

Università degli Studi di Pisa
Facoltà di Ingegneria

**Centro Interdipartimentale
“Enrico Piaggio”**

APPUNTI DELLE LEZIONI

Dinamica e Controllo dei Veicoli Robotici

Corso di “Robotica Industriale”

Indice

1	Cinematica Vincolata	4
1.1	Introduzione	4
1.1.1	Il Teorema del Dini	5
1.2	Carrello vincolato	7
1.2.1	Binario rettilineo	7
1.2.2	Binario circolare	9
1.3	L'unicyclo e il biciclo	10
1.3.1	Unicyclo	10
1.3.2	Unicicli cooperanti	13
1.3.3	Biciclo	15
2	Controllo cinematico dei veicoli	19
2.1	Introduzione	19
2.1.1	I criteri di stabilità di Lyapunov	20
2.1.2	Cambiamenti di coordinate nello spazio di stato	22
2.2	Controllo sul modello cinematico	25
2.2.1	Path following	26
2.2.2	Trajectory tracking	40
2.2.3	Point-to-point motion: il Teorema di Brockett	45
2.3	Controllo del biciclo come un unicyclo: il backstepping	52
2.3.1	Controlli per il biciclo	52
2.3.2	Studio di $\hat{\psi}$ e $\dot{\hat{\psi}}$	56
2.3.3	Controllore alternativo in backstepping	57
3	Dinamica dei veicoli	64
3.1	Introduzione	64
3.2	Dinamica di un carrello vincolato	66
3.2.1	Binario rettilineo	66
3.2.2	Binario circolare	67
3.3	Dinamica dell'unicyclo e del biciclo	69
3.3.1	Unicyclo	69

3.3.2	Unicicli cooperanti	71
3.3.3	Biciclo	74
4	Controllo dinamico dei veicoli	79
4.1	Introduzione	79
4.2	Integratore backstepping	79
4.3	Path following	82
4.4	Trajectory Tracking	86
4.5	Point-To-Point Motion	89
5	Controllo di Veicoli Mediante Linearizzazione in Retroazione	94
5.1	Introduzione alla linearizzazione in retroazione	94
5.1.1	Formulazione del problema nel caso SISO	95
5.1.2	Linearizzazione input-stati	96
5.1.3	Linearizzazione input-output	97
5.1.4	Estensione al caso MIMO	99
5.1.5	Linearizzazione in retroazione dinamica	103
5.2	Uniciclo	103
5.2.1	Path Following	104
5.2.2	Trajectory Tracking	112
5.3	Biciclo	130
5.3.1	Path Following	130
5.3.2	Trajectory Tracking	139

Capitolo 1

Cinematica Vincolata

1.1 Introduzione

Si prenda in considerazione il modello cinematico di un sistema meccanico senza vincoli, espresso secondo un set di coordinate $q \in Q \subseteq \mathbb{R}^n$:

$$\dot{q} = f(q). \quad (1.1)$$

Essendo il modello cinematico senza vincoli, è possibile imporre una velocità arbitraria lungo ognuna delle direzioni dello spazio di stato Q del sistema. Questa apparente incongruenza con la percezione comune che si ha di qualsiasi sistema meccanico deriva dall'aver completamente trascurato tutti gli effetti dinamici presenti sul sistema. Nel caso di modello cinematico senza vincoli, la trattazione teorica non ha alcun significato, essendo sempre possibile de facto un qualsiasi moto arbitrario.

Si supponga perciò che alcune coordinate q_i , con $i = 1, \dots, r \leq n$, siano vincolate fra di loro. I vincoli possono esprimere dei legami riguardanti direttamente le variabili di stato q_i o la loro velocità \dot{q}_i . Esempi di vincoli di posizione, o *olonomi*, sono esprimibili come:

$$\begin{aligned} \bar{C}_v(q) &= 0 \\ \bar{C}_v(q, t) &= 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

Qualora, come nella prima equazione in (1.2), il vincolo sia indipendente dal tempo viene detto *scleronomo*, *reonomo* se tempo variante. I vincoli olonomi esprimono un legame geometrico tra le varie coordinate del sistema robotico in esame.

Se fra le coordinate generalizzate q sussiste un vincolo cinematico, del tipo $C_v(\dot{q}, q, t)$, può non esistere alcun vincolo olonomo corrispondente. Tali

vincoli *anonomi*, o *non-olonomi*, possono essere ottenuti anche per semplice derivazione di un vincolo olonomo $\bar{C}_v(q, t)$:

$$C_v(\dot{q}, q, t) = \frac{d}{dt} (\bar{C}_v(q, t)) = \frac{\partial \bar{C}_v(q, t)}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial \bar{C}_v(q, t)}{\partial t} = 0. \quad (1.3)$$

I vincoli anonomi tempo invarianti possono essere espressi anche in una forma diversa dalla (1.3), detta *Forma Pfaffiana*:

$$\frac{\partial C_v(\dot{q}, q, t)}{\partial q} \dot{q} = A(q) \dot{q} = 0. \quad (1.4)$$

L'anonomia rende dipendenti tra loro le velocità del sistema \dot{q} . Nel modello cinematico del sistema vincolato, le traiettorie ammissibili saranno soltanto quelle che verificano, istante per istante, il vincolo anonomo. Questo è possibile se e solo se $\dot{q} \in \ker(A(q)) \forall q$. In particolare, le velocità ammissibili saranno:

$$\dot{q} = S(q)\nu, \quad (1.5)$$

dove $S(q)$ è una matrice base di $\ker(A(q))$. Questo tipo di approccio prende il nome di *Metodo delle Quasi Velocità*, dove $\nu \in \mathbb{R}^m$ è il vettore delle quasi velocità. Il vettore di ingresso ν del modello cinematico così ricavato genera soltanto traiettorie compatibili con i vincoli anonomi del sistema, infatti:

$$A(q)\dot{q} = A(q)S(q)\nu = 0. \quad (1.6)$$

Le equazioni vincolari (1.4) ed il relativo metodo riportato in (1.5), rappresentano un importante strumento per lo studio delle proprietà dei sistemi non lineari con vincoli anonomi. Nella robotica mobile, la semplicità costruttiva determina spesso la comparsa di vincoli anonomi, perciò lo studio dei metodi introdotti fin qui facilita lo studio ed il controllo di questi particolari sistemi meccanici.

1.1.1 Il Teorema del Dini

I vincoli olonomi esprimono un legame geometrico tra le varie coordinate del sistema robotico in esame, rendendole dipendenti tra di loro ed eliminabili con il Teorema delle funzioni implicite, noto anche come *Teorema del Dini*. Se ne riporta di seguito l'enunciato per funzioni in \mathbb{R}^2 .

Teorema 1.1. *Sia D un insieme aperto in \mathbb{R}^2 , sia $f \in C^1(D)$, sia $(x_0, y_0) \in D$ e si supponga inoltre che:*

1. $f(x_0, y_0) = 0$

$$2. \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$$

Allora esistono due costanti positive a e b ed una funzione $F : (x_0 - a, x_0 + a) \rightarrow (y_0 - b, y_0 + b)$ tali che:

$$f(x, y) = 0 \quad \forall (x, y) \in \{(x_0 - a, x_0 + a) \times (y_0 - b, y_0 + b)\} \Leftrightarrow y = F(x)$$

Inoltre, $F \in C^1((x_0 - a, x_0 + a))$ e:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, F(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, F(x))}$$

Si consideri, ad esempio la seguente funzione:

$$f(x, y) = e^{xy} - x + y - 1 \rightarrow f(0, 0) = 0$$

e se ne calcolino le derivate parziali della funzione f :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= ye^{xy} + 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= xe^{xy} - 1 \end{aligned}$$

Osservando che $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = -1 \neq 0$, è possibile applicare il Teorema del Dini, il quale ci dice che esiste una funzione $F(x)$ tale che le soluzioni del problema sono date localmente dai punti $(x, F(x))$. In questo modo sappiamo che esistono altre soluzioni dell'equazione $f(x, y) = 0$, funzione di una sola variabile.

Il Teorema del Dini, nella forma più generale ed utile per i nostri scopi è il seguente:

Teorema 1.2. *Sia D un insieme aperto in \mathbb{R}^{n+m} e sia data la funzione vettoriale*

$$f^* : D \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad f^* = (f_1, f_2, \dots, f_m)^T$$

con $f_1, f_2, \dots, f_m \in C^1(D)$. Si indichi con $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e con $\bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_m)$. Siano

$$\begin{aligned} J_x &= \frac{\partial f^*}{\partial \bar{x}} \\ J_y &= \frac{\partial f^*}{\partial \bar{y}} \end{aligned}$$

dove $J_x \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $J_y \in \mathbb{R}^{m \times m}$. Si supponga inoltre che in $(\bar{x}_0, \bar{y}_0) = (x_1^0, \dots, x_n^0, y_1^0, \dots, y_m^0) \in D$ siano verificate le seguenti condizioni:

1. $f^*(\bar{x}_0, \bar{y}_0) = (0, 0, \dots, 0)$
2. $\det(J_y) \neq 0$

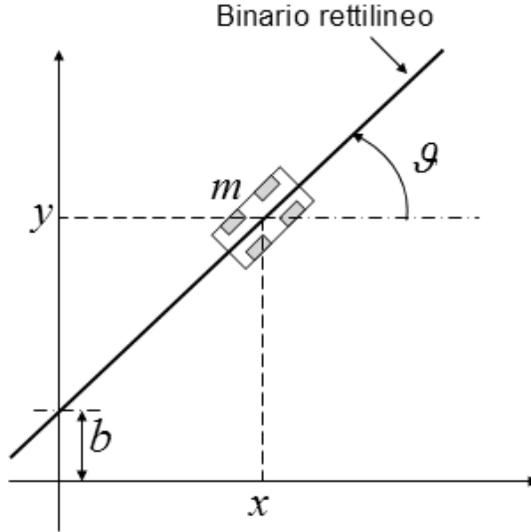


Figura 1.1: Carrello vincolato su un binario rettilineo. Le coordinate generalizzate del carrello sono $q = [x, y, \theta]^T$.

Allora esiste un intorno $W = D_x \times D_y$ di (\bar{x}_0, \bar{y}_0) , con $D_x \in \mathbb{R}^n$ e $D_y \in \mathbb{R}^m$, ed una funzione vettoriale $F^* : D_x \rightarrow D_y$ tale che:

$$f^*(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 0, \dots, 0) \quad \forall (\bar{x}, \bar{y}) \in \{D_x \times D_y\} \Leftrightarrow \bar{y} = F(\bar{x})$$

Inoltre, $F^* \in C^1(D_x)$ e:

$$\frac{\partial F^*}{\partial \bar{x}}(\bar{x}) = -(J_y^{-1} J_x)(\bar{x}, F^*(\bar{x}))$$

1.2 Carrello vincolato

Prima di introdurre le caratteristiche cinematiche dei veicoli veri e propri introdurremo due esempi di sistemi vincolati atti a facilitare lo studio dei sistemi più complessi.

1.2.1 Binario rettilineo

Come primo esempio si consideri un carrello vincolato ad un binario rettilineo, rappresentato in figura 1.1. Il carrello ha una massa m ed un momento di inerzia rispetto all'asse verticale Z pari a I_z . Le coordinate generalizzate siano $q = [x, y, \theta]^T$.

Il vincolo presente nel sistema è relativo al binario rettilineo. L'equazione della retta individuata dal binario rettilineo può essere descritta con $y = x \tan \theta_b + b$, dove θ_b è l'inclinazione costante del binario rispetto all'asse X . Il primo vincolo sarà quindi:

$$\begin{cases} \bar{C}_v^1(q) = y - x \tan \theta_b - b = 0 \\ \frac{d(\bar{C}_v^1(q))}{dt} = \dot{y} - \dot{x} \tan \theta_b = 0 \end{cases} . \quad (1.7)$$

Il secondo vincolo esprime l'uguaglianza, istante per istante, fra l'angolo del carrello e l'inclinazione del binario rettilineo:

$$\begin{cases} \bar{C}_v^2(q) = \theta - \theta_b = 0 \\ \frac{d(\bar{C}_v^2(q))}{dt} = \dot{\theta} = 0 \end{cases} . \quad (1.8)$$

I due vincoli espressi in forma Pfaffiana sono:

$$A(q)\dot{q} = \begin{bmatrix} \sin \theta_b & -\cos \theta_b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = 0, \quad (1.9)$$

dove è possibile notare come il rango della matrice $A(q)$ sia costante e pari a due al variare della configurazione del binario.

Lo spazio nullo della matrice sarà quindi di dimensione unitaria e pari a:

$$S(q) = \begin{bmatrix} \cos \theta_b \\ \sin \theta_b \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (1.10)$$

che permette di esprimere il legame tra la velocità delle coordinate generalizzate \dot{q} con le quasi velocità ν :

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} \cos \theta_b \\ \sin \theta_b \\ 0 \end{bmatrix} \nu. \quad (1.11)$$

Osservazione 1.1. *I due vincoli presenti in questo esempio sono chiaramente olonomi, limitando di fatto le posizioni geometriche raggiungibili dal carrello. Si noti come possono essere eliminati dal sistema una volta che si tenga in considerazione la sola coordinata indipendente relativa all'unico grado di libertà posseduto dal sistema, cioè la posizione assunta dal carrello sulla retta di pendenza θ_b .*

In maniera più rigorosa, applicando il Teorema del Dini è possibile giungere agli stessi risultati. Per far questo è sufficiente mostrare che $\bar{x} \in \mathbb{R}$ e $\bar{y} \in \mathbb{R}^2$, con $f^ : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$:*

$$f^* = \begin{bmatrix} y - x \tan \theta_b - b \\ \theta - \theta_b \end{bmatrix}$$

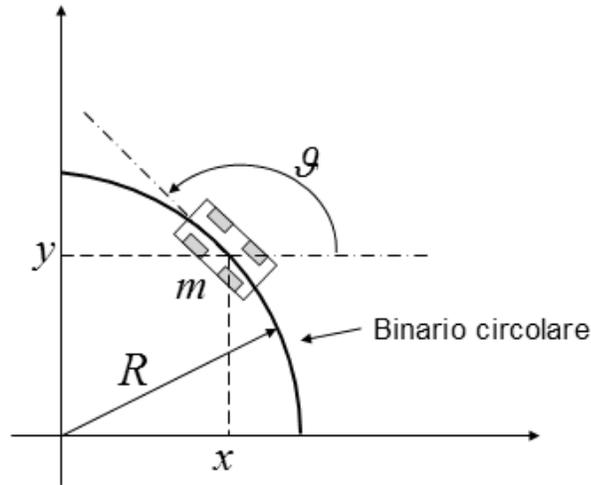


Figura 1.2: Carrello vincolato su un binario circolare di raggio costante R . Le coordinate generalizzate del carrello sono $q = [x, y, \theta]^T$.

Notando che $J_y = I_2$ (matrice identica in \mathbb{R}^2), è possibile ridurre il sistema alla sola coordinata libera x e calcolare immediatamente $\bar{y} = F^*(\bar{x})$.

Derivare i vincoli e portarli in forma Pfaffiana ci permette di ottenere lo stesso risultato in maniera sistematica.

1.2.2 Binario circolare

Nel secondo esempio il carrello è vincolato su un binario circolare, rappresentato in figura 1.2. Le coordinate generalizzate siano nuovamente $q = [x, y, \theta]^T$.

Come nell'esempio precedente, si procede con l'individuazione dei vincoli. Stavolta l'equazione che descrive il binario circolare è $x^2 + y^2 = R^2$. Il caso di binario circolare con centro diverso dall'origine aggiunge solo alcune complicazioni di calcolo ma non è rilevante per la trattazione teorica del metodo. Per il primo vincolo:

$$\begin{cases} \bar{C}_v^1(q) = x^2 + y^2 - R^2 = 0 \\ \frac{d(\bar{C}_v^1(q))}{dt} = 2x\dot{x} + 2y\dot{y} = 0 \end{cases} \quad (1.12)$$

Il secondo vincolo esprime il legame tra l'orientazione del carrello e la rotaia circolare. Il carrello sarà sempre orientato secondo la tangente alla

circonferenza descritta dal binario:

$$\begin{cases} \bar{C}_v^2(q) = \theta - \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{\pi}{2} = 0 \\ \frac{d(\bar{C}_v^2(q))}{dt} = \dot{\theta} + \frac{y}{R^2}\dot{x} - \frac{x}{R^2}\dot{y} = 0 \end{cases}, \quad (1.13)$$

I due vincoli espressi in forma Pfaffiana sono:

$$A(q)\dot{q} = \begin{bmatrix} x & y & 0 \\ y & -x & R^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = 0, \quad (1.14)$$

A questo punto è necessario calcolare una base del nucleo di $A(q)$, la quale sarà nuovamente di dimensione pari ad 1, come ad esempio:

$$S(q) = \begin{bmatrix} -y \\ x \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \dot{q} = \begin{bmatrix} -y \\ x \\ 1 \end{bmatrix} \nu \quad (1.15)$$

Osservazione 1.2. *Si noti come la quasi velocità ν rappresenti la velocità di avanzamento del carrello, diretta in modo che il carrello percorra il binario in senso antiorario.*

Osservazione 1.3. *Anche in questo secondo caso ci si trova di fronte a vincoli olonomi. Il sistema possiede nuovamente un solo grado di libertà.*

1.3 L'uniciclo e il biciclo

In questo paragrafo si presenteranno due tipologie di veicoli su ruote, particolarmente usati e studiati nel campo della robotica mobile a causa delle loro caratteristiche cinematiche e dinamiche: l'uniciclo ed il biciclo. Questa tipologia di veicoli ricopre gran parte delle problematiche legate allo studio del controllo che si incontrano comunemente nei sistemi meccanici mobili, pur mantenendo una certa semplicità descrittiva e costruttiva.

1.3.1 Uniciclo

Il modello di tipo *uniciclo* è di rilevanza in robotica, perché rappresenta una vasta serie di veicoli di uso comune, utilizzati principalmente nell'industria come agenti per il trasporto e la movimentazione di merci. Sono in genere movimentati da ruote, anche se i veicoli dotati di cingoli, con dinamica di tipo *skid steering*, rientrano in questa categoria. Generalmente l'attuazione è trasmessa al veicolo grazie a due motori indipendenti situati sullo stesso

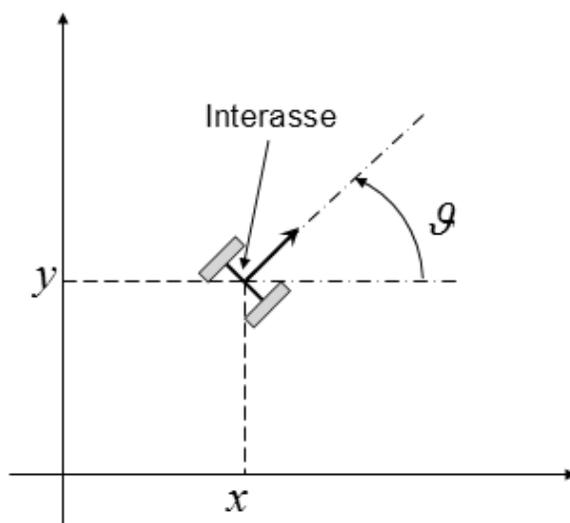


Figura 1.3: Veicolo uniclo. Una possibile scelta delle coordinate è $q = [x, y, \theta]^T$.

interasse che agiscono su due ruote indipendenti ma non sterzanti. La caratteristica principale di un uniclo è il poter ruotare liberamente senza un limite di curvatura: questo permette rotazioni che lasciano invariata la posizione, cioè rotazioni attorno all'asse verticale passante per il punto centrale dell'interasse delle ruote attuate. Ad un veicolo dotato delle caratteristiche sopra elencate, il moto lungo una direzione parallela all'interasse delle ruote sarà chiaramente negato.

La figura 1.3 riporta un veicolo di tipo uniclo. Le coordinate scelte per localizzare univocamente l'uniclo sul piano sono $q = [x, y, \theta]^T$, dove la coppia (x, y) indica la coordinata cartesiana del punto di mezzo dell'interasse del veicolo, punto per il quale passa istante per istante l'asse Z solidale al veicolo e perpendicolare al piano del moto, e con θ orientazione del veicolo rispetto all'asse orizzontale X .

L'impossibilità di moto nella direzione parallela all'interasse, si traduce in un vincolo sulle velocità \dot{q} . Questo unico vincolo può essere espresso nel modo seguente:

$$C_v^1(q, t) = \dot{x} \sin \theta - \dot{y} \cos \theta = 0. \quad (1.16)$$

Il vincolo (1.16) espresso in forma Pfaffiana è:

$$A(q)\dot{q} = \begin{bmatrix} \sin \theta & -\cos \theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = 0. \quad (1.17)$$

Si noti l'analogia con il primo vincolo definito sul carrello con binario rettilineo: anche in quel caso la direzione lungo la direzione dell'interasse delle ruote era interdotta dalla presenza del binario.

A questo punto è necessario calcolare una base nel nucleo di $A(q)$, la quale sarà senz'altro di dimensione pari a 2, come ad esempio:

$$S(q) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \dot{q} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \nu, \quad (1.18)$$

Come è stato evidenziato precedentemente, le quasi velocità ν forniscono l'insieme delle velocità per il carrello compatibili con il vincolo. Il legame $\dot{q} = S(q)\nu$ è quindi il modello cinematico del veicolo, ottenuto trascurando tutti i termini dinamici e mappando i possibili controlli come controlli di velocità, compatibili con i vincoli imposti dal problema reale. Nei veicoli reali, la dinamica è compensata da un controllore di basso livello, solitamente un PID che rende possibile il controllo del veicolo con ingressi di velocità compatibili con i vincoli: le quasi velocità $\nu = [\nu_1, \nu_2]^T$.

Dall'equazione (1.18) è possibile ricavare un'interpretazione fisica delle quasi velocità: ν_1 rappresenta la velocità lineare o di avanzamento del veicolo, essendo essa diretta perpendicolarmente al vincolo e quindi all'interasse delle ruote, mentre ν_2 è la velocità angolare attorno all'asse Z .

Osservazione 1.4. *Il vincolo imposto da questo particolare tipo di sistema dinamico è puramente anolonomo e non può essere ottenuto per derivazione di un vincolo olonomo. Il veicolo infatti può raggiungere qualsiasi punto del piano di moto (il sistema non lineare è completamente raggiungibile).*

Osservazione 1.5. *Dal punto di vista pratico e realizzativo, il veicolo unicyclo è controllato utilizzando direttamente le velocità di rotazione della ruota destra ω_r e sinistra ω_l indipendentemente. Questo perchè facilita la realizzazione dei controllori di coppia PID di basso livello impiegati per rendere possibile l'adozione del modello cinematico. In particolare si avrà la seguente relazione:*

$$\begin{cases} \nu_1 = \frac{r}{2}(\omega_r + \omega_l) \\ \nu_2 = \frac{r}{L_r}(\omega_r - \omega_l) \end{cases}$$

dove r è il raggio delle ruote attuate ed L_r è la lunghezza dell'interasse delle ruote. Si noti come questa relazione metta in risalto che ν_2 è positiva in senso antiorario.

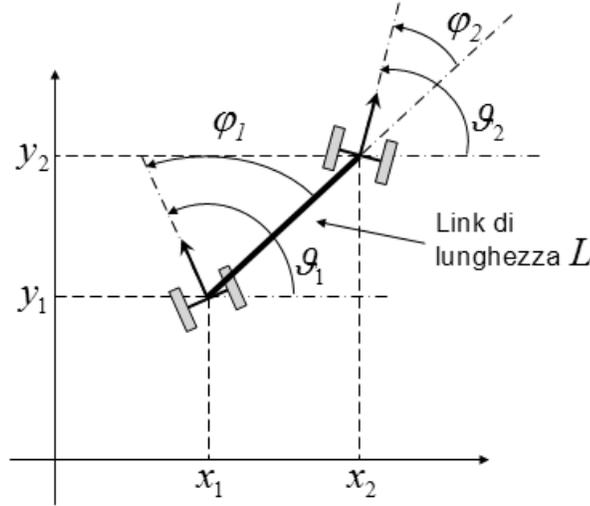


Figura 1.4: Due unicycli cooperanti. La distanza tra i due unicycli è costante e pari L . Una possibile scelta delle coordinate è $q = [x_1, y_1, \theta_1, \phi_1, \phi_2]^T$.

1.3.2 Unicycli cooperanti

Si consideri il sistema di figura (1.4). Le coordinate scelte per localizzare univocamente i due unicycli cooperanti sono $[x_i, y_i, \theta_i, \phi_i]^T$, con $i = 1, 2$. La coppia (x_i, y_i) indica la coordinata cartesiana del punto di mezzo dell'interasse del veicolo i -esimo, θ_i è l'orientazione del veicolo rispetto all'asse orizzontale X , mentre ϕ_i è l'angolo tra l'asta, di lunghezza L , che collega i due robot, e la normale all'interasse delle ruote. Notando che 8 coordinate sono superiori al numero necessario per individuare completamente il sistema alcune coordinate saranno dipendenti tra loro, dipendenza che in generale sarà non lineare. Infatti:

$$\begin{cases} \theta_2 = \theta_1 - \phi_1 + \phi_2 \\ x_2 = x_1 + L \cos(\theta_1 - \phi_1) \\ y_2 = y_1 + L \sin(\theta_1 - \phi_1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\theta}_2 = \dot{\theta}_1 - \dot{\phi}_1 + \dot{\phi}_2 \\ \dot{x}_2 = \dot{x}_1 - L(\dot{\theta}_1 - \dot{\phi}_1) \sin(\theta_1 - \phi_1) \\ \dot{y}_2 = \dot{y}_1 + L(\dot{\theta}_1 - \dot{\phi}_1) \cos(\theta_1 - \phi_1) \end{cases} \quad (1.19)$$

Il set minimo di variabili in grado di individuare univocamente il sistema sarà quindi $q = [x_1, y_1, \theta_1, \phi_1, \phi_2]^T$.

