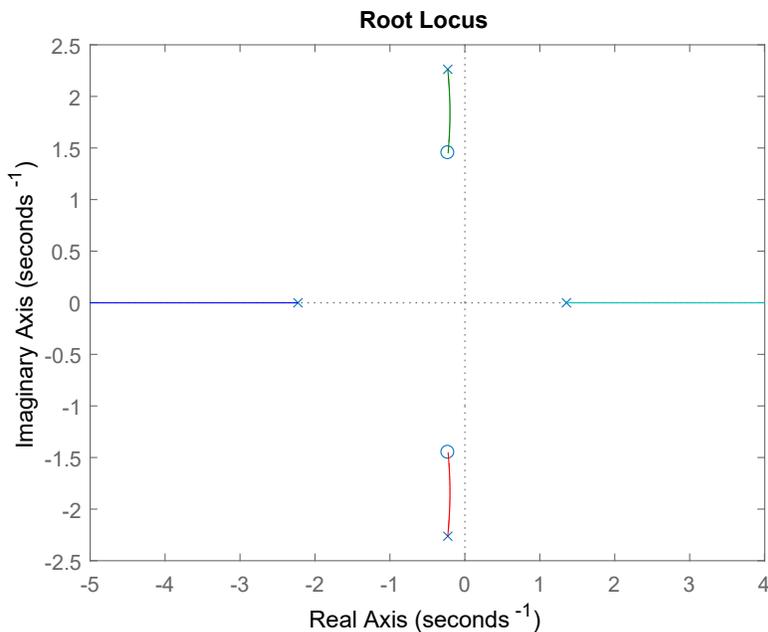


Figura 1: rlocus(G)

controllore stabilizzante è basato su un cambio di segno del guadagno e quindi sul luogo inverso che assume la forma il figura 2 Osservando il luogo delle radici si nota che è sufficiente agire sul guadagno del controllore affinché tutte le radici del sistema in anello (interno) chiuso si trovino nel semipiano di asintotica stabilità. In particolare con un guadagno pari a  $-2.4 \cdot 10^5$  si ottiene il risultato di stabilizzare il sistema con le radici che occupano le posizioni indicate nel grafico di figura 3 Il controllore risultante ha quindi la seguente semplice espressione:  $C_1(s) = -2.4 \cdot 10^5$

Adesso, è possibile procedere alla progettazione del controllore  $C_2(s)$  per il soddisfacimento delle specifiche, con una funzione di trasferimento dell'anello interno pari a

$$G_{c1}(s) = \frac{C_1(s)G(s)}{1+C_1(s)G(s)} = 7.7046 \frac{s^2+0.4472s+2.156}{(s+0.426)(s+0.2442)(s^2+0.6574s+9.71)}$$

e con una funzione di trasferimento tra il disturbo e l'uscita pari a

$$G_{dc1}(s) = \frac{G_d(s)}{1+C_1(s)G(s)} = -2.4703 \cdot 10^{-4} \frac{(s+2.318)(s-1.437)}{(s+0.426)(s+0.2442)(s^2+0.6574s+9.71)}$$