Osservazione 1.6. *Si noti come il vincolo sulla distanza tra i due unicycli, costante e pari ad L , sia già incorporato nelle (1.19). Le equazioni (1.19) possono essere viste come una applicazione del Teorema del Dini.*

L'impossibilità di moto nella direzione parallela all'interasse, si traduce in un vincolo sulle velocità \dot{q} , comune a tutti e due i veicoli. Questo unico vincolo può essere espresso nel modo seguente:

$$\begin{aligned} C_v^1(q, t) &= \dot{x}_1 \sin \theta_1 - \dot{y}_1 \cos \theta_1 = 0 \\ C_v^2(q, t) &= \dot{x}_2 \sin \theta_2 - \dot{y}_2 \cos \theta_2 = 0 \end{aligned} \quad (1.20)$$

Sostituendo in $C_v^2(q, t)$ le equazioni (1.19), i vincoli espressi in forma Pfaffiana saranno quindi:

$$A(q)\dot{q} = \begin{bmatrix} \sin \theta_1 & -\cos \theta_1 & 0 & 0 & 0 \\ \sin(\theta_1 - \phi_1 + \phi_2) & -\cos(\theta_1 - \phi_1 + \phi_2) & -L \cos(\phi_2) & L \cos(\phi_2) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (1.21)$$

le quali rappresentano un sistema a tre d.o.f., essendo lo spazio nullo almeno di dimensione tre:

$$\ker(A(q)) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} L \cos \phi_2 \cos \theta_1 \\ L \cos \phi_2 \sin \theta_1 \\ \sin(\phi_2 - \phi_1) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad (1.22)$$

Il modello cinematico, ottenuto con le quasi velocità ν è quindi:

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} L \cos \phi_2 \cos \theta_1 & 0 & 0 \\ L \cos \phi_2 \sin \theta_1 & 0 & 0 \\ \sin(\phi_2 - \phi_1) & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{bmatrix} \quad (1.23)$$

Anche in questo caso si possono dare delle interpretazioni fisiche alle quasi velocità. ν_1 è la velocità di avanzamento del veicolo uno in grado di rispettare il vincolo uniciclo e la distanza relativa dal veicolo numero due. Si noti come invertendo il pedice 1 con 2 si ottiene l'equazione cinematica del veicolo due (ovvio se si pensa alla simmetria del sistema e all'arbitrarietà della scelta delle coordinate). Le quasi velocità ν_2 e ν_3 sono una funzione delle velocità angolari dei due veicoli rispettivamente.

Osservazione 1.7. *Si consideri la matrice dei vincoli in forma Pfaffiana $A(q)$ ed il relativo spazio nullo nel caso in cui il sistema si trovi nella configurazione:*

$$\bar{q} = \begin{cases} \bar{x}_1 = \bar{x}_1 \\ \bar{y}_1 = \bar{y}_1 \\ \bar{\theta}_1 = \bar{\theta}_1 \\ \bar{\phi}_1 = \pm \frac{\pi}{2} \\ \bar{\phi}_2 = \pm \frac{\pi}{2} \end{cases} .$$

La matrice dei vincoli diverrà:

$$A(\bar{q}) = \begin{bmatrix} \sin \bar{\theta}_1 & -\cos \bar{\theta}_1 & 0 & 0 & 0 \\ \sin \bar{\theta}_1 & -\cos \bar{\theta}_1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

che ha uno spazio nullo di dimensione $\dim(\ker(A(\bar{q}))) = 4$. Il punto di singolarità \bar{q} fa quindi acquistare, istantaneamente, mobilità al sistema.

Si può infatti notare che in questa configurazione gli interassi dei due veicoli sono orientati secondo il link di unione di lunghezza L . Questo comporta che anche i vincoli di tipo unicycle sono allineati e rappresentano di fatto per la struttura un solo vincolo. Inoltre, in questa configurazione, l'ulteriore vincolo imposto dal link di congiunzione è istantaneamente rispettato, dato che il moto istantaneo lungo questa direzione è interdetto dal vincolo unicycle. Le altre configurazioni con interassi paralleli hanno comunque $\dim(\ker(A(\bar{q}))) = 3$ a causa di questo ultimo vincolo, che altrimenti sarebbe violato.

Osservazione 1.8. *Il modello in studio in queste note può essere generalizzato al caso di sistemi composti da un numero n arbitrario di unicycli cooperanti.*

1.3.3 Biciclo

Un biciclo è la schematizzazione di un unicycle con un secondo unicycle collegato rigidamente, cioè a distanza fissa. Essendo un caso particolare del caso di unicycli cooperanti, si pone di solito l'angolo di aggancio tra il link di collegamento ed il secondo unicycle costantemente pari a $\frac{\pi}{2}$, mentre la trazione può essere relativa all'anteriore o al posteriore. Nella figura 1.5 è rappresentato un veicolo biciclo. Due possibili scelte per le coordinate relative alla posizione del biciclo sono $q_a = [x_a, y_a, \theta, \phi]^T$ o $q_p = [x_p, y_p, \theta, \phi]^T$, dove (x_a, y_a) e (x_p, y_p) sono rispettivamente le coordinate del centro dell'interasse dell'unicycle anteriore e posteriore, dove θ è l'orientazione del link di connessione rispetto all'asse X e dove ϕ è l'orientazione dell'unicycle anteriore rispetto al link di connessione. Sono necessarie solo quattro coordinate

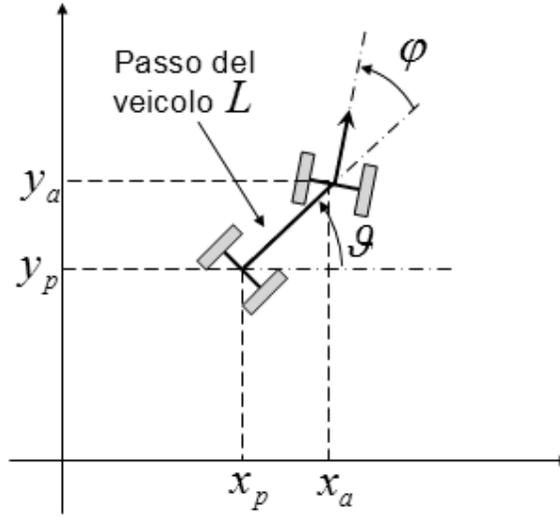


Figura 1.5: Veicolo biciclo. La distanza tra i due unicycli è costante e pari L . Due possibili scelte delle coordinate sono $q_a = [x_a, y_a, \theta, \phi]^T$ o $q_p = [x_p, y_p, \theta, \phi]^T$.

in quanto l'unicyclo posteriore è fissato rigidamente al link di connessione con un angolo costante pari a $\frac{\pi}{2}$ ed a distanza fissa pari a L . Anche questo modello può essere generalizzato al caso di veicolo con un numero n arbitrario di unicycli rigidamente fissati, ad esempio schematizzazione di un camion con n rimorchi. Si vedrà in seguito che questa categoria di sistemi hanno una forma cinematica che possiede forti proprietà tanto da essere storicamente molto studiata. Questo modello si discosta dal modello *car-like*, per il quale esiste un limite di curvatura sull'unicyclo anteriore e dove il link di connessione viene solitamente indicato come albero motore o di trasmissione e la lunghezza del link L è detta passo del veicolo.

Due delle sei coordinate saranno linearmente dipendenti dalle altre. Si scelga di descrivere la posizione del biciclo rispetto alla posizione cartesiana dell'unicyclo posteriore, si ottiene:

$$\begin{cases} x_a = x_p + L \cos \theta \\ y_a = y_p + L \sin \theta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{x}_a = \dot{x}_p - L\dot{\theta} \sin \theta \\ \dot{y}_a = \dot{y}_p + L\dot{\theta} \cos \theta \end{cases}, \quad (1.24)$$

con $q_p = [x_p, y_p, \theta, \phi]^T$.

Il doppio vincolo unicyclo, ancora intrinsecamente anolonomo:

$$\begin{cases} C_v^1(q_p, t) = \dot{x}_a \sin(\theta + \phi) - \dot{y}_a \cos(\theta + \phi) = 0 \\ C_v^2(q_p, t) = \dot{x}_p \sin \theta - \dot{y}_p \cos \theta = 0 \end{cases}, \quad (1.25)$$

dalle quali, una volta sostituite le equazioni (1.24), si ottiene la relativa forma Pfaffiana:

$$A(q_p)\dot{q}_p = \begin{bmatrix} \sin(\theta + \phi) & -\cos(\theta + \phi) & -L \cos \phi & 0 \\ \sin \theta & -\cos \theta & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_p \\ \dot{y}_p \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = 0. \quad (1.26)$$

A questo punto è necessario calcolare una base nel nucleo di $A(q_p)$, la quale sarà senz'altro di dimensione pari ad 2, come ad esempio:

$$S_p(q_p) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 \\ \frac{1}{L} \tan \phi & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.27)$$

Analizzando la relazione cinematica che se ne ottiene $\dot{q}_p = S_p(q_p)\nu$, è possibile notare che per questa base del $\ker(A(q_p))$ la quasi velocità ν_1 è la velocità di avanzamento dell'uniciclo posteriore, mentre ν_2 è la velocità angolare di sterzata dell'uniciclo anteriore. Per questo motivo, il modello cinematico che se ne ottiene viene solitamente indicato come biciclo a *trazione posteriore*. Se l'obiettivo fosse stato la schematizzazione cinematica di un veicolo a *trazione anteriore* la scelta della base sarebbe stata:

$$S_a(q_p) = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \phi & 0 \\ \sin \theta \cos \phi & 0 \\ \frac{1}{L} \sin \phi & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.28)$$

Si noti come la scelta iniziale sulle coordinate non influisce sulla scelta della trazione. Si scelga adesso di riferire la posizione rispetto alle coordinate $q_a = [x_a, y_a, \theta, \phi]^T$:

$$\begin{cases} x_p = x_a - L \cos \theta \\ y_p = y_a - L \sin \theta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{x}_p = \dot{x}_a + L\dot{\theta} \sin \theta \\ \dot{y}_p = \dot{y}_a - L\dot{\theta} \cos \theta \end{cases}. \quad (1.29)$$

Restando valido il doppio vincolo uniciclo (1.25) ed una volta sostituite le equazioni (1.29), si ottiene la relativa forma Pfaffiana:

$$A(q_a)\dot{q}_a = \begin{bmatrix} \sin(\theta + \phi) & -\cos(\theta + \phi) & 0 & 0 \\ \sin \theta & -\cos \theta & L & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_a \\ \dot{y}_a \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = 0, \quad (1.30)$$

e la base del nucleo per trazione posteriore:

$$\dot{q}_a = S_p(q_a)\nu = \begin{bmatrix} \cos(\theta + \phi) \cos \phi & 0 \\ \sin(\theta + \phi) \cos \phi & 0 \\ \frac{1}{L} \cos \phi \sin \phi & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{bmatrix}, \quad (1.31)$$

dove ν_1 è la velocità di avanzamento dell'uniciclo posteriore, mentre ν_2 è la velocità angolare di sterzata dell'uniciclo anteriore. Per quanto riguarda la trazione anteriore:

$$\dot{q}_a = S_a(q_a)\nu = \begin{bmatrix} \cos(\theta + \phi) & 0 \\ \sin(\theta + \phi) & 0 \\ \frac{1}{L} \sin \phi & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{bmatrix}. \quad (1.32)$$

Osservazione 1.9. *La differenza tra modello cinematico riferito all'anteriore q_a o al posteriore q_p è dovuta alla asimmetria del sistema rispetto ai due unicicli componenti il sistema. Al contrario, nel caso degli unicicli cooperanti tale differenza non si riscontra, data la simmetria del sistema. La scelta del riferimento è di solito legata al tipo di task da risolvere ed alla relativa semplicità nel controllore adottabile.*

Osservazione 1.10. *Si noti come il veicolo di tipo biciclo non aumen-
ti in nessuna configurazione la propria mobilità, cioè $\dim(\ker(A(q_a))) = \dim(\ker(A(q_p))) = 2$ in ogni punto dello spazio. Questa proprietà può anche essere subito notata se si ricorda che il biciclo è un caso particolare degli unicicli cooperanti e che non può mai assumere la configurazione con maggiore mobilità ricavata in quel caso.*

Capitolo 2

Controllo cinematico dei veicoli

2.1 Introduzione

Una volta ottenuto il modello cinematico di un sistema meccanico vincolato è possibile adottare tecniche di controllo in grado di far eseguire al sistema predeterminati tipi di task. Data la natura del modello cinematico, i controlli calcolati saranno controlli in *velocità*, avendo supposto non influenti le masse e le inerzie presenti nel sistema sotto esame. Nella realizzazione pratica di questi tipi di controllori, gli effetti dinamici vengono compensati da un controllore dinamico, solitamente un semplice PID, chiuso in una catena interna del loop di controllo, a più alta frequenza rispetto alle temporizzazioni in gioco sul controllore esterno, come riportato in figura 2.1.

Solitamente il controllore PID di basso livello viene integrato direttamente sulla piattaforma robotica, rendendo di fatto trasparente all'utente la dinamica del robot. Ovviamente, per braccia robotiche generiche, questo tipo di approccio è limitativo e non permette l'adozione di tecniche di controllo sofisticate per la soluzione del task. Nel campo della robotica mobile, specialmente per applicazioni indoor, le più diffuse in ambiente industriale, questo tipo di approccio acquista una notevole rilevanza, svincolando il controllista dai problemi dinamici e lasciandogli la possibilità di concentrarsi sul particolare task da risolvere.

Il controllo dei veicoli sul modello cinematico si basa essenzialmente sulla teoria di Lyapunov e sui suoi vari corollari ed estensioni, i più utilizzati dei quali riguardano il teorema sull'insieme invariante massimo di La Salle e la sua estensione di Krasowskii. Per questo motivo, vengono di seguito richiamati, demandando a libri specifici ulteriori approfondimenti (consigliati).

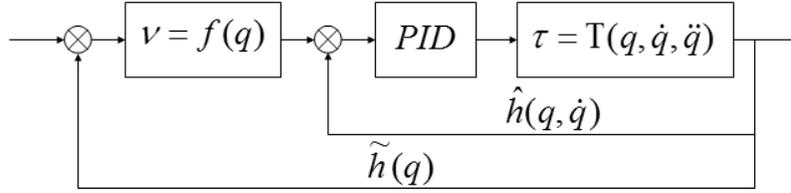


Figura 2.1: Esempio di montaggio in cascata tra un controllore cinematico $f(q)$ ed il compensatore della dinamica PID. Il loop di controllo più interno è a frequenza maggiore rispetto alla frequenza di chiusura del loop esterno.

2.1.1 I criteri di stabilità di Lyapunov

Definizione 2.1. Una funzione $\mathbf{V}(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ si dice positiva definita (p.d.) se valgono contemporaneamente le seguenti proprietà:

- $\mathbf{V}(0) = 0$
- $\forall x \in \mathbf{B}_r \setminus 0$, con \mathbf{B}_r intorno dell'origine, $\mathbf{V}(x) > 0$

La funzione $\mathbf{V}(x)$ sarà invece positiva semidefinita (p.s.d.) se $\forall x \in \mathbf{B}_r \setminus 0$, $\mathbf{V}(x) \geq 0$.

Al contrario, se $-\mathbf{V}(x)$ è d.p. o p.s.d. allora la $\mathbf{V}(x)$ si dirà rispettivamente negativa definita o semidefinita negativa.

Se \mathbf{B}_r può essere esteso a tutto lo spazio di stato, la funzione si dirà *globalmente* p.d., s.p.d., n.d. o n.s.d.

Il principio utilizzato per la costruzione del controllore stabilizzante si basa sul *Metodo Diretto di Lyapunov*, riportato di seguito.

Proposizione 2.1. (Lyapunov) Sia $(x, u) = (0, 0)$ un equilibrio per il sistema $\dot{x} = f(x, u)$, con $x \in \mathbb{R}^n$ e $u \in \mathbb{R}^m$. Si consideri una funzione $\mathbf{V}(x) \in C^1$ d.p. e si consideri la sua derivata direzionale lungo il campo vettoriale $f(x, u)$, cioè $L_f \mathbf{V}(x) = \frac{\partial \mathbf{V}(x)}{\partial x} f(x, u)$. Se $L_f \mathbf{V}(x)$ è n.s.d. l'equilibrio del sistema è un punto stabile; se è n.d. l'equilibrio del sistema è un punto asintoticamente stabile.

Nel caso di equilibrio asintoticamente stabile, e oltre alle ipotesi del metodo diretto di Lyapunov la funzione di Lyapunov è *radialmente illimitata*, cioè se le sue superfici di livello sono chiuse:

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \mathbf{V}(x) = \infty$$

l'equilibrio è anche *globalmente* asintoticamente stabile. Il sistema avrà quindi una regione di asintotica stabilità pari a tutto lo spazio di stato (G.A.S.).

Il metodo diretto di Lyapunov non permette di dire niente sull'equilibrio nel caso in cui la $L_f \mathbf{V}(x)$ sia n.s.d. In tal caso, si adottano due ulteriori teoremi che si basano sul concetto di *insieme invariante*.

Definizione 2.2. Un insieme M è invariante per un sistema dinamico se le traiettorie che contengono punti di M sono tutte contenute in M .

Teorema 2.1. (Lasalle) Sia $\mathbf{V}(x) \in C^1$ p.d. e si supponga inoltre che esista un $k \in \mathbb{R}$ t.c. le superfici di livello $\mathbf{V}(x) = k$ siano chiuse e delimitino in tal modo l'insieme limitato $\Omega_k = \{x | \mathbf{V}(x) < k\}$. Sia inoltre $L_f \mathbf{V}(x) \leq 0$, $\forall x \in \Omega_k$. Si definisca l'insieme $\Gamma = \{x \in \Omega_k | L_f \mathbf{V}(x) = 0\}$ e si indichi con M il massimo insieme invariante contenuto in Γ . M è massimo nel senso che è il più grande insieme nel senso insiemistico. Allora, ogni traiettoria $x(x_0, t)$ del sistema con $x_0 \in \Omega_k$ converge all'insieme M , ossia:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \inf_{m(t) \in M} \|x(x_0, t) - m\| = 0$$

Osservazione 2.1. Si noti che il teorema di Lasalle vale per $\mathbf{V}(x)$ dipendenti dal tempo solo tramite il vettore di stato $x(t)$. Invece, se la $\mathbf{V}(x, t)$ dipende esplicitamente dal tempo, il teorema resta valido con l'ipotesi aggiuntiva di $L_f \mathbf{V}(x, t)$ uniformemente continua in t . Sapendo che una qualsiasi funzione $g(x)$ si dice uniformemente continua su un intervallo Ω se $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tale che $\forall x, y \in \Omega$ con $\|x - y\| < \delta$ si ha $\|g(x) - g(y)\| < \epsilon$, l'ipotesi sulla $\mathbf{V}(x, t)$ può essere dimostrata ad esempio mostrando che $\frac{d}{dt} L_f \mathbf{V}(x, t)$ è limitata $\forall t$.

Teorema 2.2. (Krasowskii) Se $\mathbf{V}(x)$ è p.d. e $L_f \mathbf{V}(x)$ p.s.d., ma Γ non contiene traiettorie del sistema eccetto che l'equilibrio, allora il sistema, oltre ad essere stabile, è anche asintoticamente stabile.

Per concludere questo breve richiamo sulla teoria di stabilità di Lyapunov, si considerano due ulteriori estensioni riguardanti l'instabilità.

Teorema 2.3. (Lyapunov) Sia \mathbf{B}_r un intorno dell'origine di raggio r . Siano inoltre $\mathbf{V}(x) \in C^1$, $\mathbf{V}(0) = 0$ e $L_f \mathbf{V}(x)$ p.d. Se $\forall r > 0, \exists \bar{x} \in \mathbf{B}_r$ tale che $\mathbf{V}(\bar{x}) > 0$, l'equilibrio nell'origine è instabile.

Teorema 2.4. (Cetaev) Sia \mathbf{B}_r un intorno dell'origine di raggio r e $\mathbf{V}(x) \in C^1$. Se dato un insieme aperto Υ tale che:

- $0 \in \partial(\Upsilon) \cup \Upsilon$
- $\forall x \in \Upsilon \cap \mathbf{B}_r, \mathbf{V}(x \neq 0) > 0$ e $L_f \mathbf{V}(x \neq 0) > 0$

- per $x = 0$ e $\forall x \in \partial(\Upsilon) \cap \mathbf{B}_r$, $\mathbf{V}(x) = 0$

allora l'origine del sistema è un punto di equilibrio instabile per il sistema $\dot{x} = f(x)$.

Osservazione 2.2. Si noti che con l'approccio “alla Lyapunov” i controllori ricavabili sono regolari (smooth) e tempo invarianti.

2.1.2 Cambiamenti di coordinate nello spazio di stato

Come è noto dai corsi precedenti, i cambiamenti di coordinate sono utili per studiare alcune proprietà strutturali dei sistemi, come l'osservabilità o la raggiungibilità, ma anche per dimostrare come sia possibile risolvere problemi di controllo, come la stabilizzazione.

Nel caso di sistemi lineari, solo cambiamenti di coordinate lineari sono prese in considerazione. Si ricorda che un cambiamento di coordinate lineare corrisponde alla sostituzione di un certo vettore di stato $x \in X \subseteq \mathbb{R}^n$ con una nuova rappresentazione $z \in Z \subseteq \mathbb{R}^n$ legate tra loro da una trasformazione del tipo:

$$z = Tx ,$$

dove $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ è una matrice non singolare. Applicando la trasformazione, il sistema si trasforma coerentemente:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{z} = \hat{A}z + \hat{B}u \\ y = \hat{C}z + Du \end{cases} ,$$

dove $\hat{A} = TAT^{-1}$, $\hat{B} = TB$ e $\hat{C} = CT^{-1}$.

Osservazione 2.3. La trasformazione di coordinate espressa precedentemente è un omomorfismo, cioè una applicazione lineare tra i sottospazi X e Z . Più precisamente, un omomorfismo tra due spazi vettoriali X e Z è una applicazione lineare $f : X \rightarrow Z$ che verifica le seguenti proprietà:

1. $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$, $\forall x_1, x_2 \in X$
2. $f(\alpha x) = \alpha f(x)$, $\forall x \in X$ e $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

Se il sistema è non lineare, assume rilevanza lo studio di cambiamenti di coordinate non lineari, del tipo:

$$z = \Phi(x) ,$$

dove $\Phi(x)$ è una funzione vettoriale a n componenti e di n variabili reali:

$$\Phi(x) = \begin{bmatrix} \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \\ \vdots \\ \phi_n(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \phi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \phi_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{bmatrix},$$

che gode delle seguenti proprietà:

1. $\Phi(x)$ è invertibile, ovvero esiste una funzione vettoriale $\Phi^{-1} : Z \rightarrow X$ tale che:

$$\Phi^{-1}(\Phi(x)) = x \quad \forall x \in X;$$

2. $\Phi(x)$ e $\Phi^{-1}(z)$ sono entrambe mappe regolari, ossia hanno derivate parziali continue di qualsiasi ordine.

La prima proprietà serve per ottenere la trasformazione inversa, mentre la seconda è necessaria per avere il nuovo sistema abbia ancora delle coordinate regolari. Una funzione vettoriale di questo tipo si chiama *diffeomorfismo globale*.

Nei sistemi non lineari non è sempre possibile riuscire ad ottenere una trasformazione di coordinate che goda delle proprietà precedenti su tutto lo spazio di stato, per questo a volte è necessario definire il cambiamento di coordinate nell'intorno di un certo punto. Trasformazioni di questo tipo sono chiamate *diffeomorfismi locali*.

Proposizione 2.2. *Sia $\Phi(x)$ una funzione regolare definita in qualche sottospazio $X \subset \mathbb{R}^n$ e si supponga che lo jacobiano di Φ sia non singolare nel punto $x_0 \in X$. Allora, per un certo sottospazio vettoriale $X_0 \subset X$, con $x_0 \in X_0$, la funzione $\Phi(x)$ definisce un diffeomorfismo locale su X_0 .*

Ad esempio, si consideri il seguente cambiamento di coordinate:

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \Phi(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} \sin x_1 + x_2 \\ x_2 + x_1^2 \end{bmatrix}.$$

Questo cambiamento di coordinate, pur essendo definito in tutto \mathbb{R}^2 , non può essere un diffeomorfismo in quanto non è verificata la proprietà di invertibilità. Si considerino ad esempio i seguenti punti $(x_1, x_2) = (0, 10)$ e $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = (0.8767, 9.2314)$, si ottiene $\Phi(x_1, x_2) = \Phi(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$. Si consideri allora il cambiamento di coordinate leggermente modificato rispetto al precedente:

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \Phi(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} \sin x_1 \\ x_2 + x_1^2 \end{bmatrix}.$$

in questo caso lo jacobiano sarà:

$$\frac{\partial \Phi(x)}{\partial x} = \begin{bmatrix} \cos x_1 & 0 \\ 2x_1 & 1 \end{bmatrix},$$

che ha rango pieno in $x_0 = (0, 0)$. Nel sottospazio $X_0 = \{(x_1, x_2) \in X : |x_2| < \frac{\pi}{2}\}$ la funzione Φ definisce un diffeomorfismo. Anche in questo caso, il cambiamento di coordinate presentato non può essere un diffeomorfismo globale in quanto non è verificata la proprietà di invertibilità su tutto lo spazio. Infatti, sia $x_1 > |\frac{\pi}{2}|$, esiste un $\bar{x}_1 < |\frac{\pi}{2}|$ tale che $\sin x_1 = \sin \bar{x}_1$. Allora, per ogni coppia di punti (x_1, x_2) e (\bar{x}_1, \bar{x}_2) e per cui valga $x_2 + x_1^2 = \bar{x}_2 + \bar{x}_1^2$, determinano $\Phi(x_1, x_2) = \Phi(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ e la proprietà di iniettività si perde.

Sia dato il generico sistema non lineare affine nei controlli:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)) + g(x(t))u(t) \\ y(t) = h(x(t)) + w(x(t))u(t) \end{cases},$$

e si definisca il cambiamento di coordinate:

$$z(t) = \Phi(x(t)).$$

Si faccia la derivata rispetto al tempo della precedente equazione:

$$\dot{z}(t) = \frac{dz(t)}{dt} = \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x} \frac{dx(t)}{dt} = \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x} [f(x(t)) + g(x(t))u(t)],$$

e, ricordando che $x(t) = \Phi^{-1}(z(t))$, si ottiene il nuovo sistema:

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = \bar{f}(z(t)) + \bar{g}(z(t))u(t) \\ y(t) = \bar{h}(z(t)) + \bar{w}(z(t))u(t) \end{cases},$$

dove:

$$\begin{aligned} \bar{f}(z(t)) &= \left[\frac{\partial \Phi(x)}{\partial x} f(x(t)) \right]_{x(t)=\Phi^{-1}(z(t))} \\ \bar{g}(z(t)) &= \left[\frac{\partial \Phi(x)}{\partial x} g(x(t)) \right]_{x(t)=\Phi^{-1}(z(t))} \\ \bar{h}(z(t)) &= [h(x(t))]_{x(t)=\Phi^{-1}(z(t))} \\ \bar{w}(z(t)) &= [w(x(t))]_{x(t)=\Phi^{-1}(z(t))} \end{aligned}$$

le quali legano il vecchio sistema con la nuova rappresentazione nello spazio di stato.

Osservazione 2.4. *Si noti che nel caso di sistemi lineari, il cambiamento di coordinate Φ è anch'esso lineare. In altre parole, se $\Phi(x(t)) = Tx(t)$, le espressioni ricavate in precedenza per i sistemi non lineari si riducono a quelle classiche relative ai sistemi lineari.*

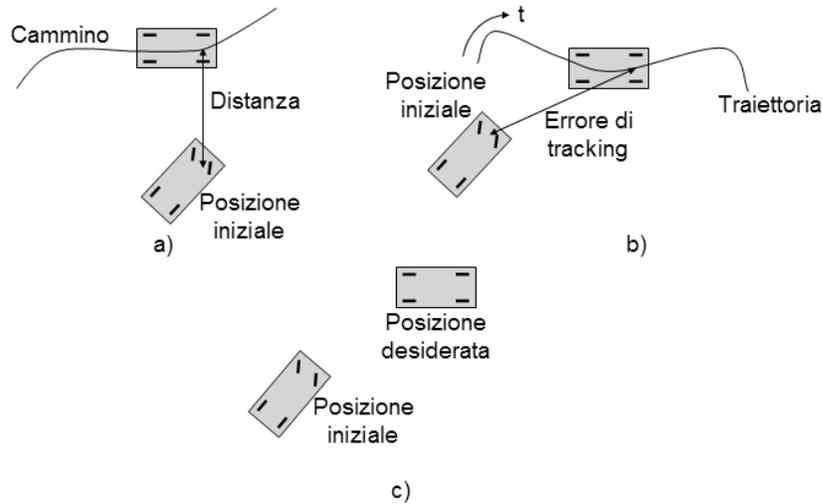


Figura 2.2: Problemi di controllo: a) Path following, b) Trajectory tracking, c) Point-to-point motion.

2.2 Controllo sul modello cinematico

Prima di entrare nel merito del progetto dei possibili controllori utili per il completamento di determinati task, è utile classificare i diversi tipi di problemi di controllo per i veicoli mobili:

- *Path following*: il robot deve raggiungere e seguire un determinato cammino geometrico nello spazio cartesiano, partendo da una generica posizione iniziale, facente parte o meno del cammino geometrico (vedere figura 2.2, a));
- *Trajectory tracking*: il robot deve raggiungere e seguire una determinata traiettoria geometrica nello spazio cartesiano (i.e. un cammino geometrico associato ad una certa legge temporale) partendo da una generica posizione iniziale, facente parte o meno della traiettoria (vedere figura 2.2, b)).
- *Point-to-point motion*: il robot deve raggiungere una determinata configurazione desiderata all'interno partendo da una generica configurazione iniziale (vedere figura 2.2, c));

2.2.1 Path following

Nel problema del path following al controllore è fornita una descrizione cartesiana del luogo geometrico sul quale si dovrà portare il robot. Il luogo geometrico è generalmente parametrizzato con un set di parametri, quali curvatura e/o lunghezza dell'arco del cammino da seguire. Per questo tipo particolare di task, la dipendenza dal tempo è chiaramente non rilevante, in quanto l'unico parametro da controllare è legato all'errore geometrico di piazzamento tra robot e cammino da seguire. Per questo motivo è pratica comune nella letteratura fissare la velocità di avanzamento del veicolo mobile (uno dei controlli a disposizione) ad un valore costante o variabile con una legge tempo variante, lasciando solo i rstanti ingressi come controlli a disposizione. Il problema del path following può così essere ridefinito come il problema della stabilizzazione a zero di una funzione scalare, in generale funzione di tutte le variabili di stato del sistema meno una (legata alla rinuncia del controllo della velocità lineare), come ad esempio la distanza relativa tra path e veicolo (si veda la figura 2.2, a)), utilizzando solo un sottoinsieme delle variabili di controllo.

Stabilizzazione sulla retta $y = 0$

Si consideri il problema della stabilizzazione di un veicolo di tipo unicycle sull'asse orizzontale $y = 0$. Il modello cinematico del veicolo unicycle, ricavato nel capitolo 1 relativo alla cinematica vincolata, è riportato per comodità di seguito:

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u, \quad (2.1)$$

dove $q = [x, y, \theta]^T$ ed $u = [v, \omega]^T$ con v velocità di avanzamento lineare, mentre ω è la velocità angolare del veicolo (ci si riferisca alla figura 1.3).

Come riportato precedentemente, nel problema del path following è possibile rinunciare al controllo della velocità di avanzamento del veicolo, che viene così considerata costante e pari a $\hat{v} \neq 0$ (si noti che nel caso $\hat{v} = 0$ il problema non avrebbe soluzione: il veicolo è libero solamente di ruotare su se stesso). La stabilizzazione sulla retta $y = 0$ con velocità di avanzamento lineare costante comporta la stabilizzazione su una traiettoria di riferimento, ma non su un punto di equilibrio. Questo fa sì che il sistema non possa essere stabilizzato asintoticamente se considerato nel suo spazio di stato completo. D'altro canto, se si considera il particolare problema in esame, è facile notare come sulla traiettoria di equilibrio, la posizione sull'asse x non sia rilevante,

infatti si ha perfetta stabilizzazione sul cammino geometrico nel caso in cui:

$$\begin{cases} x_{eq} = \hat{v}t \\ y_{eq} = 0 \\ \theta_{eq} = 0 \end{cases} . \quad (2.2)$$

Questo fatto ci permette di concludere che è sufficiente costruire una funzione di Lyapunov p.s.d. su tutto lo spazio di stato ma p.d. per le coordinate di interesse, ossia:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(q) &= \frac{1}{2}(y^2 + \theta^2) \\ L_f \mathbf{V}(q) &= y \sin \theta \hat{v} + \theta \omega \end{aligned} \quad (2.3)$$

Osservazione 2.5. *La riduzione dello spazio di stato q alla sola porzione di interesse \bar{q} e la relativa costruzione di una funzione di Lyapunov di controllo p.s.d. su tutto lo spazio ma p.d. nel sottospazio di interesse non è sempre possibile. La dinamica delle variabili di stato in \bar{q} deve essere indipendente dal resto delle variabili di stato, ossia:*

$$\dot{\bar{q}} = f(\bar{q}, u).$$

Se questa ipotesi non è verificata, la derivata direzionale $L_f \mathbf{V}(q)$ dipenderà da tutto lo spazio q , creando l'assurdo che candidata e sua derivata direzionale siano definite su due spazi diversi. Quanto espresso può essere mostrato con un controesempio. Si consideri un sistema non lineare con la seguente dinamica:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2^2 \\ \dot{x}_2 = -x_2^3 + x_1 + u \end{cases} ,$$

e si consideri la candidata di Lyapunov $\mathbf{V}(x_2) = \frac{x_2^2}{2}$ p.d. rispetto al sottospazio $\bar{q} = (x_2)$, con derivata direzionale $L_f \mathbf{V}(x_1, x_2) = -x_2^4 + x_2 x_1 + x_2 u$. Se si sceglie il controllo $u = -x_1$ si ottiene $L_f \mathbf{V}(x_1, x_2) = -x_2^4$, che potrebbe far erroneamente pensare ad una funzione n.d. nel sottospazio \bar{q} . In realtà la funzione è n.s.d. rispetto al suo dominio di definizione, che invece è tutto lo spazio $q = (x_1, x_2)$. L'apparente assurdo tra gli spazi di definizione delle due funzioni può essere rimosso notando che anche la candidata di Lyapunov è definita su tutto lo spazio q , quindi p.s.d.. L'esempio proposto è in effetti instabile, avendo la dinamica libera di x_1 divergente.

Osservazione 2.6. *La costruzione di una candidata di Lyapunov direttamente dipendente dal tempo può portare all'instaurarsi di fenomeni non previsti in sede di analisi. Si consideri un sistema non lineare del tipo:*

$$\dot{q} = f(q, u, t),$$

ossia funzione diretta del tempo (ad esempio, avente alcuni parametri tempo varianti). La presenza esplicita del tempo porta ad avere una funzione di Lyapunov di controllo $\mathbf{V}(q, t)$, cioè anch'essa direttamente dipendente dal tempo. Anche la derivata direzionale dipenderà direttamente dal tempo. Se si ha $\mathbf{V}(q, t)$ p.d. e la corrispondente $L_f \mathbf{V}(q, t)$ n.d. non è detto che il sistema converga, potrebbe, ad esempio, essere solamente marginalmente stabile. La stessa cosa può succedere qualora si inseriscano forzatamente nella funzione di Lyapunov termini direttamente dipendenti dal tempo.

Si consideri un sistema non lineare con la seguente dinamica:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2^2 \\ \dot{x}_2 = -x_2^3 + x_1 + u \end{cases} ,$$

e si consideri la candidata di Lyapunov:

$$\mathbf{V}(x_1, x_2, t) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)e^{-\lambda t},$$

con costante $\lambda > 0$. La funzione è chiaramente p.d. rispetto a tutto lo spazio di stato $q = (x_1, x_2)$. Si consideri la sua derivata direzionale:

$$L_f \mathbf{V}(x_1, x_2, t) = (-x_1^2 + x_1 x_2^2 - x_2^4 + x_2 x_1 + x_2 u)e^{-\lambda t} - \lambda \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)e^{-\lambda t}.$$

Sostituendo il controllo $u = -x_1 x_2 - x_1$, si ottiene una derivata direzionale n.d. su tutto lo spazio di stato. Le cose sembrano funzionare e sarebbe possibile concludere sull'asintotica stabilità dell'equilibrio. Questo è vero se e solo se la velocità di convergenza delle traiettorie del sistema verso l'origine è almeno esponenziale di ordine $k > \lambda$. Se così non fosse, per $t \rightarrow +\infty$, l'esponenziale $e^{-\lambda t}$ potrebbe essere nullo prima che le traiettorie del sistema possano aver raggiunto l'origine. Questo comporterebbe l'esistenza di traiettorie del sistema interamente contenute nell'insieme invariante massimo, ossia l'insieme dei punti dove la derivata direzionale si annulla. In questo caso si avrebbe semplice stabilità. Inoltre, uno studio sulla dimensione dell'insieme invariante massimo rileva che essa non è più solo legata alle caratteristiche dinamiche del sistema non lineare sotto esame, ma è dipendente anche dal parametro λ contenuto nell'esponenziale.

Utilizzando l'unico grado di libertà presente, la velocità angolare del veicolo ω , è necessario rendere definita negativa la $L_f \mathbf{V}(q)$. Il primo termine della derivata deve essere cancellato in quanto non definito in segno, mentre è ancora possibile rendere definito negativo il secondo termine. Si consideri perciò la seguente scelta per la velocità angolare:

$$\omega = -y \frac{\sin \theta}{\theta} \hat{v} - K_\theta \theta \tag{2.4}$$

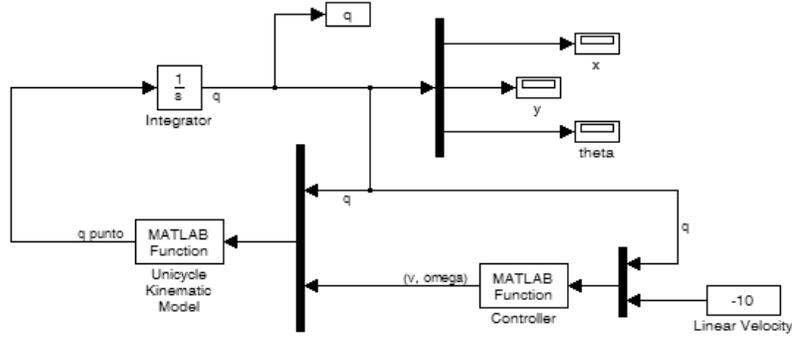


Figura 2.3: Modello generico Simulink del sistema cinematico e relativo controllore.

dove $K_\theta > 0$ è una costante utilizzabile per regolare la velocità di convergenza di θ . Si noti come la velocità angolare così calcolata sia definita anche nel caso in cui $\theta \rightarrow 0$, infatti:

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \omega = -y\hat{v}.$$

Con questa scelta si ottiene $L_f \mathbf{V}(q) = -K_\theta \theta$ n.s.d., anche rispetto al sottospazio di interesse (y, θ) , infatti si ottiene che $L_f \mathbf{V}(q) = 0$ per $\theta = 0$. Per dimostrarne l'asintotica stabilità rispetto al sottospazio di interesse, è necessario applicare i teoremi di Krasowskii–Lasalle. Per $\theta = 0$ si ottiene:

$$\begin{cases} \dot{y} = 0 \\ \dot{\theta} = \omega = -y\hat{v} \end{cases}, \quad (2.5)$$

dalla quale si intuisce che l'unica traiettoria del sistema interamente contenuta nell'insieme $L_f \mathbf{V}(q) = 0$ è il punto di equilibrio $(y, \theta) = (0, 0)$, ossia che l'insieme invariante massimo è composto dal solo punto di equilibrio. Si conclude così per l'asintotica stabilità del punto di equilibrio appartenente al sottospazio di interesse. Inoltre, notando che la funzione di Lyapunov scelta è radialmente illimitata, è possibile concludere per la globale asintotica stabilità dell'equilibrio.

Per una verifica pratica dei risultati ottenuti con la teoria di Lyapunov, il controllore trovato è stato implementato e simulato con Simulink. Per tutti i controllori cinematici sviluppati in queste note si suppone di utilizzare uno schema di montaggio sistema/controllore comune, riportato in figura 2.3.

Implementando il controllore come riportato in (2.4), fissando la costante di guadagno $K_\theta = \{10, 5\}$, imponendo il valore della velocità di avanzamento costante $\hat{v} = \pm 10$ e scegliendo come condizione iniziale il punto

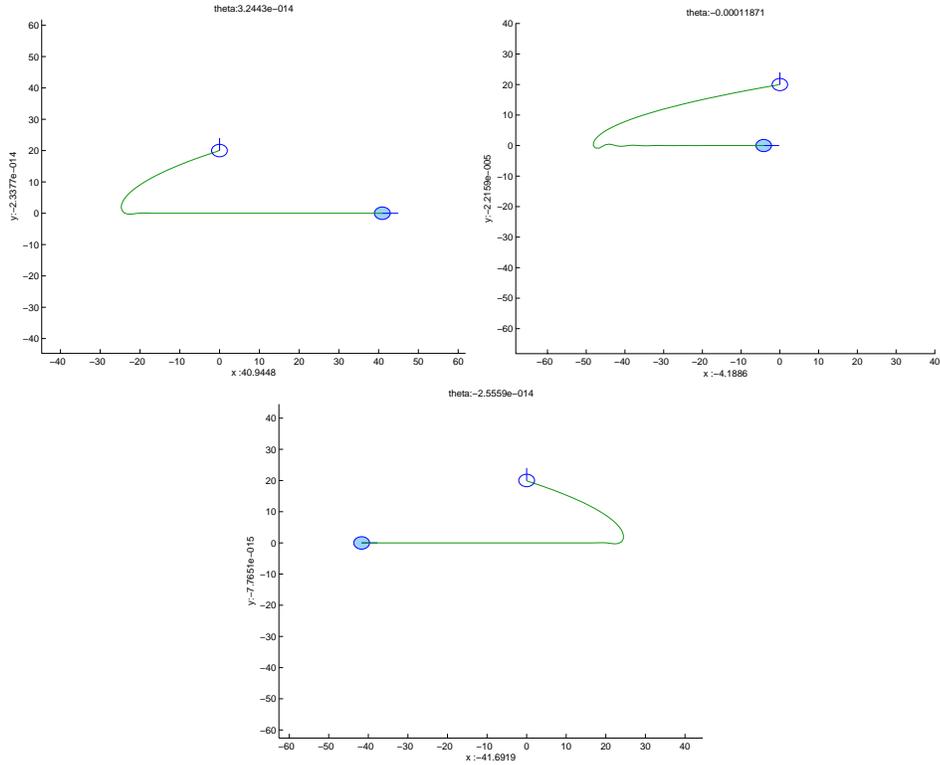


Figura 2.4: Risultati della simulazione per la stabilizzazione dell'uniciclo sulla retta $y = 0$: $K_\theta = 10$ e $\hat{v} = 10$ (in alto a sinistra); $K_\theta = 5$ e $\hat{v} = 10$ (in alto a destra); $K_\theta = 10$ e $\hat{v} = -10$ (in basso). Tutte le simulazioni hanno come stato iniziale $q_0 = [x_0, y_0, \theta_0]^T = [0, 20, \frac{\pi}{2}]$.

$q_0 = [x_0, y_0, \theta_0]^T = [0, 20, \frac{\pi}{2}]$, è possibile ottenere i risultati simulativi riportati in figura 2.4.

Certamente il controllo di un veicolo unicycle sembra di facile soluzione, avendo uno spazio di stato di dimensione tre e due controlli (ridotti ad uno nel path following) disponibili. In realtà l'uniciclo unisce una certa facilità costruttiva a caratteristiche cinematiche complesse, affette dalla anolonomia della struttura e quindi di difficile controllo. Nonostante queste considerazioni e tenendo presente che molto spesso, per inserire robustezza nella struttura o aumentare lo spazio disponibile sul veicolo, le strutture dei robot industriali sono più complesse, si considera il caso più generale delle strutture presentate nel capitolo relativo alla cinematica vincolata, ossia il caso

di unicycli cooperanti, la cui cinematica vincolata è riportata per semplicità:

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} \cos \phi_2 \cos \theta_1 & 0 & 0 \\ \cos \phi_2 \sin \theta_1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{L} \sin(\phi_2 - \phi_1) & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix}, \quad (2.6)$$

dove $q = [x_1, y_1, \theta_1, \phi_1, \phi_2]^T$ e dove i controlli disponibili sono $u = [v_1, \omega_1, \omega_2]^T$ con v_1 velocità lineare di avanzamento e ξ_1 funzione della velocità angolare del veicolo uno mentre ξ_2 è la relativa funzione della velocità angolare del veicolo due. L è la distanza costante tra i due veicoli.

Si prenda quindi in considerazione il problema del controllo degli unicycli cooperanti cercando di stabilizzarli sulla retta di coordinate $y = 0$. Il problema ha senz'altro una soluzione regolare e tempo invariante, perciò esiste una funzione di Lyapunov in grado di fornire i controlli stabilizzanti. Per facilitare tale ricerca, si applichi al sistema la trasformazione di coordinate, definita su tutto lo spazio (ossia un diffeomorfismo globale), riportata di seguito:

$$\Phi(q) = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ \theta_1 \\ \theta_1 - \phi_1 \\ \theta_1 - \phi_1 + \phi_2 \end{bmatrix} = \bar{q} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ \theta_1 \\ \delta \\ \theta_2 \end{bmatrix}, \quad (2.7)$$

la quale porta al seguente sistema cinematico ($\dot{\bar{q}} = \left(\frac{\partial \Phi(q)}{\partial q} \dot{q} \right) \Big|_{q=\Phi^{-1}(\bar{q})}$):

$$\dot{\bar{q}} = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 \cos(\theta_2 - \delta) & 0 & 0 \\ \sin \theta_1 \cos(\theta_2 - \delta) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{L} \sin(\theta_2 - \theta_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} u, \quad (2.8)$$

dove stavolta $u = [v_2, \omega_1, \omega_2]^T$ con v_2 velocità di avanzamento lineare del veicolo due, ω_1 ed ω_2 sono invece le effettive velocità angolari del veicolo uno e due rispettivamente.

Con questa scelta delle coordinate e ricordando che $v_2 = \hat{v} \neq 0$ costante, è possibile definire la seguente candidata di Lyapunov:

$$\begin{cases} \mathbf{V}(\bar{q}) = \frac{1}{2}(y_1^2 + \theta_1^2 + \delta^2) + 1 - \cos(\theta_2 - \theta_1) \\ L_f \mathbf{V}(\bar{q}) = y_1 \sin \theta_1 \cos(\theta_2 - \delta) \hat{v} + \theta_1 \omega_1 + \frac{\delta}{L} \sin(\theta_2 - \theta_1) + \sin(\theta_2 - \theta_1)(\omega_2 - \omega_1) \end{cases}, \quad (2.9)$$

p.s.d. su tutto lo spazio di stato, ma p.d. nel sottospazio di interesse.

I gradi di libertà sono due, corrispondenti alle velocità angolari dei due veicoli. Si faccia ad esempio la seguente scelta:

$$\begin{cases} \omega_1 = -y_1 \frac{\sin \theta_1}{\theta_1} \cos(\theta_2 - \delta) \hat{v} - K_1 \theta_1 \\ \omega_2 = \omega_1 - \frac{\delta}{L} \hat{v} - K_2 \sin(\theta_2 - \theta_1) \end{cases}, \quad (2.10)$$

la quale porta a $L_f \mathbf{V}(\bar{q}) = -K_1 \theta_1^2 - K_2 \sin^2(\theta_2 - \theta_1)$, n.s.d. se $K_1, K_2 > 0$. Si rende così necessario l'utilizzo dei teoremi di Krasowskii e Lasalle, infatti si ottiene che $L_f \mathbf{V}(\bar{q}) = 0$ se $(\theta_1, \theta_2) = (0, 0)$. In questo punto si ottiene che le velocità angolari assumono i seguenti valori:

$$\begin{cases} \omega_1 = -y_1 \cos \delta \hat{v} \\ \omega_2 = -y_1 \cos \delta \hat{v} - \frac{\delta}{L} \hat{v} \end{cases}. \quad (2.11)$$

Affinchè ci siano traiettorie del sistema interamente contenute nell'insieme $L_f \mathbf{V}(\bar{q}) = 0$, ossia affinché tale insieme sia invariante rispetto alle traiettorie del sistema, deve essere necessariamente $\omega_1 = \omega_2 = 0$, la qual condizione è verificata se e solo se $\delta = y_1 = 0$. La retta $y = 0$ è quindi un punto asintoticamente stabile per il sotto spazio di interesse, mentre corrisponde ad una traiettoria di riferimento asintoticamente stabile per l'intero sistema.

Implementando il controllore come riportato in (2.10), fissando le costanti di guadagno $K_1 = 10$ e $K_2 = 1$, imponendo il valore della velocità di avanzamento costante $\hat{v} = \pm 10$ e scegliendo come condizione iniziale il punto $q_0 = [x_1, y_1, \theta_1, \delta, \theta_2]^T = [0, 20, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]^T$, è possibile ottenere i risultati simulativi riportati in figura 2.5.

Come ulteriore esempio, sono riportate anche le simulazioni relative alle stesse scelte dei parametri, ma tenendo i due unicicli molto più vicini tra loro ($L = 1$).