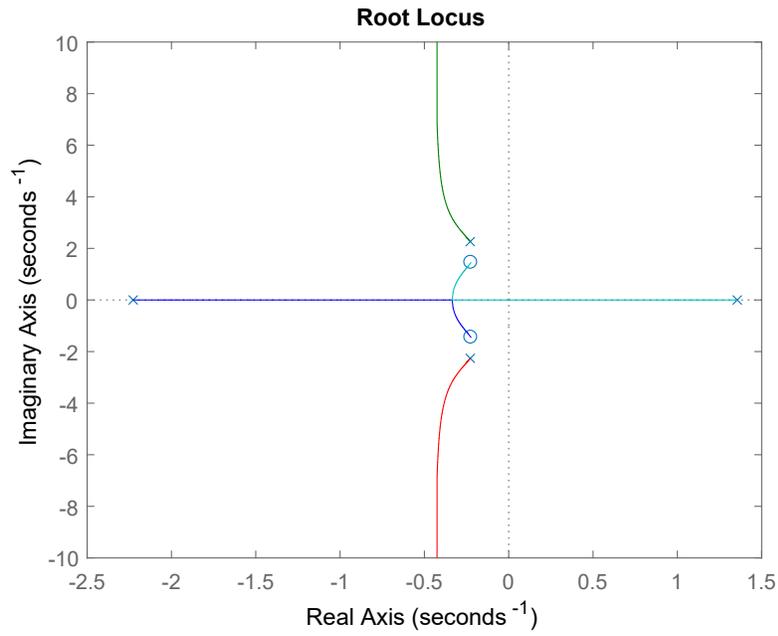


Figura 2: rlocus(G) - luogo inverso

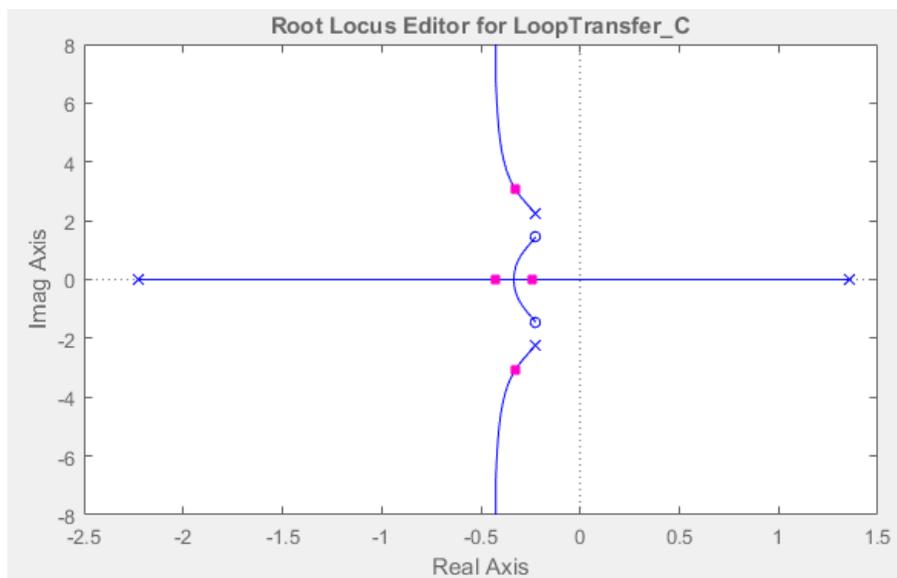


Figura 3: rlocus(Gv) - con controllore

4.1 Si procede anzitutto a progettare un controllore che consenta di soddisfare le specifiche relative alla risposta al gradino. Si chiede che il sistema, partendo da una condizione di equilibrio pari a  $\bar{d} = \bar{l} \cos \bar{\theta} = 2.945 m$ , sia portato ad una uscita pari a  $d_\infty = 3.045 m$ , vale a dire un'ampiezza del gradino pari a  $0.1 m$ :

- si richiede che il valore desiderato venga raggiunto con un errore massimo di  $0.001 m$  corrispondente al 1% dell'ampiezza del gradino. Questa condizione si traduce in una specifica sul guadagno statico del sistema in anello (esterno) aperto, in particolare:

$$\left\| \frac{0.1}{1 + C_2(0)G_{c1}(0)} \right\| < 0.001 \Rightarrow \|C_2(0)G_{c1}(0)\| > \frac{0.1}{0.001 - 1} \Rightarrow \|C_2(0)G_{c1}(0)\|_{dB} > 39dB$$

- si richiede che il valore desiderato venga raggiunto senza mai superare la distanza di  $3.05 m$  dal suolo  $\Rightarrow$  è ammessa sovraelongazione pari a  $S\% = \frac{|d_{max} - d_\infty|}{|d_\infty - \bar{d}|} \cdot 100 = \frac{0.005}{0.1} \cdot 100 = 5\%$ . Secondo tale condizione il sistema in anello chiuso può essere approssimato da un sistema del secondo ordine (approssimazione a due poli dominanti) con smorzamento minimo ammissibile ottenuto invertendo la relazione  $S = e^{-\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}}$ .

$$d > \sqrt{\frac{(\ln(S))^2}{\pi^2 + (\ln(S))^2}} \Rightarrow d > 0.69$$

Questo si traduce in una condizione sul margine di fase minimo, secondo la relazione approssimata:

$$M_f > 0.69 \cdot 100 \Rightarrow M_f > 69^\circ$$

- si richiede inoltre che la distanza  $d$  dal suolo entri entro  $0.5 s$ , senza più uscirne nell'intervallo  $[3.04, 3.05]m$ . Si tratta di una specifica sul tempo di assestamento al  $p\% = \frac{3.045 - 3.04}{0.1} 100 = 5\%$  (considerando l'altro estremo dell'intervallo assegnato si ottiene lo stesso valore  $p\% = \frac{3.05 - 3.045}{0.1} 100 = 5\%$ ) che si traduce in una specifica sulla pulsazione di taglio  $\omega_t \geq \frac{3}{0.69 \cdot 0.5} \Rightarrow \omega_t \geq 8.7 rad/s$