Stabilizzazione su una retta generica

Se il cammino geometrico da seguire è ancora una volta una retta, ma di pendenza α e offset b , cioè se il luogo geometrico non è più descritto dall'equazione $y = 0$ ma dall'equazione $y = x \tan \alpha + b$, si vorrebbe utilizzare ancora una volta il controllore riportato precedentemente. La soluzione consiste nel rototraslare il sistema di riferimento, facendo coincidere la retta generica con l'asse delle ascisse. Questa operazione si può ottenere con il seguente cambiamento delle coordinate di riferimento del veicolo:

$$\bar{q} = \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{\theta} \end{bmatrix} = \Phi(q) = \begin{bmatrix} x \cos \alpha + y \sin \alpha - b \sin \alpha \\ -x \sin \alpha + y \cos \alpha - b \cos \alpha \\ \theta - \alpha \end{bmatrix}, \quad (2.12)$$

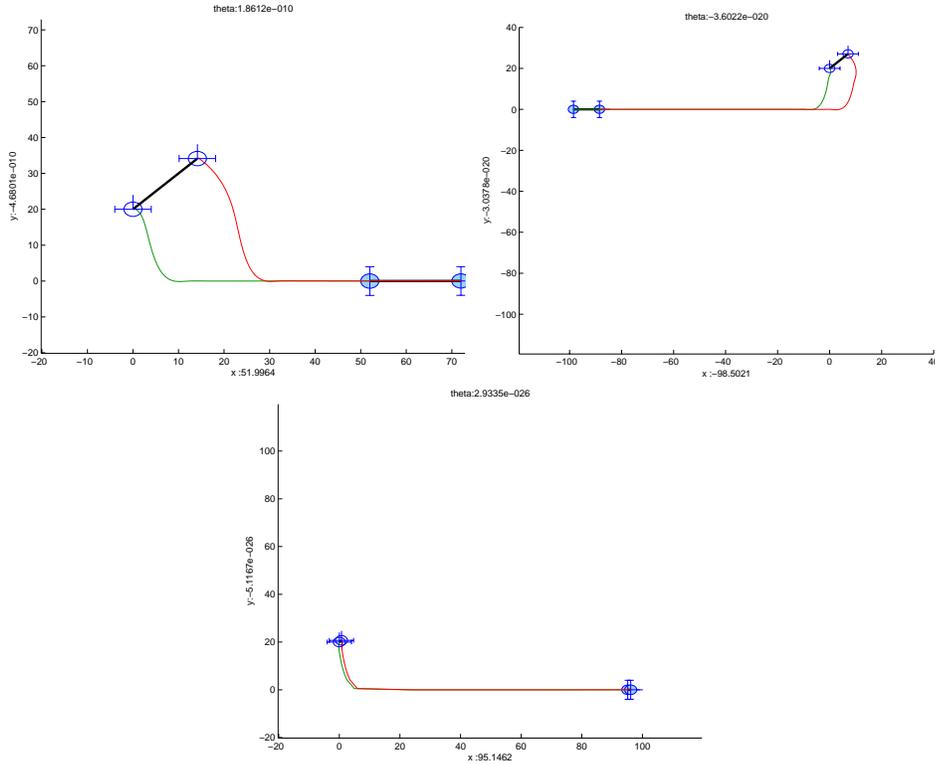


Figura 2.5: Risultati della simulazione per la stabilizzazione degli unicicli cooperanti sulla retta $y = 0$: $L = 10$ e $\hat{v} = 10$ (in alto a sinistra); $L = 10$ e $\hat{v} = -10$ (in alto a destra); $L = 1$ e $\hat{v} = 10$ (in basso). Tutte le simulazioni hanno come stato iniziale $q_0 = [x_1, y_1, \theta_1, \delta, \theta_2]^T = [0, 20, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]^T$.

con cambiamento di coordinate inverso:

$$q = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \end{bmatrix} = \Phi^{-1}(\bar{q}) = \begin{bmatrix} \bar{x} \cos \alpha - \bar{y} \sin \alpha \\ \bar{x} \sin \alpha + \bar{y} \cos \alpha + b \\ \bar{\theta} + \alpha \end{bmatrix}. \quad (2.13)$$

È facile notare come il cambiamento di coordinate introdotto sia un diffeomorfismo globale, infatti è invertibile, regolare ed il corrispondente jacobiano è a rango pieno (pari a 3) su tutto lo spazio di stato del sistema

Il modello cinematico nelle nuove coordinate sarà:

$$\dot{\bar{q}} = \begin{bmatrix} \cos \bar{\theta} & 0 \\ \sin \bar{\theta} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u, \quad (2.14)$$

ed è quindi possibile applicare la stessa strategia di controllo trovata precedentemente. In tal caso è possibile raggiungere asintoticamente il punto $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\theta}) = (\hat{v}t, 0, 0)$, che nelle vecchie coordinate corrisponde al punto $(x, y, \theta) = (\hat{v}t \cos \alpha, \hat{v}t \sin \alpha + b, \alpha)$, il quale corrisponde a portare il veicolo sulla retta $y_{eq} = x_{eq} \tan \alpha + b$ con orientazione pari a $\theta_{eq} = \alpha$. Il problema dell'inseguimento del cammino geometrico è quindi risolto con lo stesso controllore stabilizzante calcolato al punto precedente.

Osservazione 2.7. *Si noti come questo problema espresso nelle coordinate iniziali sia di difficile soluzione. Il problema nasce essenzialmente dalla difficoltà nella scrittura di una funzione di Lyapunov p.d. e con derivata direzionale non “troppo” complessa ed in grado di fornire indicazioni sul calcolo del controllo stabilizzante.*

Per una verifica pratica dei risultati ottenuti con la teoria di Lyapunov, anche in questo caso il controllore è stato implementato e simulato con **Simulink**. Fissando la costante di guadagno K_θ , la velocità di avanzamento costante \hat{v} e la condizione iniziale $q_0 = [x_0, y_0, \theta_0]^T$ come nel caso precedente, è possibile ottenere i risultati riportati in figura 2.6, riferiti alle coordinate iniziali q .

Allo stesso modo possono essere ottenuti questi risultati replicando lo studio per gli unicicli cooperanti.

Stabilizzazione su una circonferenza

Si supponga di dover stabilizzare il veicolo unicycle sul cammino geometrico individuato da una generica circonferenza di raggio $R > 0$ e centro nell'origine (ogni circonferenza di centro diverso dall'origine può essere ricondotta al caso di centro nell'origine applicando un opportuno cambiamento di coordinate, più precisamente una traslazione della terna di riferimento). Come notato in precedenza, lo studio di un controllore stabilizzante, tempo invariante e regolare alla Lyapunov può essere semplificato a seconda del tipo di rappresentazione adottato. Per la stabilizzazione su una circonferenza ed ipotizzando velocità di avanzamento costante $v = \hat{v} \neq 0$, è sufficiente stabilizzare due sole coordinate sul punto desiderato, la terza descriverà il moto di riferimento.

Osservazione 2.8. *Una circonferenza su un piano descrive un luogo geometrico che vincola una coordinata di posizione all'altra $x^2 + y^2 = R^2$ ma fissa anche l'angolo di orientamento del veicolo $\theta = \arctan(\frac{y}{x})$ (si ricordi il binario circolare descritto nel capitolo 1), il veicolo ha invece tre d.o.f. sul piano (si ricorda che il modello cinematico dell'unicycle è completamente raggiungibile).*

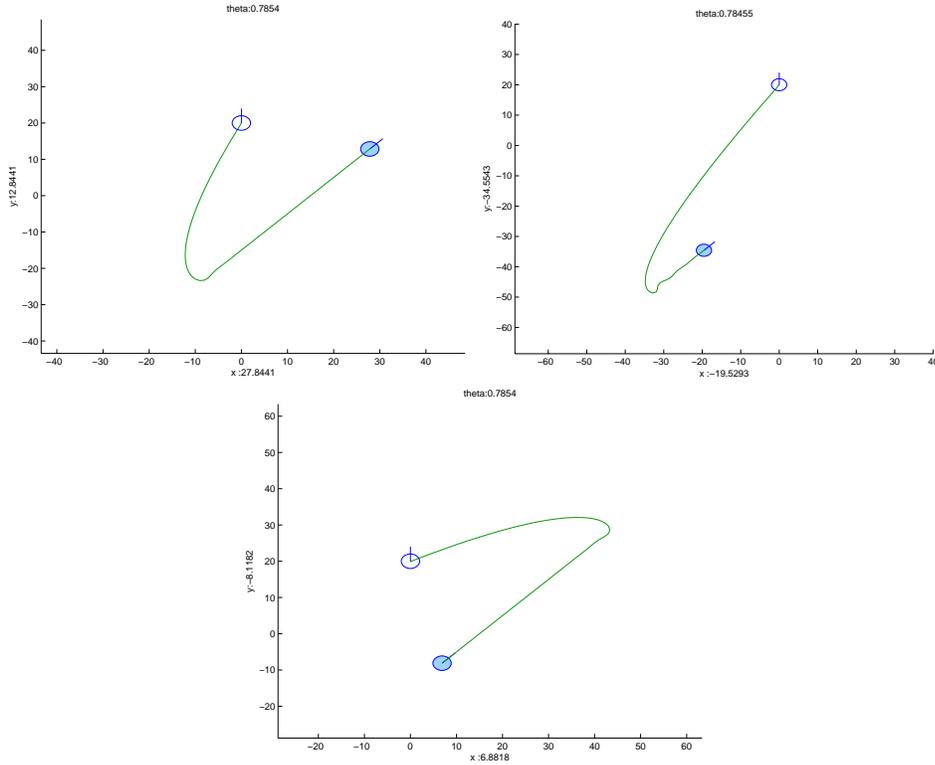


Figura 2.6: Risultati della simulazione per la stabilizzazione dell'uniciclo sulla retta $y = x \tan \alpha + b$: $K_\theta = 10$ e $\hat{v} = 10$ (in alto a sinistra); $K_\theta = 5$ e $\hat{v} = 10$ (in alto a destra); $K_\theta = 10$ e $\hat{v} = -10$ (in basso). Tutte le simulazioni hanno come stato iniziale $q_0 = [x_0, y_0, \theta_0]^T = [0, 20, \frac{\pi}{2}]$.

Per rendere il problema del controllo alla Lyapunov di piÙ semplice soluzione, si cerca un cambio di coordinate adeguato, come ad esempio:

$$\Phi(q) = \begin{bmatrix} \sqrt{x^2 + y^2} \\ \arctan(\frac{y}{x}) - \theta + \frac{\pi}{2} \\ \arctan(\frac{y}{x}) \end{bmatrix} = \bar{q} = \begin{bmatrix} \rho \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix}, \quad (2.15)$$

con la trasformazione di coordinate inversa:

$$\Phi^{-1}(\bar{q}) = \begin{bmatrix} \rho \cos \beta \\ \rho \sin \beta \\ \beta - \alpha + \frac{\pi}{2} \end{bmatrix} = q = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \end{bmatrix}, \quad (2.16)$$

dove ρ è la distanza del punto di mezzo dell'interasse delle ruote dall'origine, α è lo scostamento dall'orientazione del veicolo rispetto alla tangente alla

circonferenza in quel punto, mentre β è una terza coordinata indipendente dalle prime due. È facile notare che con questa scelta, l'angolo β dovrà essere stabilizzato su una traiettoria di riferimento, α dovrà essere asintoticamente nullo, mentre ρ dovrà tendere al suo valore desiderato e pari a R : in tal caso si ha inseguimento perfetto del cammino geometrico.

Osservazione 2.9. *La trasformazione di coordinate Φ appena introdotta non è un diffeomorfismo globale, dato che non è definita nell'origine. Questo non comporta alcun problema a patto di rimanere lontani dall'origine del sistema di riferimento (si ricordi a tal proposito l'analogo presente nei manipolatori per le configurazioni singolari).*

Il nuovo modello cinematico nelle nuove variabili di stato sarà perciò:

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \sin \alpha \hat{v} \\ \dot{\alpha} = \frac{1}{\rho} \cos \alpha \hat{v} - \omega \\ \dot{\beta} = \frac{1}{\rho} \cos \alpha \hat{v} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{\rho} = \rho \sin \alpha \hat{v}^* \\ \dot{\alpha} = \cos \alpha \hat{v}^* - \omega \\ \dot{\beta} = \cos \alpha \hat{v}^* \end{cases}, \quad (2.17)$$

dove si è posto per comodità $\hat{v} = \rho \hat{v}^*$. Si noti che questo cambiamento nella velocità di avanzamento costante \hat{v} è sempre lecito, ricordando che nell'origine il diffeomorfismo non è definito. Si definisce così la seguente candidata di Lyapunov:

$$\begin{cases} \mathbf{V}(\bar{q}) = \frac{1}{2}(\rho - R)^2 + \frac{1}{2}\alpha^2 \\ L_f \mathbf{V}(\bar{q}) = (\rho - R)\rho \sin \alpha \hat{v}^* + \alpha \cos \alpha \hat{v}^* - \alpha \omega \end{cases}. \quad (2.18)$$

Ponendo $\omega = ((\rho - R)\rho \frac{\sin \alpha}{\alpha} + \cos \alpha)\hat{v}^* + K_\alpha \alpha$ è possibile ottenere $L_f \mathbf{V}(\bar{q}) = -K_\alpha \alpha^2$, che risulta essere n.s.d. anche nel sottospazio di interesse. È ancora una volta necessario ricorrere a Krasowskii–Lasalle: si nota infatti che per $\alpha = 0$ la derivata direzionale $L_f \mathbf{V}(\bar{q}) = 0$, ma si ottiene anche che $\omega = ((\rho - R)\rho + 1)\hat{v}^*$ che, sostituita nella dinamica di α , implica:

$$\dot{\alpha} = (\rho - R)\rho \hat{v}^* \quad (2.19)$$

uguale a zero solo nel caso in cui $\rho = R$ come desiderato (si ricorda ancora una volta che per l'origine il diffeomorfismo non è definito). Il punto $(\rho, \alpha) = (0, 0)$ è un punto asintoticamente stabile per il veicolo. Questa configurazione corrisponde alla stabilizzazione del veicolo sulla circonferenza.

Per una verifica pratica dei risultati ottenuti con la teoria di Lyapunov, anche in questo caso il controllore è stato implementato e simulato con Simulink. Fissando la costante di guadagno $K_\alpha = \{100, 10\}$, la velocità di avanzamento costante $\hat{v} = 10$ e la condizione iniziale $q_0 = [x_0, y_0, \theta_0]^T = [0, 20, \frac{\pi}{2}]$ come nei casi precedenti, è possibile ottenere i risultati riportati in

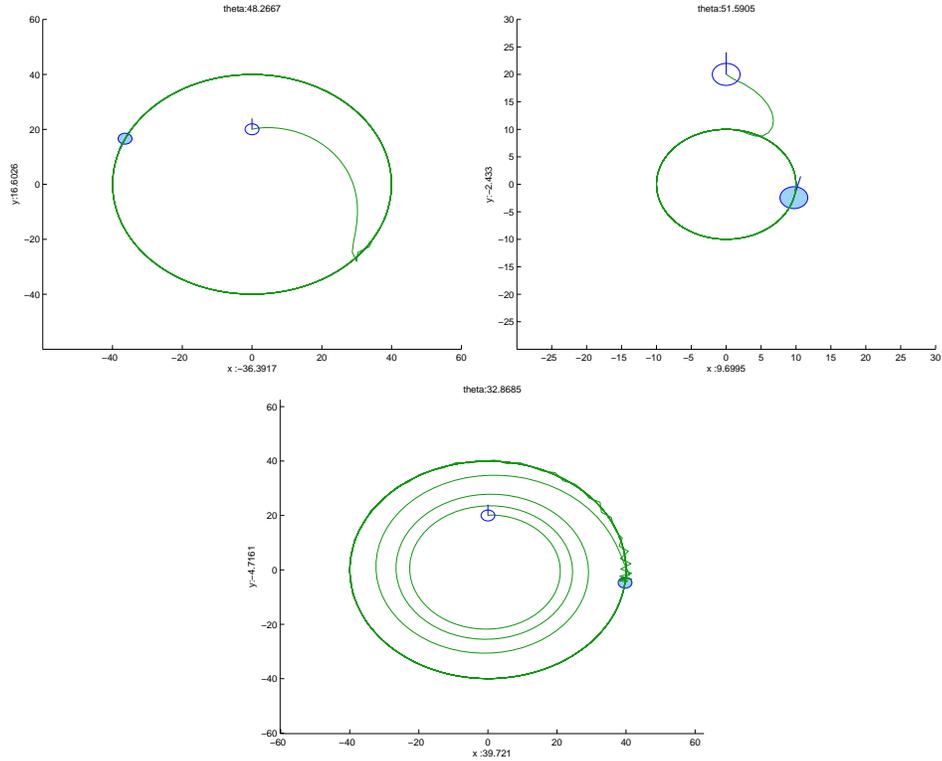


Figura 2.7: Risultati della simulazione per la stabilizzazione dell'uniciclo sulla circonferenza con centro nell'origine $x^2 + y^2 = R^2$: $K_\theta = 100$ e $R = 40$ (in alto a sinistra); $K_\theta = 100$ e $R = 10$ (in alto a destra); $K_\theta = 10$ e $R = 40$ (in basso). Tutte le simulazioni hanno come stato iniziale $q_0 = [x_0, y_0, \theta_0]^T = [0, 20, \frac{\pi}{2}]$.

figura 2.7, riferiti alle coordinate iniziali q . Dalle figure riportate è possibile notare come la costante di guadagno influisca sulla velocità di convergenza del veicolo sul cammino geometrico prescelto.

Anche per la stabilizzazione sulla circonferenza è possibile scegliere il caso di unicoli cooperanti. Si scelga a tal proposito il seguente diffeomorfismo locale (anch'esso non è definito nell'origine):

$$\Phi(q) = \bar{q} = \begin{bmatrix} \rho \\ \alpha \\ \beta \\ \delta \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \\ \arctan\left(\frac{y_1}{x_1}\right) - \theta_1 + \frac{\pi}{2} \\ \arctan\left(\frac{y_1}{x_1}\right) \\ \delta \\ \theta_2 \end{bmatrix}, \quad (2.20)$$

con la trasformazione di coordinate inversa:

$$\Phi^{-1}(\bar{q}) = q = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ \theta_1 \\ \delta \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho \cos \beta \\ \rho \sin \beta \\ \beta - \alpha + \frac{\pi}{2} \\ \delta \\ \theta_2 \end{bmatrix}. \quad (2.21)$$

La dinamica nelle nuove variabili di stato diventa perciò:

$$\dot{\bar{q}} = \begin{bmatrix} \dot{\rho} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\delta} \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho \cos(\theta_2 - \delta) \sin \alpha & 0 & 0 \\ \cos(\theta_2 - \delta) \cos \alpha & 0 & 0 \\ \cos(\theta_2 - \delta) \cos \alpha & -1 & 0 \\ -\frac{\rho}{L} \cos(\theta_2 - \beta + \alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{v}^* \\ \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix}, \quad (2.22)$$

con l'usuale sostituzione $\hat{v} = \rho \hat{v}^*$. Si scelga la seguente candidata di Lyapunov:

$$\mathbf{V}_1(\bar{q}) = \frac{1}{2}(\rho - R)^2 + \frac{1}{2}\alpha^2 \quad (2.23)$$

p.s.d. nello spazio di stato \bar{q} . Facendone la derivata direzionale e sostituendo il seguente controllo:

$$\omega_1 = (\rho - R)\rho \frac{\sin \alpha}{\alpha} \cos(\theta_2 - \delta) \hat{v}^* + \cos(\theta_2 - \delta) \cos \alpha \hat{v}^* + K_\alpha \alpha \quad (2.24)$$

con $K_\alpha > 0$, è possibile seguire la stessa linea di ragionamento adottata per l'uniciclo ed affermare che il veicolo numero uno si stabilizza sulla circonferenza se $\theta_2 - \delta \neq \pm \frac{\pi}{2}$. In tal caso il sistema risulterà stabile ma non asintoticamente. Per far sì che questa condizione non si verifichi è possibile sfruttare il secondo controllo disponibile ω_2 , utilizzando la seguente candidata di Lyapunov:

$$\begin{cases} \mathbf{V}_2(\bar{q}) = \frac{1}{2}(\theta_2 - \delta)^2 \\ L_f \mathbf{V}_2(\bar{q}) = (\theta_2 - \delta)(\omega_2 + \frac{\rho}{L} \cos(\theta_2 - \beta + \alpha) \hat{v}^*) \end{cases}, \quad (2.25)$$

dalla quale è possibile ottenere il seguente controllo proporzionale e derivativo:

$$\omega_2 = -\frac{\rho}{L} \cos(\theta_2 - \beta + \alpha) \hat{v}^* - K_{\theta_2}(\theta_2 - \delta). \quad (2.26)$$

Scegliendo quindi come funzione di Lyapunov globale la seguente:

$$\mathbf{V}(\bar{q}) = \mathbf{V}_1(\bar{q}) + \mathbf{V}_2(\bar{q}), \quad (2.27)$$

p.s.d. sull'intero spazio di stato (si nota infatti come le variabili di stato β e la somma $\delta + \theta_2$ siano di fatto fuori controllo), la funzione risulta essere p.d. nel sottospazio di interesse. Facendone la derivata direzionale e sostituendo i controlli calcolati in (2.24) e in (2.26), è possibile ottenere:

$$L_f \mathbf{V}(\bar{q}) = -K_\alpha \alpha^2 - K_{\theta_2} (\theta_2 - \delta)^2 \quad (2.28)$$

che si annulla quando contemporaneamente $(\alpha, \theta_2) = (0, \delta)$. Applicando i risultati di Krasowskii–Lasalle è possibile così affermare che il punto $(\rho, \alpha, \theta_2) = (R, 0, \delta)$ è un punto di equilibrio asintoticamente stabile per il sottospazio di interesse, il che corrisponde alla stabilizzazione del veicolo uno sulla circonferenza di raggio R generico, mentre per il secondo è possibile affermare che formerà un angolo pari a π rispetto al link di congiunzione dei due veicoli. Se la seconda funzione di Lyapunov fosse stata:

$$\mathbf{V}_2(\bar{q}) = \frac{1}{2} (\theta_2 - \delta \pm \pi)^2 \quad (2.29)$$

i due unicycli cooperanti si sarebbero comportati come un biciclo.

I controlli ottenuti sono stati così simulati con **Simulink**, fissando le costanti di guadagno $K_\alpha = 10$ e $K_{\theta_2} = 1$, la velocità di avanzamento costante $\hat{v} = 20$, la condizione iniziale $q_0 = [x_1, y_1, \theta_1, \delta, \theta_2]^T = [-10, 40, \pi, -\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{2}]^T$, la distanza fra i veicoli pari a $L = 10$ ed il raggio della circonferenza fissato pari a $R = 20$, ottenendo i risultati riportati in figura 2.8, riferiti alle coordinate iniziali q .

Nel caso in cui si voglia stabilizzare anche il secondo veicolo sulla circonferenza è possibile intervenire sulla candidata di Lyapunov, imponendo:

$$\mathbf{V}_2(\bar{q}) = \frac{1}{2} (\theta_2 - \hat{\theta}_2)^2 \quad (2.30)$$

dove $\hat{\theta}_2$ rappresenta il valore desiderato per la configurazione del secondo veicolo. In generale $\hat{\theta}_2(\delta)$, cioè sarà funzione della configurazione del veicolo secondo l'angolo δ .

Anche in questo secondo caso sono stati ottenuti alcuni risultati simulativi (riportati in figura 2.9), imponendo le stesse condizioni precedenti ma facendo variare il raggio della circonferenza da seguire. Dalle figure riportate è possibile notare come utilizzando propriamente il riferimento $\hat{\theta}_2(\delta)$ sia possibile far stabilizzare anche il secondo veicolo sulla circonferenza. Si noti inoltre come anche nel caso limite, con $R = L/2$, il controllo continui a funzionare correttamente. L'utilizzo di alternative strategie di controllo potrebbero ottimizzare il numero di manovre compiute dagli unicycli cooperanti per la stabilizzazione.

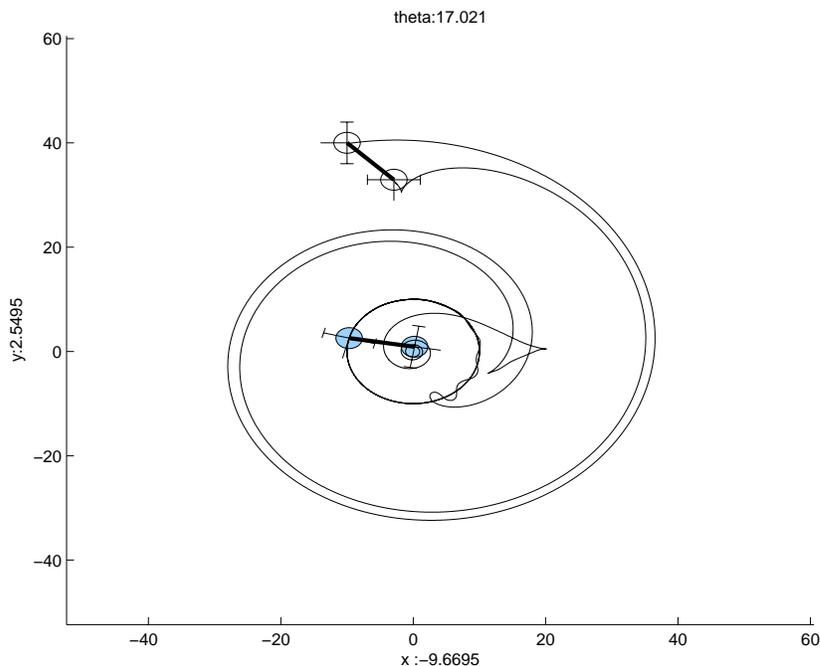


Figura 2.8: Risultati della simulazione per la stabilizzazione degli unicycli cooperanti sulla circonferenza con centro nell'origine $x^2 + y^2 = R^2$ e raggio pari a $R = 20$. Si noti come il veicolo assume, a regime, la configurazione tipica del biciclo, a meno dello sfasamento di π .

2.2.2 Trajectory tracking

Nel problema del trajectory tracking il robot deve seguire un determinato cammino cartesiano con una certa legge temporale. Questo problema può essere visto come il tracking con errore nullo di un veicolo di riferimento. Infatti, anche se i parametri geometrici del cammino cartesiano possono essere dotati di una certa legge temporale, in molti casi è molto più semplice specificare la traiettoria desiderata di qualche coordinata caratteristica del robot. Il tracciamento di una traiettoria desiderata può essere così pensato come la stabilizzazione a zero di una funzione errore tra la configurazione attuale e quella desiderata, cioè al controllo nell'intero spazio di stato senza rinunciare ad alcun grado di libertà sul sistema.

Trajectory tracking per l'unicyclo

Si consideri il problema del tracking di un unicyclo. Il problema può essere espresso nei seguenti termini: dato un veicolo di tipo unicyclo, con modello

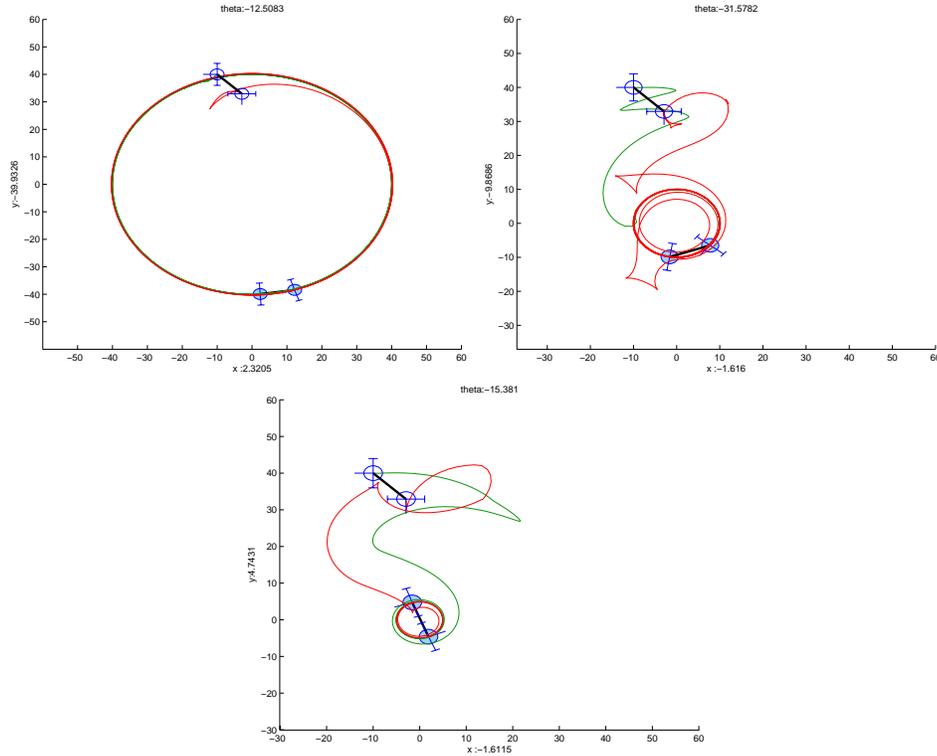


Figura 2.9: Risultati della simulazione per la stabilizzazione dell'uniciclo sulla circonferenza con centro nell'origine $x^2 + y^2 = R^2$ con raggio della circonferenza pari a: $R = 40$ (in alto a sinistra); $R = 10$ (in alto a destra); $R = 5$ (in basso). Tutte le simulazioni hanno come stato iniziale $q_0 = [x_1, y_1, \theta_1, \delta, \theta_2]^T = [-10, 40, \pi, -\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{2}]^T$.

cinematico:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta v \\ \sin \theta v \\ \omega \end{bmatrix}, \quad (2.31)$$

si trovino dei controlli che permettano di inseguire perfettamente un veicolo di riferimento:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_r \\ \dot{y}_r \\ \dot{\theta}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_r v_r \\ \sin \theta_r v_r \\ \omega_r \end{bmatrix}, \quad (2.32)$$

per il quale siano note le velocità di riferimento $(v_r(t), \omega_r(t)) \forall t$. Per questo tipo di problema si ammette, come negli esempi sul path following, la conoscen-

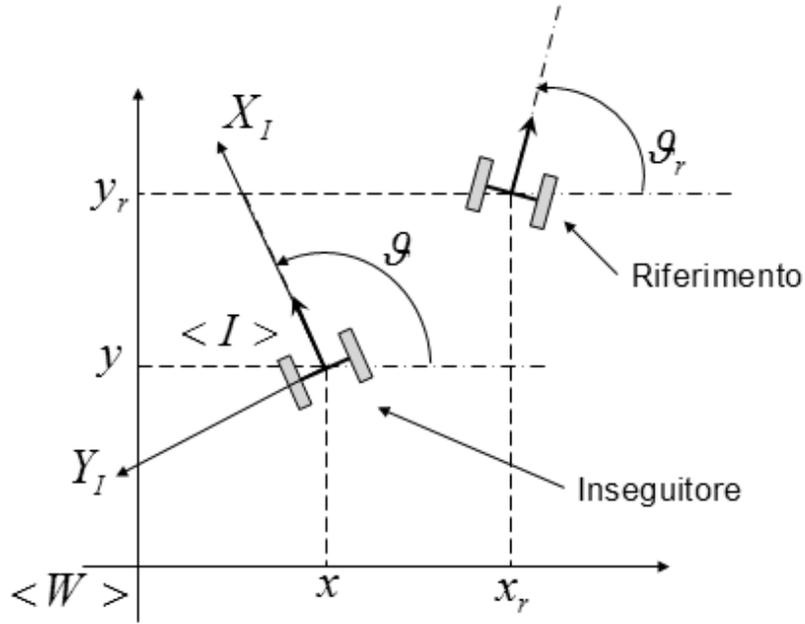


Figura 2.10: Riferimento assoluto $\langle W \rangle$ e riferimento solidale al veicolo inseguitore $\langle I \rangle$.

za degli stati del veicolo da controllare e del veicolo di riferimento, ossia perfetta localizzazione di entrambi i veicoli.

Il problema può essere risolto annullando l'errore di posizionamento tra il veicolo da controllare ed il riferimento:

$$\bar{e} = \begin{bmatrix} \bar{e}_1 \\ \bar{e}_2 \\ \bar{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_r - x \\ y_r - y \\ \theta_r - \theta \end{bmatrix}. \quad (2.33)$$

L'inseguimento di una traiettoria con errore nullo a regime può essere così ricondotto al problema della stabilizzazione nell'origine nello spazio di stato \bar{e} . Notando che l'errore di inseguimento prescinde dalla posizione assoluta dei due veicoli rispetto ad una terna fissa di riferimento $\langle W \rangle$, ma dipende solamente dalla loro posizione relativa, è possibile riferire le variabili errore rispetto ad una terna di riferimento solidale con il veicolo "inseguitore" $\langle I \rangle$ ed orientata opportunamente, come riportato in figura 2.10. Il legame tra le due terne, può essere espresso con la rototraslazione (nel piano) ${}^I T_W$:

$${}^I p = {}^I T_W {}^W p = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & -x \cos \theta - y \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta & x \sin \theta - y \cos \theta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^W p_x \\ {}^W p_y \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (2.34)$$

la quale esprime il legame tra la posizione (x_r, y_r) rispetto alla terna solidale al veicolo inseguitore. Per ottenere la cinematica del nuovo errore di posizione rispetto alla terna $\langle I \rangle$ è necessario derivare rispetto al tempo:

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ 1 \end{bmatrix} = {}^I T_W \begin{bmatrix} x_r \\ y_r \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_r - \theta)v_r - v + e_2\omega \\ \sin(\theta_r - \theta)v_r - e_1\omega \end{bmatrix}. \quad (2.35)$$

Osservazione 2.10. *La dinamica dell'errore posizionale riportata nella equazione (2.35) poteva anche essere dedotta con considerazioni fisiche anziché geometriche. Infatti, con riferimento alla terna $\langle I \rangle$, è possibile notare come la parte di velocità dell'errore \dot{e}_1 dovuta al veicolo di riferimento dipenda dall'orientazione relativa tra i due veicoli, mentre quella dell'inseguitore dipenda dalla propria velocità di avanzamento lineare, essendo la terna posizionata con l'asse X_I orientato lungo la direzione di avanzamento (vincolo cinematico, figura 2.10). Ragionamenti analoghi possono essere intrapresi per la velocità \dot{e}_2 .*

L'errore di orientamento rimane immutato, non avendo significato nella terna $\langle I \rangle$. Lo spazio di stato finale da stabilizzare nell'origine avrà così la seguente cinematica:

$$\dot{e} = \begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_r \cos e_3 - v + e_2\omega \\ v_r \sin e_3 - e_1\omega \\ \omega_r - \omega \end{bmatrix}. \quad (2.36)$$

Si scelga perciò una candidata di Lyapunov p.d. (si ricorda che in questo caso ci interessa la stabilizzazione su tutto lo spazio di stato e), come ad esempio:

$$\begin{cases} \mathbf{V}(e) = \frac{1}{2}(e_1^2 + e_2^2) + K_{e_3}(1 - \cos e_3) \\ L_f \mathbf{V}(e) = e_1(v_r \cos e_3 - v + e_2\omega) + e_2(v_r \sin e_3 - e_1\omega) + K_{e_3} \sin e_3(\omega_r - \omega) \end{cases}, \quad (2.37)$$

dove $K_{e_3} > 0$ è un grado di libertà aggiunto per il progetto del controllo stabilizzante. Scegliendo i controlli:

$$\begin{cases} v = v_r \cos e_3 + e_1 \\ \omega = \omega_r + \frac{1}{K_{e_3}}e_2v_r + \sin e_3 \end{cases}, \quad (2.38)$$

si ottiene la derivata direzionale $L_f \mathbf{V}(e) = -e_1^2 - K_{e_3} \sin^2 e_3$, per la quale:

$$L_f \mathbf{V}(e) = 0 \Rightarrow \begin{cases} e_1 = 0 \\ e_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_2\omega_r + \frac{1}{K_{e_3}}e_2^2v_r \\ 0 \\ -\frac{1}{K_{e_3}}e_2v_r \end{bmatrix}. \quad (2.39)$$

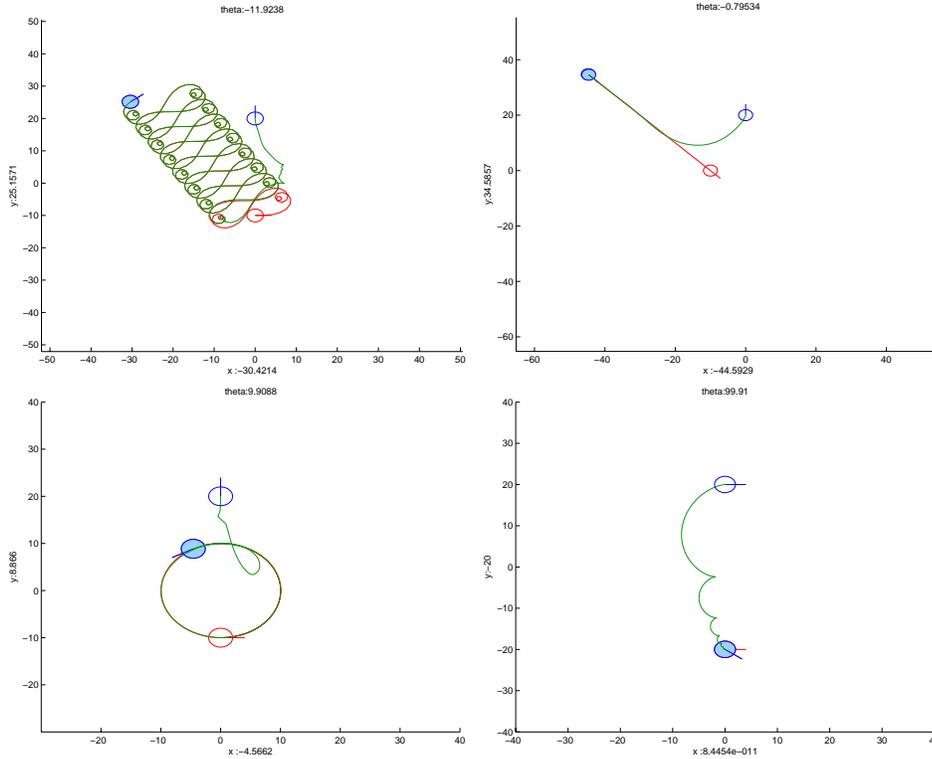


Figura 2.11: Risultati della simulazione per l'inseguimento di un unicyclo di riferimento. Come si può notare dalla figura, con questa tecnica è possibile risolvere i problemi di path following aggiungendo una legge temporale di variazione al cammino: questo comporta la necessità del controllo della velocità di avanzamento v .

dove si nota che $\dot{e}_1 = \dot{e}_3 = 0$ nel caso in cui $e_2 = 0$ ed è quindi possibile concludere che, finché il veicolo di riferimento ha almeno una delle due velocità non nulla, l'origine è un punto di equilibrio asintoticamente stabile per il sistema (2.36) (Krasowskii–Lasalle).

Fissando la costante di guadagno $K_{e_3} = \{10\}$ e scegliendo come condizione iniziale del veicolo inseguitore il punto $q_0^i = [x_0^i, y_0^i, \theta_0^i]^T = [0, 20, \frac{\pi}{2}]^T$ si ottengono vari risultati a seconda delle velocità del riferimento. Nel primo esempio (figura 2.11, in alto a sinistra) il veicolo di riferimento ha come condizione iniziale $q_0^r = [x_0^r, y_0^r, \theta_0^r]^T = [0, -10, 0]^T$ e velocità $[v_r, \omega_r]^T = [20 \cos(t), 10 \sin(t)]^T$, le quali descrivono una traiettoria generica nello spazio di stato. Nel secondo esempio (figura 2.11, in alto a destra) il veicolo di riferimento ha come condizione iniziale $q_0^r = [x_0^r, y_0^r, \theta_0^r]^T = [-10, 0, -\frac{\pi}{4}]^T$ e velocità $[v_r, \omega_r]^T = [-10, 0]^T$ in grado di definire una retta generica di

equazione $y = -x - 10$. Se invece il veicolo di riferimento ha come condizione iniziale $q_0^r = [x_0^r, y_0^r, \theta_0^r]^T = [0, -10, 0]^T$ e velocità $[v_r, \omega_r]^T = [10, 1]^T$, la sua traiettoria descrive una circonferenza di raggio $R = 10$ nello spazio di stato del veicolo, percorsa a velocità costante (figura 2.11, in basso a sinistra). Si noti come questi due ultimi esempi corrispondono al problema del path following con l'aggiunta di una legge dinamica di percorrenza del luogo. Questa soluzione più flessibile della precedente ha comportato l'utilizzo della velocità di avanzamento del veicolo.

Nel quarto ed ultimo esempio (figura 2.11, in basso a destra) il veicolo di riferimento ha come condizione iniziale $q_0^r = [x_0^r, y_0^r, \theta_0^r]^T = [0, -20, 0]^T$ ed il veicolo inseguitore $q_0^i = [x_0^i, y_0^i, \theta_0^i]^T = [0, 20, 0]^T$. Le velocità del riferimento sono stavolta $[v_r, \omega_r]^T = [0, 1]^T$ corrispondenti ad un caso estremo di sola rotazione. Come stabilito dallo studio teorico, il problema risulta risolvibile anche in questa condizione estrema.

2.2.3 Point-to-point motion: il Teorema di Brockett

Dal punto di vista prettamente controllistico, il problema del “point-to-point motion” può essere trattato come un problema di stabilizzazione di un punto di equilibrio nello spazio di stato del veicolo. Uno dei problemi maggiori presenti nel controllo point-to-point di robot mobili dalla struttura meccanica relativamente semplice, è principalmente legato all'anolonomia del veicolo. Infatti, in generale si ha a disposizione un numero di gradi di libertà per il controllo inferiore al numero di variabili di stato del veicolo che si deve controllare: si pensi all'esempio dell'uniciclo che ha due controlli (velocità lineare ed angolare) per uno spazio di stato di dimensione tre (posizione del punto centrale dell'interasse delle ruote ed orientamento del veicolo) o all'esempio del biciclo (dove il rapporto è di due a quattro). L'errore da annullare utilizzato solitamente come segnale di retroazione è la semplice differenza di configurazione nello spazio di stato tra posizione attuale e posizione desiderata.

Uno dei maggiori problemi che si incontrano nella stabilizzazione di un robot mobile su un punto appartenente al proprio spazio di stato è legato al teorema di Brockett:

Teorema 2.5. (Brockett) *Sia dato il sistema $\dot{x} = f(x, u) \in \mathbb{R}^n$, con $f(x_0, 0) = 0$ (ossia x_0 stato di equilibrio del sistema con ingresso nullo) e sia il campo vettoriale $f(\bullet, \bullet)$ differenziabile con continuità in un intorno $B_{(x_0, 0)}$ del punto $(x_0, 0)$. Condizioni necessarie per l'esistenza di una legge di controllo $u \in \mathbb{R}^m$ differenziabile con continuità (regolare e tempo invariante) che renda il punto $(x_0, 0)$ asintoticamente stabile sono:*

1. Il sistema linearizzato non deve avere modi non controllabili associati ad autovalori a parte reale positiva;
2. Esiste un intorno \bar{B}_{x_0} del punto x_0 tale che $\forall \xi \in \bar{B}_{x_0}, \exists u_\xi(t)$ con $t \in [0, +\infty)$ in grado di “guidare” la soluzione di $\dot{x} = f(x, u_\xi)$ da $x = \xi$ per $t = 0$ a $x = x_0$ per $t = +\infty$;
3. Sia \bar{B}_{x_0} un intorno del punto di equilibrio x_0 , allora la mappa non lineare:

$$\gamma : \bar{B}_{x_0} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$$

definito come $\gamma : (x, u) \rightarrow f(x, u)$ deve avere come regione di arrivo un insieme aperto contenente l'origine.

I primi due punti presentati sono di facile interpretazione e possono trovare giustificazione nella teoria classica dei sistemi non lineari. Il terzo punto, quello più interessante per noi, è invece di più complessa comprensione. La dimostrazione del teorema è omessa e si rimanda all'articolo originale di Brockett.

Esistono però delle specializzazioni a seconda del tipo di sistema non lineare sotto esame. Infatti, se il sistema sotto esame è affine negli ingressi $\dot{x} = f(x) + \sum g_i(x)u_i$, con $x(t) \in \bar{B}_{x_0} \subset \mathbb{R}^n$, la terza condizione implica che il problema della stabilizzazione con un controllo regolare e tempo invariante non può avere soluzione se esiste una distribuzione regolare $D = \{f(x), g_1(x), g_2(x), \dots, g_m(x)\}$ con $\dim(\text{span}(D)) < n$. Nel caso in cui il sistema sia ancora affine negli ingressi ma anche senza termine di deriva $f(x) = 0$, se i campi vettoriali di ingresso $g_i(x)$ sono linearmente indipendenti nel punto x_0 allora esiste una soluzione al problema della stabilizzazione sul punto con una legge regolare e tempo invariante se e solo se il sistema è quadrato, ossia si hanno tanti ingressi quanti stati $m = n$. In tal senso, le distribuzioni con singolarità nel punto di equilibrio sono quelle che rivestono maggiore interesse dal punto di vista controllistico.

Osservazione 2.11. *Si noti come nel caso in cui il sistema non lineare sia affine negli ingressi e senza termine di deriva, la condizione espressa dal teorema di Brockett, in genere solo necessaria, diventi necessaria e sufficiente.*

Si consideri quindi il problema del point-to-point motion per il veicolo unicycle. Il problema della stabilizzazione su un punto q_0 qualsiasi all'interno dello spazio di stato del veicolo partendo da un punto generico q_f , può essere ricondotto, mediante una adeguata roto-traslazione del sistema di riferimento, alla stabilizzazione nell'origine del sistema di coordinate prescelto. Ricordando il modello cinematico dell'unicycle (1.18) e notando che tale modello

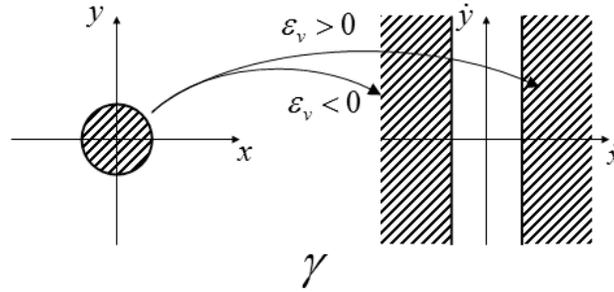


Figura 2.12: Visualizzazione grafica della terza condizione del teorema di Brockett nel caso dell'uniciclo in coordinate cartesiane. Considerando il piano (x, y) , si noti come l'insieme di arrivo della mappa γ non contenga l'origine.

è affine negli ingressi e senza termine di deriva, si calcoli la distribuzione generata dai campi vettoriali di ingresso:

$$D = \left\{ \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \quad (2.40)$$

la quale ha dimensione nel punto di equilibrio prescelto $q_0 = [x_0, y_0, \theta_0]^T = [0, 0, 0]^T$ pari a due, ossia i due campi vettoriali di ingresso sono linearmente indipendenti. Per il teorema di Brockett, il problema della stabilizzazione potrebbe essere risolto se e solo se si abbia a disposizione un numero di ingressi pari alla dimensione dello spazio di stato del sistema, condizione non verificata nel caso dell'uniciclo essendo il veicolo anolonomo e sotto-attuato. Se ne deduce che non è possibile trovare una legge di controllo regolare e tempo invariante in grado di stabilizzare il veicolo nel punto desiderato. In particolare, non è possibile trovare alcun controllore alla Lyapunov, per definizione regolare e tempo invariante, in grado di risolvere il problema della stabilizzazione su un punto.

Osservazione 2.12. *Si osservi come la condizione precedente, specializzata per il caso di sistema non lineare affine negli ingressi e senza termine di deriva, possa essere ottenuta direttamente dalla terza condizione del teorema di Brockett. Si consideri infatti la mappa γ , espressa graficamente in figura 2.12 (si riporta solo il piano (x, y) per semplicità). Si noti come nel caso in cui il sistema sia nell'intorno dell'origine $(x, y, \theta) = (\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_\theta)$ con ingressi $(v, \omega) = (\epsilon_v, 0)$ l'insieme di arrivo della mappa γ non contiene l'origine del sistema di riferimento.*

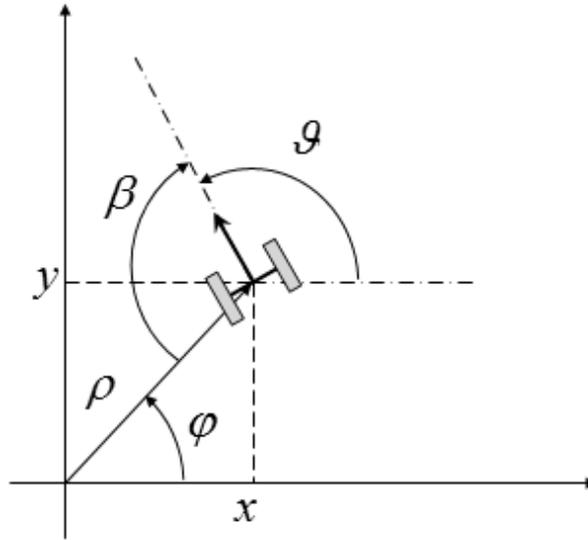


Figura 2.13: Sistema di riferimento adottato per l'uniciclo.

Considerando il cambiamento di coordinate:

$$\begin{bmatrix} \rho \\ \phi \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{x^2 + y^2} \\ \arctan(\frac{y}{x}) \\ \arctan(\frac{y}{x}) - \theta + \pi \end{bmatrix}, \quad (2.41)$$

con la trasformazione di coordinate inversa:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho \cos \phi \\ \rho \sin \phi \\ \phi - \beta + \pi \end{bmatrix}, \quad (2.42)$$

dove ρ è la distanza del punto di mezzo dell'interasse delle ruote dall'origine, ϕ è l'orientazione del vettore distanza dall'origine e β è una terza coordinata indipendente dalle prime due che esprime lo scostamento della direzione di avanzamento del veicolo rispetto alla congiungente il punto di mezzo dell'interasse con l'origine del sistema di riferimento (figura 2.13). Annullando le tre nuove variabili di stato si ottiene la stabilizzazione del veicolo nel punto desiderato.

Osservazione 2.13. *La trasformazione di coordinate appena introdotta non è un diffeomorfismo globale, dato che non è definita nell'origine. Dato che il problema in esame è proprio la stabilizzazione nell'origine, vedremo come questo problema potrà essere positivamente risolto.*

Il nuovo modello cinematico nelle nuove variabili di stato sarà perciò:

$$\begin{cases} \dot{\rho} = -\cos \beta v \\ \dot{\phi} = \frac{1}{\rho} \sin \beta v \\ \dot{\beta} = \frac{1}{\rho} \sin \beta v - \omega \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{\rho} = -\rho \cos \beta v^* \\ \dot{\phi} = \sin \beta v^* \\ \dot{\beta} = \sin \beta v^* - \omega \end{cases}, \quad (2.43)$$

dove $v^* = \frac{v}{\rho}$ è la nuova velocità di avanzamento lineare del veicolo ed ω è l'usuale velocità angolare.