4.2 Una volta chiuso anche l'anello esterno, l'uscita è legata al disturbo dalla funzione di trasferimento

$$\frac{Y(s)}{F_d(s)} = \frac{G_{dc1}(s)}{1 + C_2(s)G_{c1}(s)}$$

Secondo il teorema della risposta armonica, la specifica è assicurata se per le pulsazioni di interesse  $\omega_d < 0.01 rad/s$ , è rispettato il seguente vincolo sul modulo della funzione di trasferimento  $\frac{Y(s)}{F_d(s)}$ .

$$\frac{\|G_{dc1}(j\omega_d)\|}{\|1 + C_2(j\omega_d)G_{c1}(j\omega_d)\|} < \frac{10^{-3}}{100} \Rightarrow \frac{\|G_{dc1}(j\omega_d)\|}{\|1 + C_2(j\omega_d)G_{c1}(j\omega_d)\|} < 10^{-5}$$

Essendo a bassa frequenza, vale l'approssimazione  $\|1 + C_2(j\omega_d)G_{c1}(j\omega_d)\| \approx \|C_2(j\omega_d)G_{c1}(j\omega_d)\|$ , possiamo tradurre la specifica in un vincolo sul modulo della funzione di trasferimento di anello aperto, infatti, passando ad esprimere i moduli in decibel, otteniamo:

$$\|C_2(j\omega_d)G_{c1}(j\omega_d)\|_{dB} > \|G_{dc1}(j\omega_d)\|_{dB} - 20 \log_{10}(10^{-5})$$

dal diagramma di Bode del modulo della funzione di trasferimento  $G_{dc1}(s)$  per le pulsazioni di interesse (figura 4) si ricava il valore ( $-86dB$ ) che massimizza il modulo considerato, e quindi, la condizione che permette di soddisfare la specifica risulta:

$$\|C_2(j\omega_d)G_{c1}(j\omega_d)\|_{dB} > -61.8dB + 100dB \Rightarrow \|C_2(j\omega_d)G_{c1}(j\omega_d)\|_{dB} > 38.2dB$$

4.3 L'uscita è legata al rumore di misura dalla funzione di sensitività complementare, cambiata di segno:

$$\frac{Y(s)}{\nu(s)} = -\frac{C_2(s)G_{c1}(s)}{1 + C_2(s)G_{c1}(s)}$$

Per un disturbo in alta frequenza  $\omega_\nu > 5000 rad/s$ , vale l'approssimazione

$$\left\| \frac{Y(j\omega_\nu)}{\nu(j\omega_\nu)} \right\| \approx \|C_2(j\omega_\nu)G_{c1}(j\omega_\nu)\|$$

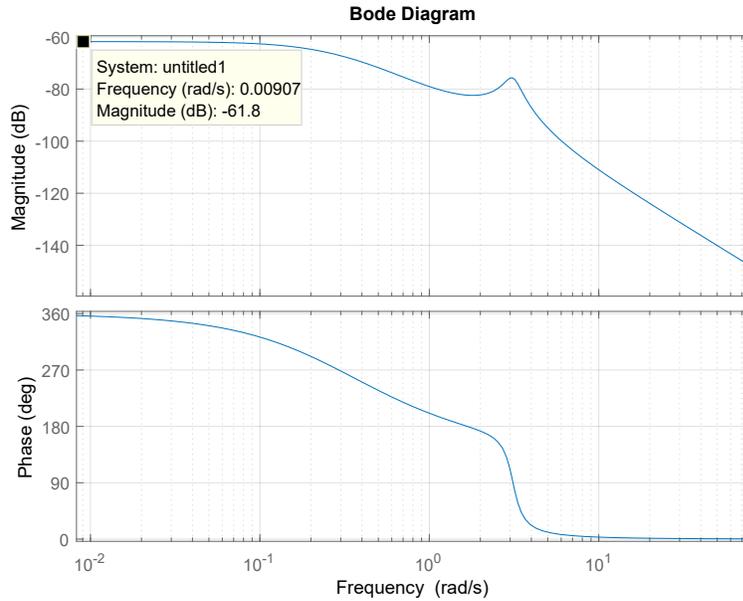


Figura 4: bode( $G_{dc1}$ )

per cui, detta  $A_N$  l'ampiezza del rumore di misura, la specifica si traduce in

$$\|C(j\omega_\nu)G_1(j\omega_\nu)\| < \frac{0.01A_N}{A_N} = 0.01$$

o, in decibel,  $-40$  dB.

Si noti che la conoscenza dell'ampiezza  $A_N$  sarebbe superflua.

Una volta tradotte tutte le specifiche, riportate sul diagramma di Bode in figura 5, è possibile procedere al progetto del controllore. Per il soddisfacimento delle specifiche statiche è necessario aumentare il guadagno del controllore fino ad ottenere il diagramma di Bode di figura 6, corrispondente a  $C_{2statiche}(s) = 7$ . Per il soddisfacimento delle specifiche dinamiche è opportuno agire con un'azione anticipatrice, in particolare per rispettare il vincolo sul margine di fase. Aggiungendo una doppia rete anticipatrice che dia luogo ad un controllore complessivo del tipo  $C_2(s) = 7 \frac{(1+0.2s)(1+0.5s)}{(1+0.025s)(1+0.0034s)}$ , corrispondente a due zeri in 2 e 5 e due poli in 40 e 290, si ottiene il soddisfacimento di tutte le specifiche imposte come si può osservare dal diagramma di Bode riportato in figura 7.

L'analisi della risposta al gradino (figura 8) del sistema controllato ed in particolare le principali caratteristiche che si possono dedurre confermano che le specifiche sono soddisfatte:

- tempo di assestamento al 5% pari a  $0.2 s$  ( $< 0.5 s$ )
- sovralongazione nulla ( $< 5\%$ )