Il modello cinematico ottenuto è ancora chiaramente affine negli ingressi e senza termine di deriva ed è possibile fare nuovamente l'analisi sulla distribuzione generata dai campi vettoriali di ingresso:

$$D = \left\{ \begin{bmatrix} -\rho \cos \beta \\ \sin \beta \\ \sin \beta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\} \quad (2.44)$$

la quale ha dimensione nel punto di equilibrio prescelto $\bar{q}_0 = [\rho_0, \phi_0, \beta_0]^T = [0, 0, 0]^T$ pari ad uno, ossia i due campi vettoriali di ingresso sono stavolta linearmente dipendenti. Per il teorema di Brockett, si deduce che è possibile trovare una legge di controllo regolare e tempo invariante in grado di stabilizzare il veicolo nel punto desiderato. Si ricorda che questo risultato è stato reso possibile dall'aver applicato un cambiamento di coordinate che non è un diffeomorfismo globale.

Osservazione 2.14. *Si osservi come la condizione precedente, specializzata per il caso di sistema non lineare affine negli ingressi e senza termine di deriva, possa essere ottenuta direttamente dalla terza condizione del teorema di Brockett. Si consideri infatti la mappa γ , espressa graficamente in figura 2.14 (si riporta solo il piano (ρ, ϕ) per semplicità). Si noti come nel caso in cui il sistema sia nell'intorno dell'origine $(\rho, \phi, \beta) = (\epsilon_\rho, \epsilon_\phi, \epsilon_\beta)$ con ingressi $(v^*, \omega) = (\epsilon_{v^*}, 0)$ l'insieme di arrivo della mappa γ sia un insieme aperto contenente l'origine del sistema di riferimento scelto.*

Si cerchi quindi di stabilizzare il veicolo utilizzando un controllore alla Lyapunov, e si consideri a tal proposito la seguente candidata:

$$\begin{cases} \mathbf{V}(\bar{q}) = \frac{1}{2}(\rho^2 + \phi^2 + \lambda\beta^2) \\ L_f \mathbf{V}(\bar{q}) = -\rho^2 \cos \beta v^* + \phi \sin \beta v^* + \lambda\beta \sin \beta v^* - \lambda\beta\omega \end{cases}, \quad (2.45)$$

dove $\lambda > 0$ è un grado di libertà aggiuntivo a disposizione del progettista. Sceglieremo i seguenti controlli:

$$\begin{cases} v^* = \cos \beta \\ \omega = \frac{\phi \sin \beta \cos \beta + \lambda\beta \sin \beta \cos \beta}{\lambda\beta} + \beta \end{cases}, \quad (2.46)$$

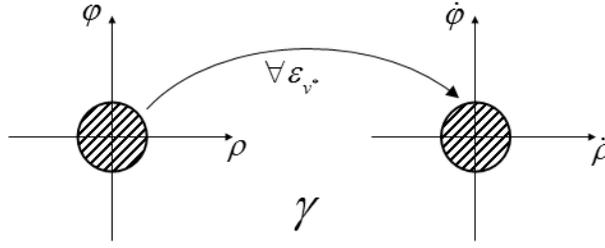


Figura 2.14: Visualizzazione grafica della terza condizione del teorema di Brockett nel caso dell'uniciclo in coordinate cilindriche. Considerando il piano (ρ, ϕ) , si noti come l'insieme di arrivo della mappa γ sia un insieme aperto contenente l'origine.

si ottiene $L_f \mathbf{V}(\bar{q}) = -\rho^2 \cos^2 \beta - \lambda \beta^2$ s.n.d.. Notando che:

$$L_f \mathbf{V}(\bar{q}) = 0 \rightarrow \begin{cases} \rho = 0 \\ \beta = 0 \end{cases} \rightarrow \dot{\beta} = -\omega = -\frac{\dot{\phi}}{\lambda} \quad (2.47)$$

ed utilizzando ancora una volta Krosowskii–Lasalle, è possibile concludere sulla asintotica stabilità del punto di equilibrio.

Osservazione 2.15. *Si noti come la stabilizzazione nell'origine in questo set di coordinate non stabilizza il veicolo nelle coordinate originali nell'origine ma bensì nel punto $q = (x, y, \theta) = (0, 0, \pm\pi)$. Questo non rappresenta un problema, potendo ulteriormente ruotare il sistema di riferimento dell'angolo necessario. Vedremo che questa scelta permette di ottenere una caratteristica importante posseduta dalle traiettorie di stabilizzazione del sistema.*

Ricordando che il diffeomorfismo presentato non è definito nell'origine, come è possibile stabilizzare il veicolo su tale punto non definito nel nuovo set di coordinate? Dal punto di vista squisitamente intuitivo, si ricorda che la stabilità alla Lyapunov è una stabilità *asintotica*, ossia il punto di equilibrio asintoticamente stabile è raggiunto dal sistema per $t \rightarrow +\infty$. Pertanto, la condizione $\bar{q} = 0$ non definita nel diffeomorfismo non si verifica mai, se non all'infinito. Questo significa che dal punto di vista strettamente pratico, una volta che il veicolo si porta in una configurazione $\epsilon = [\epsilon_\rho, \epsilon_\phi, \epsilon_\beta]^T$ “infinitamente” vicina all'origine, il controllo non ha più effetto ed il veicolo si è stabilizzato correttamente nella configurazione desiderata. Con “infinitamente” vicina all'origine si intende ad una distanza dall'origine inferiore alla precisione dei sensori utilizzati per la localizzazione del veicolo ed alla sensibilità degli attuatori adottati. Per una dimostrazione rigorosa sull'asintotica stabilità del controllore trovato si veda l'articolo di Aicardi, Casalino, Bicchi.

Osservazione 2.16. *Si consideri il problema della stabilizzazione sull'origine con il vincolo addizionale $|\beta| < \Delta$, cioè che il veicolo si “parcheggi” nella posizione desiderata senza perdere di “vista” l'origine del sistema di riferimento. Si consideri la funzione di Lyapunov p.d. rispetto al sottospazio (ϕ, β) :*

$$\mathbf{V}(\phi, \beta) = \frac{\phi^2}{2} + \frac{\lambda\beta^2}{2},$$

per la quale, applicando i controlli ricavati precedentemente, si ottiene:

$$L_f \mathbf{V}(\phi, \beta) = -\lambda\beta^2,$$

che è n.s.d. rispetto al sottospazio di interesse. Si consideri allora l'ellisse nel piano (ϕ, β) definita da $\mathbf{V}(\phi, \beta) \leq \frac{\lambda\Delta^2}{2}$. Se la condizione iniziale (ϕ_0, β_0) è dentro l'ellisse, vi permarrà durante il movimento definito dai controlli calcolati precedentemente (la derivata direzionale è n.s.d.).

A questo punto è possibile osservare che per ogni condizione iniziale (ϕ_0, β_0) tale per cui $\beta_0 < \Delta$, è possibile scegliere il valore di λ per cui l'evoluzione di β rimane confinata nell'intervallo aperto $(-\Delta, \Delta)$. Infatti, scegliendo:

$$\lambda \geq \frac{\phi_0^2}{\Delta^2 - \beta_0^2},$$

si ottiene subito:

$$\mathbf{V}(\phi_0, \beta_0) = \frac{\phi_0^2}{2} + \frac{\phi_0^2}{\Delta^2 - \beta_0^2} \frac{\beta_0^2}{2} = \frac{\phi_0^2 \Delta^2}{2(\Delta^2 - \beta_0^2)} \leq \frac{\lambda \Delta^2}{2}$$

ossia scegliendo opportunamente λ è possibile deformare l'ellisse in modo da includere la condizione iniziale (ϕ_0, β_0) , purché $\beta_0 < \Delta$ (si noti infatti che per $\beta_0 = \Delta$, λ non è definito).

Si fissi nei primi due esempi la costante di guadagno $\lambda = 10$ e si scelga come condizione iniziale del veicolo inseguitore alternativamente il punto $q_0 = [x_0, y_0, \theta_0]^T = [0, 20, \frac{\pi}{2}]^T$ ed il punto $q_0 = [x_0, y_0, \theta_0]^T = [-30, -20, 0]^T$ si ottengono i risultati riportati in figura 2.15, in alto a sinistra e a destra rispettivamente. Nel terzo esempio (figura 2.15, in basso a sinistra) il veicolo ha ancora le stesse condizioni iniziali del secondo esempio, ma la costante di guadagno $\lambda = 1$, il che permette di avere una manovra di parcheggio più ampia (la variabile β converge più lentamente). Nel quarto ed ultimo esempio (figura 2.15, in basso a destra) il valore della costante di guadagno λ è fissato in base alla condizione sul $\Delta = \frac{\pi}{8}$ ed alla condizione iniziale del veicolo $q_0 = [x_0, y_0, \theta_0]^T = [50, 10, -\pi]^T$, ossia $\bar{q}_0 = [\rho_0, \phi_0, \beta_0]^T = [50.99, \frac{\pi}{16}, \frac{\pi}{16}]^T$. Con questi dati si ottiene subito $\lambda \geq \frac{1}{3}$. Nel terzo esempio la scelta fatta è $\lambda = \frac{1}{2}$. Si noti come la traiettoria descritta dal veicolo verifica le condizione sull'orientamento.

2.3 Controllo del biciclo come un unicycle: il backstepping

Si consideri il modello cinematico del biciclo a trazione anteriore con riferimento sull'unicycle posteriore in coordinate cartesiane $[x, y, \theta, \psi]$:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \psi & 0 \\ \sin \theta \cos \psi & 0 \\ \frac{\sin \psi}{L} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix}. \quad (2.48)$$

Effettuando un cambiamento di coordinate da cartesiane a cilindriche $[\rho, \phi, \beta, \psi]$:

$$\begin{bmatrix} \rho \\ \phi \\ \beta \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{x^2 + y^2} \\ \arctan \frac{y}{x} \\ \pi + \arctan \frac{y}{x} - \theta \\ \psi \end{bmatrix}, \quad (2.49)$$

si ottiene la dinamica delle nuove variabili di stato:

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= \frac{1}{\rho}(x \cos \theta \cos \psi + y \sin \theta \cos \psi)v = \cos \psi(\cos \phi \cos \theta + \sin \phi \sin \theta)v = \\ &= \cos \psi \cos(\phi - \theta)v = \cos \psi \cos(\beta - \pi)v = -\cos \beta \cos \psi v \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= \frac{1}{\rho^2}(xy - yx) = \frac{1}{\rho}(\cos \phi \sin \theta \cos \psi - \sin \phi \cos \theta \cos \psi)v = \\ &= \sin(\theta - \phi) \cos \psi \frac{v}{\rho} = \sin \beta \cos \psi \frac{v}{\rho} \end{aligned}$$

$$\dot{\beta} = \dot{\phi} - \dot{\theta} = \sin \beta \cos \psi \frac{v}{\rho} - \sin \psi \frac{v}{L}$$

$$\dot{\psi} = \omega$$

Ponendo come di consueto $v^* = \frac{v}{\rho}$, è possibile ottenere la seguente dinamica:

$$\begin{bmatrix} \dot{\rho} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\rho \cos \beta \cos \psi & 0 \\ \sin \beta \cos \psi & 0 \\ \sin \beta \cos \psi - \sin \psi \frac{L}{\rho} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^* \\ \omega \end{bmatrix}. \quad (2.50)$$

2.3.1 Controlli per il biciclo

La dinamica dell'unicycle ottenuta con i controlli calcolati nel paragrafo 2.2.3 va confrontata con quella del biciclo (2.50). Se avessimo accesso diretto a ψ

invece che a ψ , potremmo imporre $\psi = \hat{\psi}$ con:

$$\begin{cases} v^* \cos \hat{\psi} = \cos \beta \\ v^* \sin \hat{\psi} = \frac{L}{\rho} \left[(\phi + \lambda\beta) \frac{\sin \beta \cos \beta}{\lambda\beta} + k_\beta \lambda\beta \right] \end{cases}, \quad (2.51)$$

cioè la legge di stabilizzazione dell'uniciclo. Una soluzione possibile (con v^* sempre di un segno) potrebbe essere:

$$\begin{cases} v^* = \sqrt{\cos^2 \beta + \frac{L^2}{\rho^2} \left[(\phi + \lambda\beta) \frac{\sin \beta \cos \beta}{\lambda\beta} + k_\beta \lambda\beta \right]^2} \\ \hat{\psi} = \arctan \left(\frac{\frac{L}{\rho} \left[(\phi + \lambda\beta) \frac{\sin \beta \cos \beta}{\lambda\beta} + k_\beta \lambda\beta \right]}{\cos \beta} \right) \end{cases}. \quad (2.52)$$

In realtà queste sono solo leggi nominali. Le leggi effettive saranno:

$$\begin{cases} v^* \cos \psi = v^* \frac{\cos \psi}{\cos \hat{\psi}} \cos \hat{\psi} = \frac{\cos \psi}{\cos \hat{\psi}} \cos \beta \\ v^* \sin \psi = v^* \frac{\sin \psi}{\sin \hat{\psi}} \sin \hat{\psi} = \frac{\sin \psi}{\sin \hat{\psi}} \left\{ \frac{L}{\rho} \left[(\phi + \lambda\beta) \frac{\sin \beta \cos \beta}{\lambda\beta} + k_\beta \lambda\beta \right] \right\} \end{cases}, \quad (2.53)$$

le quali tengono in considerazione l'impossibilità di accesso diretto alla variabile ψ . Questo comporta una leggera variazione rispetto alle relazioni (2.52) dove il calcolo della $\hat{\psi}$ rimane invariato, mentre si ottiene stavolta:

$$v^* = \sqrt{\left(\frac{\cos \psi}{\cos \hat{\psi}} \right)^2 \cos^2 \beta + \left(\frac{\sin \psi}{\sin \hat{\psi}} \right)^2 \frac{L^2}{\rho^2} \left[(\phi + \lambda\beta) \frac{\sin \beta \cos \beta}{\lambda\beta} + k_\beta \lambda\beta \right]^2} \quad (2.54)$$

Sostituendo nella dinamica (2.50) si ottiene:

$$\begin{bmatrix} \dot{\rho} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos^2 \beta \frac{\cos \psi}{\cos \hat{\psi}} \rho \\ \sin \beta \cos \beta \frac{\cos \psi}{\cos \hat{\psi}} \\ \sin \beta \cos \beta \frac{\cos \psi}{\cos \hat{\psi}} - \frac{\sin \psi}{\sin \hat{\psi}} \left[(\phi + \lambda\beta) \frac{\sin \beta \cos \beta}{\lambda\beta} + k_\beta \lambda\beta \right] \\ \omega \end{bmatrix}. \quad (2.55)$$

Si consideri adesso la seguente candidata di Lyapunov \mathbf{V}_1 con la relativa derivata direzionale lungo le traiettorie del sistema:

$$\begin{cases} \mathbf{V}_1 = \frac{1}{2} (\rho^2 + \phi^2 + \lambda\beta^2) + \frac{1}{2} (\psi - \hat{\psi})^2, \\ L_f \mathbf{V}_1 = -\frac{\cos \psi}{\cos \hat{\psi}} \cos^2 \beta \rho^2 + \left(\frac{\cos \psi}{\cos \hat{\psi}} - \frac{\sin \psi}{\sin \hat{\psi}} \right) (\phi + \lambda\beta) \sin \beta \cos \beta \\ - \frac{\sin \psi}{\sin \hat{\psi}} k_\beta \lambda^2 \beta^2 + (\psi - \hat{\psi}) (\omega - \dot{\hat{\psi}}). \end{cases} \quad (2.56)$$

dove è possibile notare il termine di *backstepping* $\frac{1}{2}(\psi - \hat{\psi})^2$ inserito nella candidata di Lyapunov. Con questo termine è possibile far coincidere la variabile ψ con il suo valore desiderato $\hat{\psi}$ a regime, ammesso che il punto di equilibrio $(\rho, \phi, \beta, \psi) = (0, 0, 0, \hat{\psi})$ sia un punto asintoticamente stabile per il sistema.

Osservazione 2.17. *Il backstepping è necessario per due motivi fondamentali:*

1. *Utilizzo della vecchia legge di controllo stabilizzante per l'uniciclo definita sul sottospazio (ρ, ϕ, β) ;*
2. *Impossibilità di accesso diretto alla variabile aggiuntiva ψ ma possibilità di accesso alla sua derivata $\dot{\psi}$.*

Come si vedrà in seguito, queste considerazioni sono di carattere generale ed hanno una naturale estensione qualora si voglia controllare un sistema sul modello dinamico senza rinunciare allo studio effettuato sul modello cinematico.

Se ψ e $\hat{\psi}$ restano entrambi limitati tra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$, il primo termine di $L_f \mathbf{V}_1$ è definito negativo e si annulla per $\rho = 0$ o $\beta = \pm\frac{\pi}{2}$. Per il secondo termine è possibile scrivere:

$$\frac{\cos \psi}{\cos \hat{\psi}} - \frac{\sin \psi}{\sin \hat{\psi}} = \frac{\cos \psi \sin \hat{\psi} - \sin \psi \cos \hat{\psi}}{\cos \hat{\psi} \sin \hat{\psi}} = \frac{\sin(\hat{\psi} - \psi)}{\cos \hat{\psi} \sin \hat{\psi}}. \quad (2.57)$$

Resta adesso da definire il controllo ω . Scegliendo $k_\beta = 0$ (il termine $\frac{\sin \psi}{\sin \hat{\psi}}$ di $L_f \mathbf{V}_1$ ha segno indefinito e può divergere per $\hat{\psi} \rightarrow 0$) si può porre:

$$\begin{aligned} \omega &= \dot{\hat{\psi}} - \frac{\sin(\hat{\psi} - \psi)}{\cos \hat{\psi} \sin \hat{\psi}} \frac{(\phi + \lambda\beta) \sin \beta \cos \beta}{\psi - \hat{\psi}} - k_\psi (\psi - \hat{\psi}) = \\ &= \dot{\hat{\psi}} + \frac{\lambda\beta\rho v^* \sin(\psi - \hat{\psi})}{L \cos \hat{\psi} (\psi - \hat{\psi})} - k_\psi (\psi - \hat{\psi}), \end{aligned} \quad (2.58)$$

con k_ψ grado di libertà aggiuntivo. Resta da calcolare esplicitamente la derivata temporale di $\hat{\psi}$. Per motivi di spazio, si riporta separatamente il numeratore:

$$\begin{aligned} N(\dot{\hat{\psi}}) &= L\rho\lambda\beta \cos^2 \beta \sin \beta \dot{\phi} - L\lambda\beta \cos \beta [(\phi + \lambda\beta) \sin \beta \cos \beta + k_\beta \lambda^2 \beta^2] \dot{\rho} \\ &\quad + L\rho\lambda \{ \beta \cos \beta [\lambda \cos \beta \sin \beta + (\phi + \lambda\beta)(\cos^2 \beta - \sin^2 \beta) \\ &\quad + 2k_\beta \lambda^2 \beta] + [(\phi + \lambda\beta) \sin \beta \cos \beta + k_\beta \lambda^2 \beta^2] (\beta \sin \beta - \cos \beta) \} \dot{\beta}, \end{aligned} \quad (2.59)$$

ed il denominatore:

$$D(\hat{\psi}) = L^2 [(\phi + \lambda\beta) \sin \beta \cos \beta + k_\beta \lambda^2 \beta^2]^2 + \rho^2 \beta^2 \lambda^2 \cos^2 \beta, \quad (2.60)$$

di $\hat{\psi}$.

Si noti che ω è ben definita perché $-\frac{\pi}{2} \leq \hat{\psi} \leq \frac{\pi}{2}$ (questa condizione è garantita da (2.52)). Con la scelta dei controlli (v^*, ω) si ottiene:

$$L_f \mathbf{V}_1 = -\frac{\cos \psi}{\cos \hat{\psi}} \cos^2 \beta \rho^2 - k_\psi (\psi - \hat{\psi})^2, \quad (2.61)$$

che è n.s.d. purché $k_\psi > 0$. Resta da studiare l'insieme invariante massimo per la funzione di Lyapunov così definita. Si consideri a tal proposito la regione $\Omega_\varepsilon = \{(\rho, \phi, \beta, \psi) \mid \mathbf{V}_1 < \varepsilon\}$ e $\Sigma_0 = \{(\rho, \phi, \beta, \psi) \in \Omega_\varepsilon \mid L_f \mathbf{V}_1 = 0\}$. Gli elementi appartenenti a Σ_0 sono: $(\bar{\rho}, \bar{\phi}, \pm \frac{\pi}{2}, \hat{\psi})$ e $(0, \bar{\phi}, \bar{\beta}, \hat{\psi})$, $\forall \bar{\rho}, \bar{\phi}, \bar{\beta}$. Scegliendo $\varepsilon \leq \frac{\pi^2}{4}$ si ottiene che $\beta = \pm \frac{\pi}{2} \notin \Omega_\varepsilon$, quindi l'unico punto $\in \Sigma_0$ è $(0, \bar{\phi}, \bar{\beta}, \hat{\psi})$.

Si prenda in considerazione il controllo ω così come ricavato nella seconda delle (2.58) e la si valuti nell'unico punto di equilibrio appartenente a Σ_0 :

$$\begin{aligned} \omega &= \dot{\hat{\psi}} + \frac{\lambda \beta \rho v^* \sin(\psi - \hat{\psi})}{L \cos \hat{\psi} (\psi - \hat{\psi})} - k_\psi (\psi - \hat{\psi}) \Rightarrow \\ \omega &= \frac{(\bar{\phi} + \lambda \bar{\beta}) \sin \bar{\beta} \cos \bar{\beta}}{\cos \hat{\psi} \sin \hat{\psi}}, \end{aligned} \quad (2.62)$$

ottenuta sostituendo a v^* la seconda equazione in (2.53) e ricordando che in tale punto $\dot{\hat{\psi}} = 0$.

Alternativamente, se si sostituisce la prima delle (2.53), si ottiene per ω :

$$\begin{aligned} \omega &= \dot{\hat{\psi}} + \frac{\lambda \beta \rho v^* \sin(\psi - \hat{\psi})}{L \cos \hat{\psi} (\psi - \hat{\psi})} - k_\psi (\psi - \hat{\psi}) \Rightarrow \\ \omega &= 0. \end{aligned} \quad (2.63)$$

In $(0, \bar{\phi}, \bar{\beta}, \hat{\psi})$ si ha dunque $\omega = 0$, allora sapendo che $|\beta| < \frac{\pi}{2}$ per l'appartenenza all'insieme Σ_0 e ricordando (2.62) segue che $\phi = -\beta$. Ricordando la cinematica delle variabili di stato controllate, se $\rho = 0$ e $\psi = \hat{\psi}$ si ha $\dot{\rho} = 0$ e $\dot{\psi} = 0$, mentre per le altre due variabili di stato si ha:

$$\begin{cases} \dot{\beta} = \sin \bar{\beta} \cos \bar{\beta} \left(1 - \frac{(\bar{\phi} + \lambda \bar{\beta})}{\lambda \bar{\beta}}\right) = \frac{\sin \bar{\beta} \cos \bar{\beta}}{\lambda} \\ \dot{\phi} = \sin \bar{\beta} \cos \bar{\beta} \end{cases}, \quad (2.64)$$

esprimendo che ϕ e β hanno velocità scalate di un fattore costante $\lambda > 0$ e quindi dello stesso segno, contrariamente alla condizione su $\omega = 0$ che impone $\phi = -\beta$. Segue che $\sin \bar{\beta} \cos \bar{\beta} = 0$, ma dovendo essere $|\beta| < \frac{\pi}{2}$ per la condizione su Σ_0 , si ottiene $\beta = 0 \Rightarrow \phi = 0$. Si deduce così che $L_f \mathbf{V}_1 = 0$ se e solo se $(\rho, \phi, \beta, \psi) = (0, 0, 0, \hat{\psi})$.

Negli esempi presentati di seguito la costante di guadagno $\lambda = 1/2$, il passo del veicolo $L = 10$ e la posizione iniziale del veicolo $q_0 = [x_0, y_0, \theta_0, \phi_0]^T = [70.7, 70.7, 3.618, 0]^T$, per la quale il valore iniziale della funzione di Lyapunov (ottenuta scalando le misure di distanza per un fattore $K = 10^{-3}$) è $\mathbf{V}_1 = 1.5625 \approx \frac{\pi}{2}$. La traiettoria ottenuta per il parcheggio del veicolo biciclo è riportata in figura 2.16, in alto a sinistra. Sempre nella stessa figura è riportata l'evoluzione della funzione di Lyapunov \mathbf{V}_1 (in alto a destra) e della sua derivata direzionale $L_f \mathbf{V}_1$ (in basso a sinistra), dalle quali si può notare come, nonostante gli errori numerici dovuti alla simulazione, il vincolo su Ω_ε non sia mai superato. Nel secondo esempio (figura 2.16, in basso a destra) il veicolo ha ancora le stesse condizioni iniziali del primo esempio, ma la lunghezza del passo $L = 20$, il che porta ad avere una manovra di parcheggio più difficoltosa.

2.3.2 Studio di $\hat{\psi}$ e $\dot{\hat{\psi}}$

Lo studio intrapreso fino a questo punto non tiene conto delle possibilità che il calcolo di $\hat{\psi}$ e $\dot{\hat{\psi}}$ presenti delle singolarità. Si consideri a tal proposito l'equazione che definisce la $\hat{\psi}$:

$$\hat{\psi} = \arctan \left(\frac{L(\phi + \lambda\beta) \sin \beta}{\lambda\beta\rho} + \frac{Lk_\beta\beta}{\rho \cos \beta} \right). \quad (2.65)$$

Per $k_\beta = 0$ e $|\beta| < \frac{\pi}{2}$, le singolarità nel calcolo di $\hat{\psi}$ si hanno per $\rho \rightarrow 0$. Nel caso in cui contemporaneamente $\beta \rightarrow 0$ e $\phi \rightarrow 0$, entrambe più velocemente di quanto non lo faccia ρ , il problema non sussiste. Per imporre questo comportamento utilizzando gli strumenti di Lyapunov è possibile scegliere una candidata di Lyapunov del tipo:

$$\mathbf{V}_2 = \frac{K_1}{2}\rho^2 + \frac{K_2}{2}(\phi^2 + \beta^2) + \frac{K_3}{2}(\Psi - \hat{\Psi})^2 \quad (2.66)$$

con $K_2 \gg K_1$. Questo corrisponde ad annullare l'errore di orientazione del robot prima di giungere nella posizione desiderata, condizione fisicamente realistica data la scarsa manovrabilità del biciclo nell'intorno dell'origine.

Se $\rho \rightarrow 0$ più velocemente di β e ϕ , l'arctan è comunque definita e $\hat{\psi} = \pm \frac{\pi}{2}$, col segno definito dal numeratore. In quest'ultimo caso potrebbe non essere definita la ω a causa del termine $\frac{\rho}{\cos^2 \hat{\psi}}$. Tenendo presente (2.65) si ottiene:

$$\frac{\rho}{\cos^2 \hat{\psi}} = \rho + \frac{[L(\phi + \lambda\beta) \sin \beta \cos \beta + Lk_\beta \beta^2]^2}{\rho \lambda \beta^2 \cos \beta} \rightarrow \infty, \quad (2.67)$$

quando $\rho \rightarrow 0$.

Osservazione 2.18. *Resta comunque da ricordare che il diffeomorfismo adottato in partenza non è definito per $\rho = 0$, ed in tal caso si può considerare una stabilità pratica anziché asintotica.*

Per quanto riguarda la $\hat{\psi}$, i problemi si hanno quando il determinante $D(\hat{\psi})$ si annulla. Questo accade, sempre nella condizione $k_\beta = 0$, nei punti $(\rho, \phi, \beta, \psi)$ pari a:

1. $(\bar{\rho}, \bar{\phi}, 0, \bar{\psi})$;
2. $(\bar{\rho}, \bar{\phi}, \pm \frac{\pi}{2}, \bar{\psi})$;
3. $(0, \bar{\phi}, -\bar{\phi}, \bar{\psi})$.

Nel primo caso, anche il numeratore $N(\hat{\psi})$ tende a zero come β^2 , come il denominatore. Nel secondo caso, numeratore e denominatore tendono a zero entrambi come $\cos^2 \beta$. Nel terzo caso, il denominatore tende a zero più velocemente del numeratore e la $\hat{\psi}$ non è più ben definita. Concludendo, anche per $\hat{\psi}$ i problemi nascono quando $\rho = 0$, come nel caso di calcolo della $\hat{\psi}$. La soluzione, in prima battuta, può essere trovata ancora tramite la scelta di V_2 e della opportuna scalatura relativa data dalle costanti positive di guadagno K_i .

In definitiva non ci sono problemi di sorta se si parla di stabilità pratica ma non asintotica.

2.3.3 Controllore alternativo in backstepping

Si presenta adesso un ultimo esempio nel quale la stabilizzazione del biciclo è risolta utilizzando, praticamente invariati, i controlli precedentemente calcolati per l'uniciclo. In questo ultimo caso si farà decisamente ricorso alla tecnica del backstepping, in grado di risolvere i problemi di calcolo e di R.A.S. riscontrati nel caso precedente.

Si indichi ancora con la coppia $(v^*, \omega)^T$ i controlli per il biciclo nel caso di modello cinematico espresso in coordinate polari $\bar{q} = [\rho, \phi, \beta, \psi]^T$. Si indichi con la coppia $(v_u^*, \omega_u)^T$ le velocità, rispettivamente lineare ed angolare, dell'uniciclo nel corrispondente set di coordinate polari. Si faccia inoltre l'ulteriore ipotesi che i controlli per l'uniciclo vengano calcolati con le leggi riportate in (2.46), in grado di “parcheggiare” l'uniciclo nell'origine della terna di riferimento. Si ricordi che con tale controllore è possibile portare a termine la manovra senza mai perdere di “vista” il punto di arrivo desiderato.

Ancora una volta, si faccia l'ipotesi di poter accedere direttamente a ψ al posto di $\hat{\psi}$, demandando la verifica dell'ipotesi direttamente alla tecnica di controllo: il backstepping. In tali condizioni è possibile così imporre:

$$\begin{bmatrix} v_u^* \\ \omega_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v^* \cos \psi \\ v^* \frac{\rho}{L} \sin \psi \end{bmatrix}, \quad (2.68)$$

che sostituite nel modello cinematico darebbero:

$$\begin{bmatrix} \dot{\rho} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\rho \cos \beta \\ \sin \beta \\ \sin \beta \\ 0 \end{bmatrix} v_u^* + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \omega_u + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \omega. \quad (2.69)$$

Invertendo le (2.68) è possibile ottenere il valore desiderato della v^* , velocità di avanzamento lineare del biciclo, e del corrispondente valore desiderato dell'angolo ψ :

$$\begin{cases} v^* = \frac{v_u^* + \omega_u \frac{L}{\rho}}{\cos \psi + \sin \psi} \\ \psi = \arctan \left(\frac{L \omega_u}{\rho v_u^*} \right) \end{cases}. \quad (2.70)$$

Ricordando che le relazioni (2.70) sono solo nominali e che in realtà non è possibile accedere ψ ma solo a $\hat{\psi}$ si ottiene:

$$\begin{cases} v^* = \frac{v_u^* + \omega_u \frac{L}{\rho}}{\cos \hat{\psi} + \sin \hat{\psi}} \\ \hat{\psi} = \arctan \left(\frac{L \omega_u}{\rho v_u^*} \right) \end{cases}. \quad (2.71)$$

Osservazione 2.19. *Si noti come la $\hat{\psi}$ sia sempre ben definita ovunque. La stessa cosa sembrerebbe non valere per la v^* , anche ammettendo $\rho \neq 0$ (i.e. stabilità pratica anziché asintotica). I punti dove $\cos \hat{\psi} + \sin \hat{\psi} = 0$ sono $\tan \psi = -1$.*

In questo caso è sufficiente ottenere la velocità di avanzamento lineare per sottrazione:

$$v^* = \frac{v_u^* - \omega_u \frac{L}{\rho}}{\cos \hat{\psi} - \sin \hat{\psi}}.$$

Si studi adesso la derivata prima della $\hat{\psi}$:

$$\dot{\hat{\psi}} = \frac{L}{\rho^2 v_u^{*2} + L^2 \omega_u^2} [\rho(v_u^* \dot{\omega}_u - \omega_u \dot{v}_u^*) - \omega_u v_u^* \dot{\rho}] \quad (2.72)$$

dove è necessario sostituire le seguenti derivate prime:

$$\begin{cases} \dot{v}_u^* &= -\sin \beta \dot{\beta} \\ \dot{\omega}_u &= \frac{1}{\lambda^2 \beta^2} [\lambda \sin \beta \cos \beta (\beta \dot{\phi} - \phi \dot{\beta}) + \lambda \beta \phi \dot{\beta} (\cos^2 \beta - \sin^2 \beta)] + 2 \cos^2 \beta \dot{\beta} \\ \dot{\rho} &= -\rho \cos \beta \cos \psi v^* \\ \dot{\beta} &= (\sin \beta \cos \psi - \frac{\rho}{L} \sin \psi) v^* \\ \dot{\phi} &= \sin \beta \cos \psi v^* \end{cases} \quad (2.73)$$

Osservazione 2.20. *Si noti come $\dot{\hat{\psi}}$ sia ben definita ovunque, essendolo i suoi elementi componenti. Potrebbe destare dei sospetti il calcolo di $\dot{\omega}_u$, che non sembra ben definita per $\beta = 0$. In realtà in tale punto si ottiene banalmente per sostituzione che $\dot{\omega}_u = \frac{\dot{\phi}}{\lambda} + 2\dot{\beta}$.*

Avendo ben definito il problema in funzione dei controlli precedentemente sviluppati per l'uniciclo, il problema della stabilizzazione su un punto per il biciclo può essere condotto considerando una candidata di Lyapunov del tipo $\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2$, dove la prima candidata rispecchia quella precedentemente calcolata nel caso dell'uniciclo, mentre la seconda conterrà il termine di backstepping:

$$\begin{cases} \mathbf{V}(\bar{q}) = \frac{1}{2}(\rho^2 + \phi^2 + \lambda\beta^2) + \frac{1}{2}(\psi - \hat{\psi}) \\ L_f \mathbf{V}(\bar{q}) = -\rho^2 \cos \beta \cos \psi v^* + (\phi + \lambda\beta) \sin \beta \cos \psi v^* - \lambda\beta \frac{\rho}{L} \sin \psi v^* + (\psi - \hat{\psi})(\omega - \dot{\hat{\psi}}) \end{cases} \quad (2.74)$$

nella quale sostituendo:

$$\begin{cases} v^* = \frac{v_u^* + \omega_u}{\cos \hat{\psi} + \frac{\rho}{L} \sin \hat{\psi}} \\ \omega = \dot{\hat{\psi}} - K_\psi (\psi - \hat{\psi}), \end{cases} \quad (2.75)$$

si ottiene infine:

$$L_f \mathbf{V}(\bar{q}) = -\rho^2 \cos \beta \frac{\cos \psi}{\cos \hat{\psi}} v_u^* + (\phi + \lambda\beta) \sin \beta \frac{\cos \psi}{\cos \hat{\psi}} v_u^* - \lambda\beta \frac{\sin \psi}{\sin \hat{\psi}} \omega_u - K_\psi (\psi - \hat{\psi})^2 \quad (2.76)$$

Si noti come anche in questo caso esistano gli stessi problemi riscontrati precedentemente dovuti alla imperfetta definizione nel segno dei termini contenenti $\frac{\cos \psi}{\cos \hat{\psi}}$ e $\frac{\sin \psi}{\sin \hat{\psi}}$. Inoltre, questi termini possono divergere, rispettivamente in $\psi \neq \hat{\psi} = \pm \frac{\pi}{2}$ e $\psi \neq \hat{\psi} = 0$.

Per ovviare a questo tipo di problema, si scelga di calcolare il controllo per la velocità lineare, indipendentemente dal fatto che $\psi = \hat{\psi}$, sempre pari a:

$$v^* = \frac{v_u^* + \omega_u}{\cos \psi + \frac{\rho}{L} \sin \psi}. \quad (2.77)$$

In questo modo i controlli restano sempre ben definiti ovunque (si ricorda che si può scegliere anche il caso in cui si faccia una sottrazione per eliminare le singolarità) e rimangono coincidenti nel caso di uguaglianza $\psi = \hat{\psi}$. Se sostituiti nella derivata direzionale della candidata di Lyapunov si ottiene una nuova equazione ben definita in ogni punto dello spazio di stato. L'unico problema relativo a questo tipo di approccio è legato alla diversità, almeno lungo le traiettorie iniziali del sistema, tra ψ e $\hat{\psi}$. In questi tratti iniziali la candidata di Lyapunov può avere la derivata direzionale definita positiva. Per ovviare a questo inconveniente, è possibile maggiorare lo scarto iniziale lungo i tratti iniziali della funzione di Lyapunov utilizzando il grado di libertà $K_\psi > 0$. Aumentando il valore della costante iniziale, è possibile rendere la funzione di Lyapunov n.d. ovunque. L'aumento della costante di guadagno corrisponde ad aumentare la velocità di convergenza dell'angolo di sterzo ψ al suo valore desiderato $\hat{\psi}$.

Osservazione 2.21. *Si noti come in questo secondo caso è possibile parlare di globale asintotica stabilità del punto di equilibrio, a differenza del controllore precedentemente sviluppato, per il quale è necessario definire una regione di asintotica stabilità. Inoltre, il controllore sviluppato in quest'ultima sezione permette di usufruire di tutte le caratteristiche positive possedute dal controllore sviluppato per l'uniciclo.*

Nel primo esempio riportato la costante di guadagno $\lambda = 1$, il passo del veicolo $L = 10$ e la posizione iniziale del veicolo $q_0 = [x_0, y_0, \theta_0, \phi_0]^T = [0, 10, -\frac{\pi}{2}, -\pi]^T$, mentre la costante $K_\psi = 100$. La traiettoria ottenuta per il parcheggio del veicolo biciclo è riportata in figura 2.17, in alto a sinistra. Nel secondo esempio il veicolo è semplicemente spostato in un punto iniziale diverso e pari a $q_0 = [x_0, y_0, \theta_0, \phi_0]^T = [-80, 35, -\pi, 0]^T$. In questo esempio è possibile notare come la possibilità di manovra non sia affatto preclusa al biciclo.

Nel terzo ed ultimo esempio il punto di partenza rappresenta una configurazione iniziale per il veicolo biciclo particolarmente difficoltosa in relazione al parcheggio da fare. Il veicolo parte infatti dal punto $q_0 = [x_0, y_0, \theta_0, \phi_0]^T = [0, 15, -\frac{\pi}{2}, 0]^T$, ma il suo interasse è stato ridimensionato con $L = 30$. Si noti come anche in questo caso, la manovra di parcheggio riesca perfettamente.

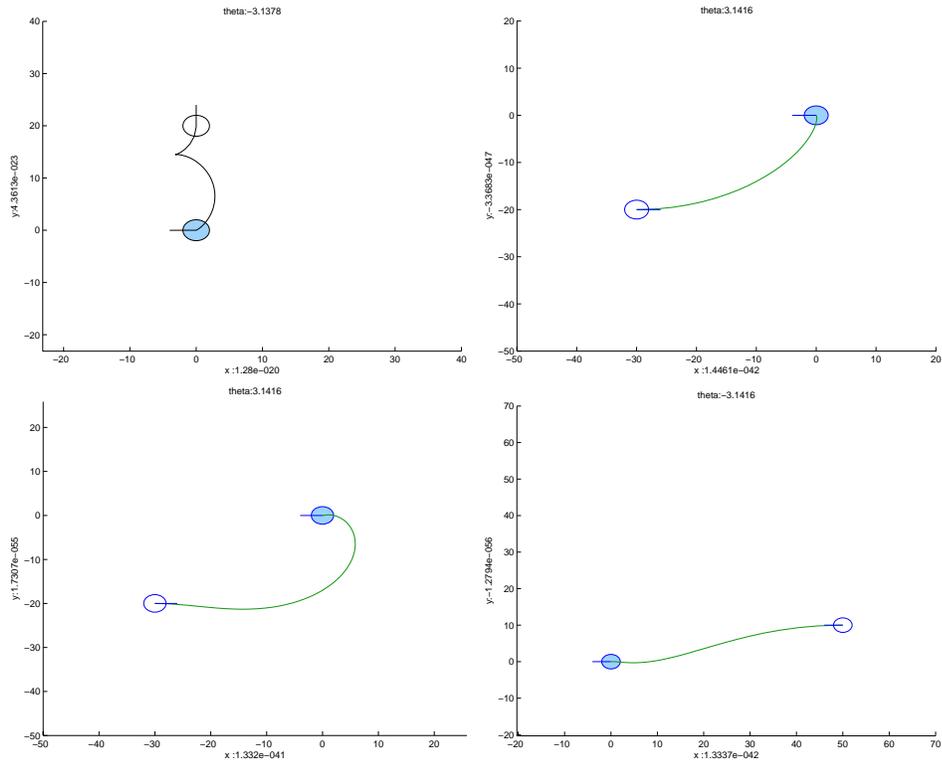


Figura 2.15: Risultati della simulazione per la stabilizzazione dell'uniciclo su un punto. Nei primi tre grafici il veicolo è stato posizionato su condizioni iniziali diverse e con diversi valori della costante positiva λ . Nell'ultimo esempio si può notare come giocando sul grado di libertà in più λ e conoscendo le condizioni iniziali del veicolo, sia possibile far convergere il veicolo verso il punto desiderato limitando a piacere il valore massimo ammissibile per la variabile β (angolo sotto il quale il veicolo “vede” l'origine).

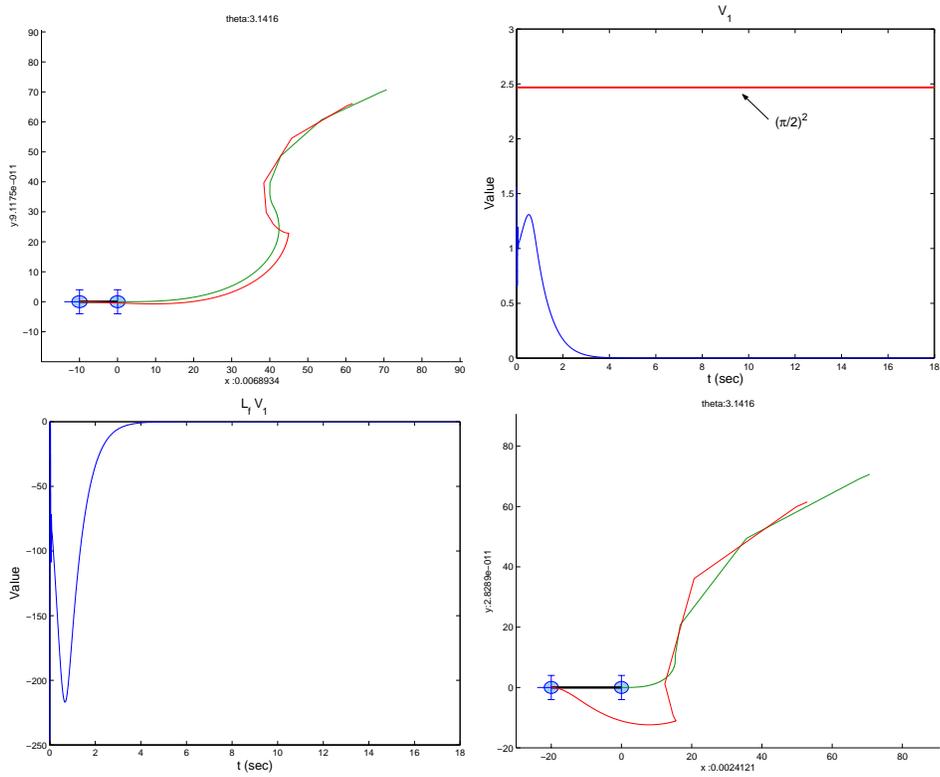


Figura 2.16: Risultati della simulazione per la stabilizzazione del veicolo biciclo su un punto. Per il primo esempio è riportato anche l'andamento della funzione di Lyapunov scelta e della sua derivata direzionale.

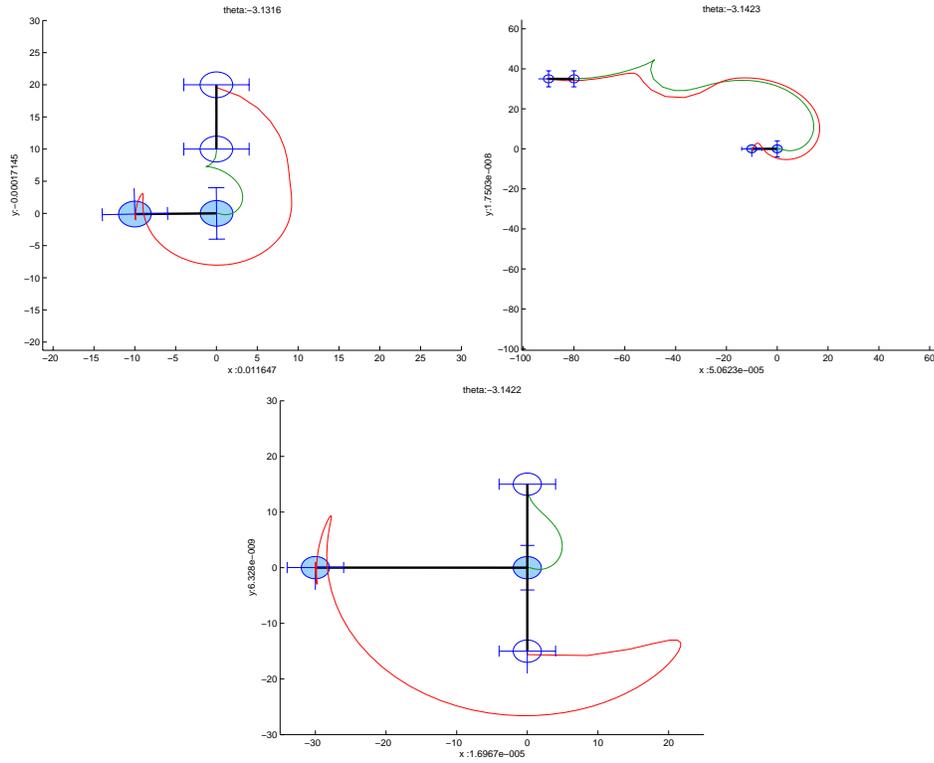


Figura 2.17: Risultati della simulazione per la stabilizzazione del veicolo biciclo su un punto, ottenuta con il secondo controllore. Nel primo e nel secondo esempio l'interasse del veicolo $L = 10$, mentre nel terzo ed ultimo esempio esso è portato a $L = 30$. Le costanti di guadagno sono le stesse in tutti e tre gli esempi.

Capitolo 3

Dinamica dei veicoli

3.1 Introduzione

La dinamica di un corpo rigido può essere descritta utilizzando la formulazione di Lagrange:

$$L = T - U, \quad (3.1)$$

dove T ed U rappresentano rispettivamente la somma delle energie cinetiche e potenziali dei componenti il corpo rigido in esame. Se con q si indicano le coordinate generalizzate che descrivono la posizione del corpo rigido e dei suoi componenti rispetto ad un qualsiasi sistema di riferimento, in generale si avrà $T(q, \dot{q})$ ed $U(q)$. Sfruttando il principio dei lavori virtuali dinamico è possibile giungere alla formulazione di Eulero-Lagrange:

$$\tau = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q}. \quad (3.2)$$

Dalla equazione (3.2) è possibile giungere ad una formulazione, di validità generale, che esprime il legame tra le coppie τ , applicate ai punti q di un generico sistema robotico, e le accelerazioni, le velocità e le posizioni \ddot{q} , \dot{q} , q :

$$\tau - J^T(q)h = B(q)\ddot{q} + C(\dot{q}, q)\dot{q} + F_v\dot{q} + F_s \operatorname{sgn}(\dot{q}) + G(q), \quad (3.3)$$

dove, oltre alle usuali coppie τ , alla matrice di inerzia $B(q)$, alla matrice delle forze mutue $C(\dot{q}, q)$ e alla matrice dei termini potenziali $G(q)$, sono stati inseriti tre ulteriori termini per rappresentare le forze di reazione dell'ambiente $J^T(q)h$, le forze di attrito viscoso $F_v\dot{q}$ e statico $F_s \operatorname{sgn}(\dot{q})$.

Per un manipolatore a catena cinematica aperta l'equazione del moto è stata ricavata con l'applicazione diretta dell'equazione di Lagrange, utilizzando un set minimo di coordinate generalizzate ed indipendenti che descrivono

completamente il moto del sistema. Come è stato notato nel capitolo 1, ai veicoli mobili non è possibile applicare direttamente il metodo perché le componenti del vettore q non sono indipendenti ma soggette a vincoli imposti dalla particolare struttura del sistema. Una via praticabile potrebbe essere l'eliminazione del vincolo attraverso un opportuno cambio di coordinate, soluzione non sempre possibile e non algoritmica. Un modo più sistematico di procedere permette l'incorporazione dei vincoli direttamente nell'equazione della dinamica.

Utilizzando i moltiplicatori di Lagrange λ , i vincoli possono essere inseriti sia nella equazione (3.2) che, attraverso la forma Pfaffiana (1.4), nella equazione della dinamica in forma classica (3.3). In quest'ultimo caso si avrà:

$$\begin{cases} \tau = B(q)\ddot{q} + C(\dot{q}, q)\dot{q} + G(q) + A^T\lambda \\ A\ddot{q} + \dot{A}\dot{q} = 0 \end{cases}, \quad (3.4)$$

che è possibile riscrivere in forma matriciale come:

$$\begin{bmatrix} B(q) & A^T \\ A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -C(\dot{q}, q)\dot{q} - G(q) + \tau \\ -\dot{A}\dot{q} \end{bmatrix}. \quad (3.5)$$

Qualora interessi il calcolo esplicito delle reazioni vincolari λ , è possibile procedere con il calcolo della pseudoinversa di A pesata in B^{-1} : $A_{B^{-1}}^+ = B^{-1}A^T(AB^{-1}A^T)^{-1}$, in grado di risolvere la (3.5):

$$\begin{cases} \ddot{q} = (I - A_{B^{-1}}^+A)B^{-1}(\tau - C(\dot{q}, q)\dot{q} - G(q)) - A_{B^{-1}}^+\dot{A}\dot{q} \\ \lambda = A_{B^{-1}}^{+T}(\tau - C(\dot{q}, q)\dot{q} - G(q)) + (AB^{-1}A^T)^{-1}\dot{A}\dot{q} \end{cases}. \quad (3.6)$$

Osservazione 3.1. *Si noti che se la matrice a primo membro di (3.6) è invertibile, le reazioni vincolari si ottengono direttamente come soluzione di un sistema lineare.*

Nel caso in cui il calcolo delle reazioni vincolari non sia richiesto, è possibile procedere con il Metodo delle Quasi Velocità:

$$\dot{q} = S(q)\nu \rightarrow \ddot{q} = S(q)\dot{\nu} + \dot{S}(q)\nu, \quad (3.7)$$

dove $S(q)$ è una matrice base di $\ker(A(q))$ (si veda a tal proposito il capitolo 1). Le equazioni vincolari ed i relativi metodi riportati in (1.4) e (1.5) rappresentano un importante strumento per lo studio delle proprietà dei sistemi dinamici non lineari con vincoli anolonomi, e quindi hanno particolare rilevanza per la robotica mobile dove i vincoli anolonomi sono una caratteristica intrinseca dei particolari sistemi dinamici.