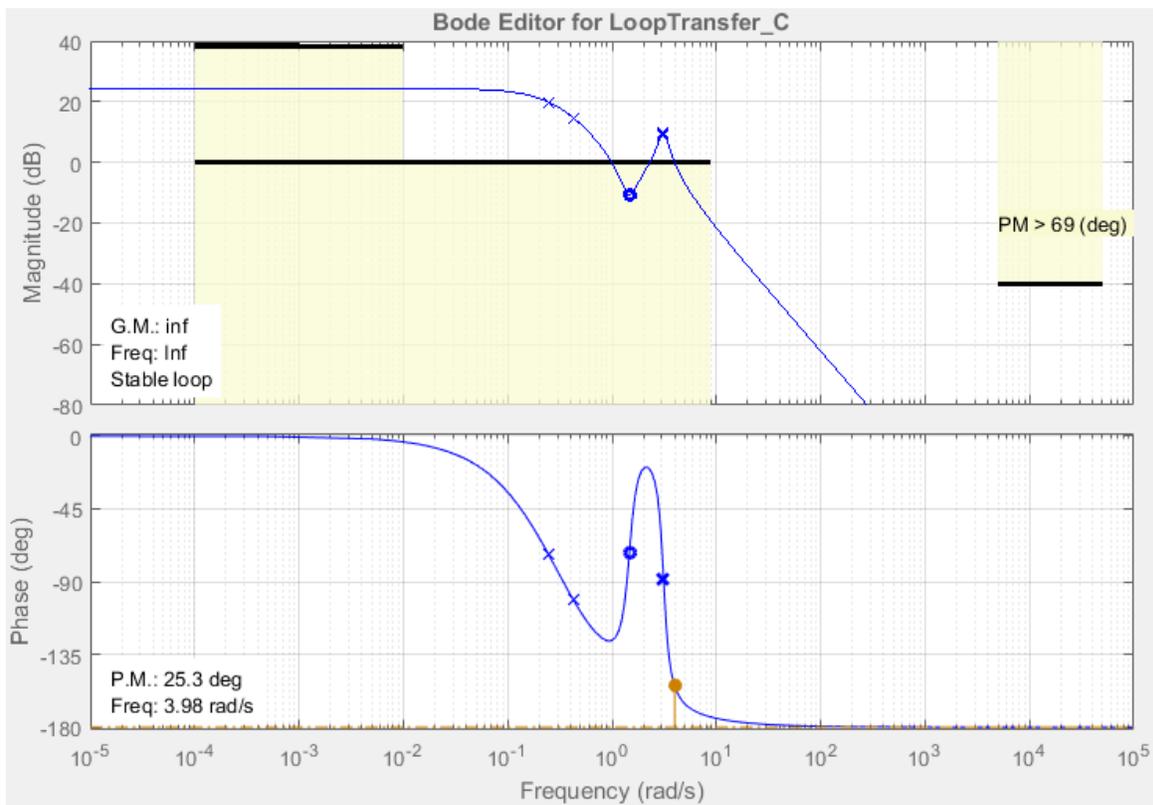


Figura 5: Diagramma di Bode di  $G_{cl}(s)$  con specifiche richieste

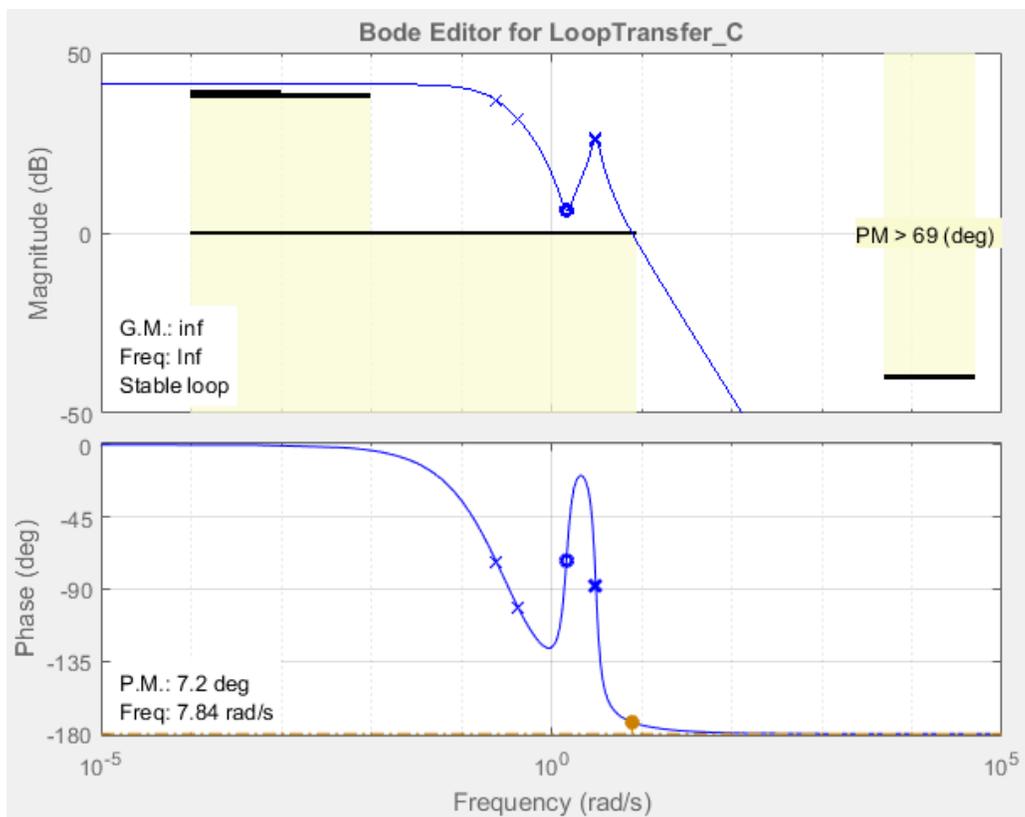


Figura 6: Diagramma di Bode del sistema controllato per il soddisfacimento delle specifiche statiche

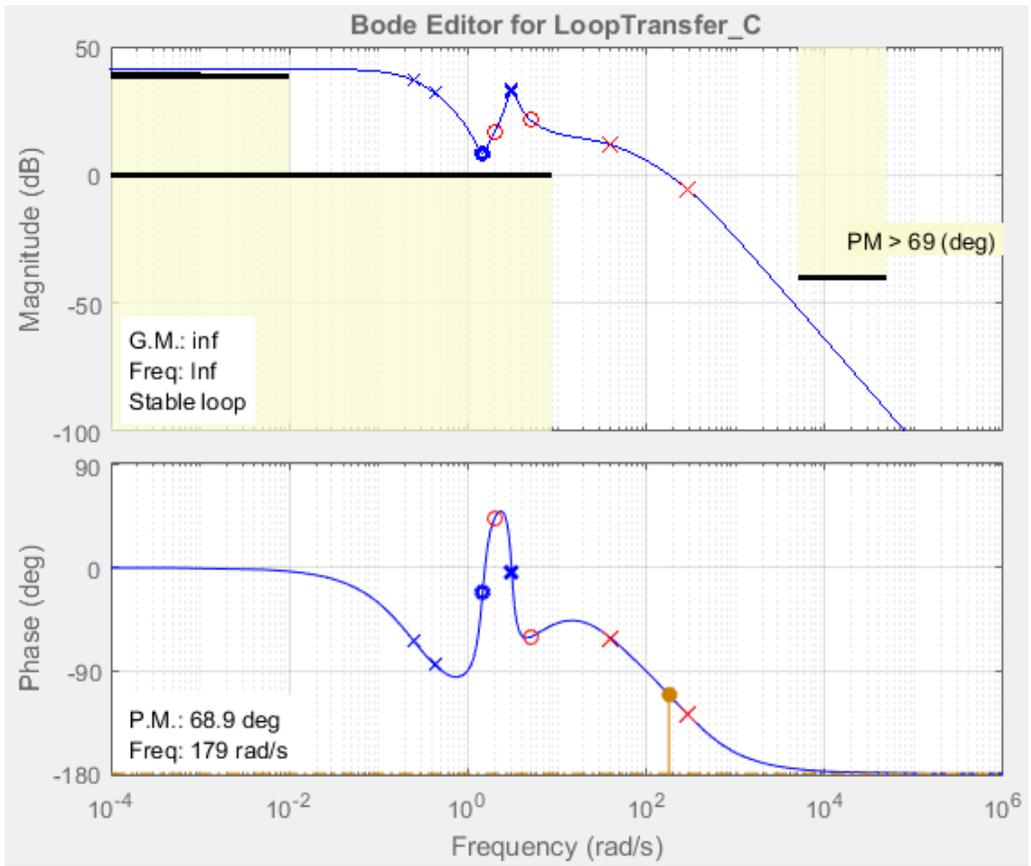


Figura 7: Diagramma di Bode del sistema controllato con soddisfacimento delle specifiche

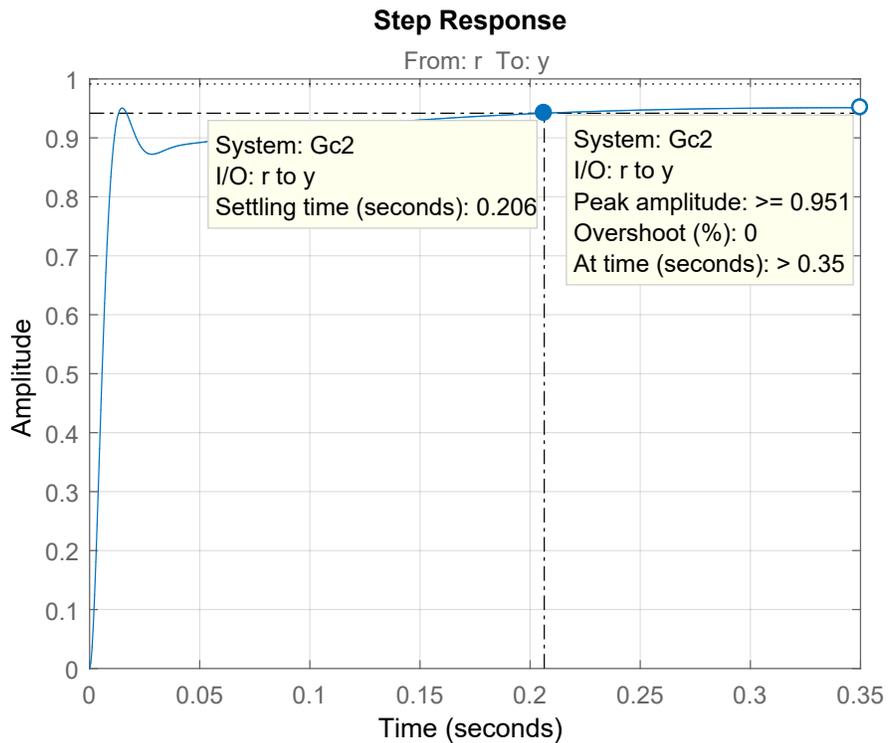


Figura 8: Risposta al gradino del sistema controllato