3.2 Dinamica di un carrello vincolato

Prima di introdurre le caratteristiche dinamiche del biciclo e dell'uniciclo, vengono introdotti due esempi di sistemi vincolati atti a facilitare lo studio dei sistemi più complessi.

3.2.1 Binario rettilineo

Si consideri un carrello vincolato ad un binario rettilineo, rappresentato in figura 1.1. Il carrello ha una massa m ed un momento di inerzia rispetto all'asse verticale Z pari a I_z . Le coordinate generalizzate siano $q = [x, y, \theta]^T$.

Il primo passo nel calcolo della dinamica utilizzando il modello Lagrangiano riportato nella equazione (3.2) è la determinazione delle energie in gioco:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}I_z\dot{\theta}^2 \\ U &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} \right)^T = \begin{bmatrix} m\ddot{x} \\ m\ddot{y} \\ I_z\ddot{\theta} \end{bmatrix} = \tau, \quad (3.8)$$

dove le coppie $\tau = [\tau_x, \tau_y, \tau_\theta]^T$.

L'energia potenziale è nulla ipotizzando il piano orizzontale di riferimento delle coordinate allineato con il binario rettilineo. Come era lecito aspettarsi dal modello fisico preso in esame, nella equazione (3.8) l'unico termine diverso da 0 rispetto alla equazione generale della dinamica (3.3) è $B(q)$, per di più diagonale.

I vincoli espressi in forma Pfaffiana sono riportati in (1.9), con la base del nullo riportata in (1.10). In tal caso è possibile utilizzare il metodo delle quasi velocità:

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} \cos \theta_b \\ \sin \theta_b \\ 0 \end{bmatrix} \nu \rightarrow \ddot{q} = \begin{bmatrix} \cos \theta_b \\ \sin \theta_b \\ 0 \end{bmatrix} \dot{\nu}. \quad (3.9)$$

Le quasi velocità ν forniscono l'insieme delle velocità per il carrello compatibili con il vincolo. Si noti d'altronde che sostituire il valore di \ddot{q} trovato in (3.9) nell'equazione della dinamica (3.8) porterebbe a determinare erroneamente:

$$\begin{cases} m \cos \theta_b \dot{\nu} = \tau_x \\ m \sin \theta_b \dot{\nu} = \tau_y \\ 0 = \tau_\theta \end{cases} \quad (3.10)$$

dove la coppia esercitata attorno all'asse Z è identicamente nulla, coppia compatibile con il vincolo ma non significativa dal punto di vista fisico. Infatti, in realtà essa sarà assorbita dalla reazione vincolare del binario rettilineo. Per calcolare le reazioni vincolari si deve procedere con il metodo dei

moltiplicatori di Lagrange, come riportato nella equazione (3.5):

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 & \sin \theta_b & 0 \\ 0 & m & 0 & -\cos \theta_b & 0 \\ 0 & 0 & I_z & 0 & 1 \\ \sin \theta_b & -\cos \theta_b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_\theta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.11)$$

Il primo termine della equazione (3.11) è una matrice invertibile, quindi è possibile ottenere la seguente soluzione:

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{1}{m} \cos \theta_b (\tau_x \cos \theta_b + \tau_y \sin \theta_b) \\ \ddot{y} = \frac{1}{m} \sin \theta_b (\tau_x \cos \theta_b + \tau_y \sin \theta_b) \\ \ddot{\theta} = 0 \\ \lambda_1 = \tau_x \sin \theta_b - \tau_y \cos \theta_b \\ \lambda_2 = \tau_\theta \end{cases}, \quad (3.12)$$

dove è possibile notare come le reazioni vincolari del binario annullino la componente ortogonale al binario (λ_1) e l'eventuale rotazione attorno all'asse Z (λ_2).

Se non interessano le reazioni vincolari si procede con il metodo delle quasi velocità, ponendo $S(q)^T \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} \right) + S(q)^T A^T \lambda = S(q)^T \tau$. In questo modo le forze e le coppie presenti nel sistema vengono proiettate nel nullo della matric $A(q)$: il vincolo è stato così introdotto nella dinamica del sistema. Si ottiene così $m(\ddot{x} \cos \theta_b + \ddot{y} \sin \theta_b) = \tau_x \cos \theta_b + \tau_y \sin \theta_b$. A questo punto è possibile sostituire le \ddot{q} calcolate secondo l'equazione (3.9), ottenendo:

$$m\dot{\nu} = \tau_r, \quad (3.13)$$

dove $\tau_r = \tau_x \cos \theta_b + \tau_y \sin \theta_b$ è la forza lungo la rotaia, essendo $\dot{\nu}$ l'accelerazione del carrello compatibile con il vincolo.

3.2.2 Binario circolare

Nel secondo esempio il carrello è vincolato su un binario circolare, rappresentato in figura 1.2. Il carrello ha una massa m ed un momento di inerzia rispetto all'asse verticale Z pari a I_z . Le coordinate generalizzate sono nuovamente $q = [x, y, \theta]^T$.

Le assunzioni fatte sulle energie in gioco riportate nella equazione (3.8) sono ancora valide in questo caso. I due vincoli espressi in forma Pfaffiana sono riportati in (1.14), la quale permette di esprimere il legame tra la

velocità delle coordinate generalizzate \dot{q} con le quasi velocità ν :

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} -y \\ x \\ 1 \end{bmatrix} \nu \rightarrow \ddot{q} = \begin{bmatrix} -y \\ x \\ 1 \end{bmatrix} \dot{\nu} + \begin{bmatrix} -x \\ -y \\ 0 \end{bmatrix} \nu^2. \quad (3.14)$$

Procedendo con i moltiplicatori di Lagrange si determinano le reazioni vincolari:

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 & x & y \\ 0 & m & 0 & y & -x \\ 0 & 0 & I_z & 0 & R^2 \\ x & y & 0 & 0 & 0 \\ y & -x & R^2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_\theta \\ \dot{x}^2 + \dot{y}^2 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.15)$$

Essendo il raggio della circonferenza $R \neq 0$, il primo termine della equazione (3.15) è una matrice invertibile, quindi è possibile ottenere la seguente soluzione:

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{x(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)(I_z + mR^2) + yR^2(y\tau_x - x\tau_y - \tau_\theta)}{R^2(I_z + mR^2)} \\ \ddot{y} = \frac{y(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)(I_z + mR^2) + xR^2(\tau_\theta + x\tau_y - y\tau_x)}{R^2(I_z + mR^2)} \\ \ddot{\theta} = \frac{x\tau_y - y\tau_x + \tau_\theta}{I_z + mR^2} \\ \lambda_1 = \frac{x\tau_x + y\tau_y - m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}{R^2} \\ \lambda_2 = \frac{I_z(y\tau_x - x\tau_y) + mR^2\tau_\theta}{R^2(I_z + mR^2)} \end{cases}. \quad (3.16)$$

Le reazioni vincolari di questo secondo esempio sono più complesse di quelle trovate per il binario rettilineo in quanto i vincoli dipendono dalla posizione assunta dal carrello sul binario.

Se non interessano le reazioni vincolari si procede con il metodo delle quasi velocità, ponendo $S(q)^T \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} \right) + S(q)^T A^T \lambda = S(q)^T \tau$ e portando il sistema nella forma generale (3.3):

$$\begin{aligned} S(q)^T B(q) S(q) &= S(q)^T \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} S(q) = I_z + m(x^2 + y^2) = I_z + mR^2 \\ S(q)^T B(q) \dot{S}(q) &= S(q)^T \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -x \\ -y \\ 0 \end{bmatrix} \nu = 0 \\ S(q)^T \tau &= -y\tau_x + x\tau_y + \tau_\theta = \tau_r \end{aligned} \quad (3.17)$$

è possibile ottenere la relazione finale $(I_z + mR^2)\dot{\nu} = \tau_r$, la quale esprime il legame, dovuto all'accelerazione compatibile con il vincolo ν , tra l'inerzia totale attorno al centro del carrello e la relativa coppia.

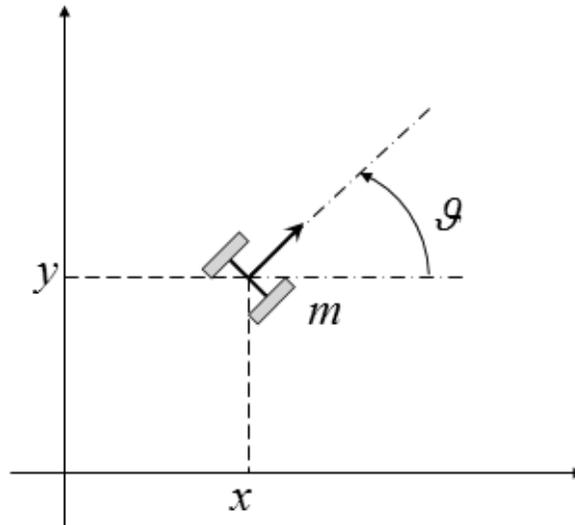


Figura 3.1: Uniciclo di massa m e momento di inerzia rispetto all'asse verticale Z pari a I_z . Una possibile scelta delle coordinate generalizzate è $q = [x, y, \theta]^T$.

3.3 Dinamica dell'uniciclo e del biciclo

In questo paragrafo verrà introdotta la dinamica dell'uniciclo e del biciclo.

3.3.1 Uniciclo

La figura 3.1 riporta un veicolo di tipo uniciclo. Il veicolo ha una massa m ed un momento di inerzia rispetto all'asse verticale Z pari a I_z . Le coordinate generalizzate scelte per localizzare univocamente l'uniciclo sul piano sono $q = [x, y, \theta]^T$, dove la coppia (x, y) indica la coordinata cartesiana del punto di mezzo dell'interasse del veicolo, punto per il quale passa istante per istante l'asse Z solidale al veicolo e perpendicolare al piano del moto, e con θ orientazione del veicolo rispetto all'asse orizzontale X .

Con l'adozione delle coordinate generalizzate q , le energie in gioco sono ancora pari a (3.8), con lo stesso significato delle coppie di attuazione τ .

Il vincolo (1.16) imposto da questo particolare tipo di sistema dinamico, riportato in forma Pfaffiana in (1.17), mette in evidenza come solo le forze dirette lungo l'interasse e con lo stesso verso devono essere assorbite dal vincolo. Se il verso di tali forze è opposto sarà la struttura stessa del veicolo ad assorbirle.

Il calcolo dello spazio nullo della matrice $A(q)$ permette di esprimere il legame tra la velocità delle coordinate generalizzate \dot{q} con le quasi velocità ν :

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \nu \rightarrow \ddot{q} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \dot{\nu} + \begin{bmatrix} -\dot{\theta} \sin \theta & 0 \\ \dot{\theta} \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \nu. \quad (3.18)$$

Osservazione 3.2. *Come è stato evidenziato precedentemente, le quasi velocità ν forniscono l'insieme delle velocità per il carrello compatibili con il vincolo. Il legame $\dot{q} = S(q)\nu$ fornisce il modello cinematico del veicolo, ottenuto trascurando tutti i termini dinamici e mappando i possibili controlli come controlli di velocità, compatibili con i vincoli imposti dal problema reale. Nei veicoli reali, la dinamica è compensata da un controllore di basso livello, solitamente un PID, rendendo possibile il controllo del veicolo con ingressi di velocità compatibili con i vincoli: le quasi velocità $\nu = [\nu_1, \nu_2]^T$.*

Il calcolo delle reazioni vincolari passa attraverso il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, come riportato nella equazione (3.5):

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 & \sin \theta \\ 0 & m & 0 & -\cos \theta \\ 0 & 0 & I_z & 0 \\ \sin \theta & -\cos \theta & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_\theta \\ -\dot{x}\dot{\theta} \cos \theta - \dot{y}\dot{\theta} \sin \theta \end{bmatrix}. \quad (3.19)$$

Il primo termine della equazione (3.19) è una matrice invertibile, quindi è possibile ottenere la seguente soluzione:

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{1}{m} \cos^2 \theta \tau_x + \sin^2 \theta \cos \theta \tau_y - m\dot{\theta}(\sin \theta \cos \theta \dot{x} + \dot{y} - \dot{y} \cos^2 \theta) \\ \ddot{y} = \frac{1}{m} \sin \theta \cos \theta \tau_x + \sin^2 \theta \tau_y + m\dot{\theta} \cos \theta (\cos \theta \dot{x} + \sin \theta \dot{y}) \\ \ddot{\theta} = \frac{\tau_\theta}{I_z} \\ \lambda = \sin \theta \tau_x - \cos \theta \tau_y + m\dot{\theta}(\cos \theta \dot{x} + \sin \theta \dot{y}) \end{cases}, \quad (3.20)$$

dove la forza di reazione vincolare λ è composta da quattro termini: i primi due rappresentano le forze di reazione dirette lungo l'interasse del veicolo, mentre gli ultimi due tengono conto delle interazioni mutue tra le varie velocità. La presenza delle forze di Coriolis negli ultimi due termini di λ ne annulleranno l'effetto nella dinamica, la quale dipenderà solamente dalla matrice delle inerzie $B(q)$.

Il metodo delle quasi velocità viene applicato ponendo come al solito

$S(q)^T \tau = S(q)^T B(q) \dot{S}(q)^T \nu + S(q)^T B(q) S(q) \dot{\nu}$. In questo modo si ottiene:

$$\begin{aligned} S(q)^T \tau &= \begin{bmatrix} \tau_x \cos \theta + \tau_y \sin \theta \\ \tau_\theta \end{bmatrix} \\ S(q)^T B(q) S(q) &= \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I_z \end{bmatrix} , \\ S(q)^T B(q) \dot{S}(q) &= 0 \end{aligned} \quad (3.21)$$

che ci permette di ottenere:

$$\begin{aligned} \dot{\nu}_1 &= \frac{1}{m} (\tau_x \cos \theta + \tau_y \sin \theta) \\ \dot{\nu}_2 &= \frac{\tau_\theta}{I_z} \end{aligned} . \quad (3.22)$$

Analizzando i risultati ottenuti in (3.22) si nota che l'accelerazione del veicolo $\dot{\nu}_1$, compatibile con il vincolo, è diretta lungo la perpendicolare all'interasse delle ruote, mentre l'accelerazione angolare $\dot{\nu}_2$ sarà inversamente proporzionale al momento di inerzia I_z secondo la coppia di rotazione applicata al veicolo.

3.3.2 Unicicli cooperanti

Si consideri il sistema di figura (3.2). I veicoli uno e due avranno rispettivamente una massa m_1 e m_2 . Il loro momento di inerzia rispetto all'asse verticale Z sarà rispettivamente pari a I_1 e I_2 . Il link di collegamento si suppone di massa e momento di inerzia trascurabili.

Le coordinate scelte per localizzare univocamente i due unicicli cooperanti sono $[x_i, y_i, \theta_i, \phi_i]^T$, con $i = 1, 2$. La coppia (x_i, y_i) indica la coordinata cartesiana del punto di mezzo dell'interasse del veicolo i -esimo, θ_i è l'orientazione del veicolo rispetto all'asse orizzontale X , mentre ϕ_i è l'angolo tra l'asta, di lunghezza L , che collega i due robot e la normale all'interasse delle ruote.

Data la simmetria del sistema meccanico in studio, le energie in gioco saranno la somma delle energie di ciascun veicolo:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + \frac{1}{2} I_2 \dot{\theta}_2^2 \\ U &= 0 \end{aligned} . \quad (3.23)$$

L'energia cinetica del sistema T è espressa tramite 8 coordinate. Come studiato nel paragrafo 1.3.2, un set minimo di coordinate generalizzate (ricavabile con il teorema della funzione implicita o Teorema del Dini) in grado di

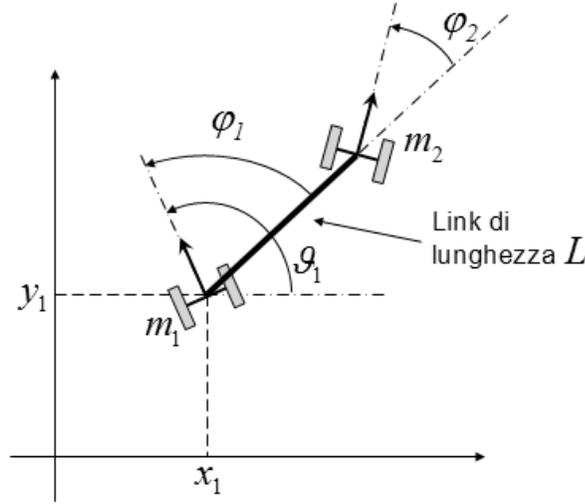


Figura 3.2: Due unicycli cooperanti. La distanza tra i due unicycli è costante e pari L . I veicoli uno e due avranno rispettivamente una massa m_1 e m_2 . Il loro momento di inerzia rispetto all'asse verticale Z sarà rispettivamente pari a I_1 e I_2 . Una possibile scelta delle coordinate è $q = [x_1, y_1, \theta_1, \phi_1, \phi_2]^T$.

individuare univocamente il sistema sarà $q = [x_1, y_1, \theta_1, \phi_1, \phi_2]^T$. Sostituendo (1.19) nell'espressione delle energie (3.23), si ottiene:

$$\begin{aligned}
 T(\dot{q}, q) &= \frac{1}{2}[(m_1 + m_2)(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + (I_1 + I_2 + m_2 L^2)\dot{\theta}_1^2 + (I_2 + m_2 L^2)\dot{\phi}_1^2 \\
 &\quad + I_2(\dot{\phi}_2^2 + 2\dot{\phi}_1\dot{\phi}_2 - 2\dot{\theta}_1\dot{\phi}_1 - 2\dot{\theta}_1\dot{\phi}_2) \\
 &\quad + 2m_2 L((\dot{\theta}_1 - \dot{\phi}_1)(\dot{y}_1 \cos(\theta_1 - \phi_1) - \dot{x}_1 \sin(\theta_1 - \phi_1)) - L\dot{\theta}_1\dot{\phi}_1)] \\
 U(q) &= 0
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

Osservazione 3.3. *Notare che se il link di connessione fosse stato elastico, nel calcolo delle energie in gioco un ulteriore termine in grado di tenere in conto l'energia elastica accumulata nel vincolo sarebbe stato necessario.*

Calcolando (3.2) e ricordando l'espressione dei vincoli in forma Pfaffiana (1.21), si ottiene l'equazione della dinamica vincolata:

$$\tau = B(q)\ddot{q} + C(\dot{q}, q)\dot{q} + \lambda^T A(q) \tag{3.25}$$

dove le forze generalizzate $\tau = [\tau_{x_1}, \tau_{y_1}, \tau_{\theta_1}, \tau_{\phi_1}, \tau_{\phi_2}]^T$ e dove:

$$B(q) = \begin{bmatrix} m_1 + m_2 & 0 & -s^* & s^* & 0 \\ 0 & m_1 + m_2 & c^* & -c^* & 0 \\ -s^* & c^* & I_1 + I_2 + m_2 L^2 & -(I_2 + m_2 L^2) & -I_2 \\ s^* & -c^* & -(I_2 + m_2 L^2) & I_2 + m_2 L^2 & I_2 \\ 0 & 0 & -I_2 & I_2 & I_2 \end{bmatrix}$$

$$C(\dot{q}, q) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -(\dot{\theta}_1 - \dot{\phi}_1)c^* & (\dot{\theta}_1 - \dot{\phi}_1)c^* & 0 \\ 0 & 0 & -(\dot{\theta}_1 - \dot{\phi}_1)s^* & (\dot{\theta}_1 - \dot{\phi}_1)s^* & 0 \\ -(\dot{\theta}_1 - \dot{\phi}_1)c^* & -(\dot{\theta}_1 - \dot{\phi}_1)s^* & -m_2 L \xi^* & m_2 L \xi^* & 0 \\ (\dot{\theta}_1 - \dot{\phi}_1)c^* & (\dot{\theta}_1 - \dot{\phi}_1)s^* & m_2 L \xi^* & -m_2 L \xi^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.26)$$

nelle quali $\xi^* = \dot{y}_1 \sin(\theta_1 - \phi_1) + \dot{x}_1 \cos(\theta_1 - \phi_1)$, $c^* = m_2 L \cos(\theta_1 - \phi_1)$ e $s^* = m_2 L \sin(\theta_1 - \phi_1)$.

A questo punto è necessario esprimere il legame tra le accelerazioni generalizzate \ddot{q} e le quasi velocità:

$$\ddot{q} = \begin{bmatrix} -L(\dot{\phi}_2 \cos \theta_1 \sin \phi_2 + \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 \cos \phi_2) & 0 & 0 \\ -L(\dot{\phi}_2 \sin \theta_1 \sin \phi_2 - \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 \cos \phi_2) & 0 & 0 \\ (\dot{\phi}_2 - \dot{\phi}_1) \cos(\phi_2 - \phi_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \nu + \begin{bmatrix} L \cos \phi_2 \cos \theta_1 & 0 & 0 \\ L \cos \phi_2 \sin \theta_1 & 0 & 0 \\ \sin(\phi_2 - \phi_1) & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \dot{\nu}. \quad (3.27)$$

È ora possibile il calcolo esplicito delle reazioni vincolari risolvendo l'equazione (3.5). Tale calcolo è lasciato come esercizio.

Nel caso in cui non interessino le reazioni vincolari, si utilizza il solo metodo delle quasi velocità, applicato ponendo come al solito $S(q)^T \tau =$

$S(q)^T B(q) \dot{S}(q)^T \nu + S(q)^T B(q) S(q) \dot{\nu} + S(q)^T C(\dot{q}, q) S(q) \nu$, dove:

$$\begin{aligned}
S(q)^T \tau &= \begin{bmatrix} L \cos \phi_2 \cos \theta_1 \tau_{x_1} + L \cos \phi_2 \sin \theta_1 \tau_{y_1} + \sin(\phi_2 - \phi_1) \\ \tau_{\theta_1} + \tau_{\phi_1} \\ \tau_{\phi_2} \end{bmatrix} \\
S(q)^T B(q) S(q) &= \begin{bmatrix} 2m_2 L^2 \cos \phi_2 \sin \phi_1 \sin(\phi_2 - \phi_1) + L^2 \cos^2 \phi_2 (m_1 + m_2) + \sin^2(\phi_2 - \phi_1) (I_1 + I_2) & 0 & 0 \\ I_1 \sin(\phi_2 - \phi_1) & 0 & 0 \\ -I_2 \sin(\phi_2 - \phi_1) & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
S(q)^T B(q) \dot{S}(q) &= \begin{bmatrix} \chi^* & 0 & 0 \\ (\dot{\phi}_2 - \dot{\phi}_1) \cos(\phi_2 - \phi_1) I_1 & 0 & 0 \\ -(\dot{\phi}_2 - \dot{\phi}_1) \cos(\phi_2 - \phi_1) I_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
S(q)^T C(\dot{q}, q) S(q) &= \begin{bmatrix} 2m_2 L^2 \cos \phi_1 \cos \phi_2 \sin(\phi_2 - \phi_1) (\dot{\phi}_1 - \dot{\theta}_1) - m_2 L \sin^2(\phi_2 - \phi_1) \xi^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.28}$$

dove $\chi^* = \dot{\phi}_2 m_2 L^2 \sin \phi_1 \cos(2\phi_2 - \phi_1) + \dot{\theta}_1 m_2 L^2 \sin(\phi_2 - \phi_1) \cos \phi_2 \cos \phi_1 - \dot{\phi}_1 m_2 L^2 \cos \phi_2 \sin \phi_1 \cos(\phi_2 - \phi_1) + \cos(\phi_2 - \phi_1) \sin(\phi_2 - \phi_1) (\dot{\phi}_2 - \dot{\phi}_1) (I_1 + I_2 + m_2 L^2)$. È ora possibile ottenere le accelerazioni dei due unicicli cooperanti compatibili con i vincoli, semplicemente calcolando:

$$\dot{\nu} = (S(q)^T B(q) S(q))^{-1} [S(q)^T \tau - (S(q)^T B(q) \dot{S}(q) + S(q)^T C(\dot{q}, q) S(q)) \nu] \tag{3.29}$$

Osservazione 3.4. Si noti come la matrice $S(q)^T B(q) S(q)$ sia sempre invertibile. Infatti, $S(q)$ è in generale una matrice rettangolare a rango pieno colonne essendo una base del $\ker(A(q))$, quindi $S(q)^T S(q)$ avrà sempre rango massimo. La matrice delle inerzie $B(q)$ è invece sempre simmetrica e definita positiva e quindi non altera la condizione sul rango.

3.3.3 Biciclo

Un biciclo è la schematizzazione di un uniciclo con un secondo uniciclo collegato rigidamente a distanza fissa. Nella figura 3.3 è rappresentato un veicolo biciclo con massa sull'anteriore pari a m_a e momento di inerzia I_a , mentre m_p e I_p sono le stesse grandezze riferite all'uniciclo posteriore. Le coordinate presenti nel sistema in grado di individuare completamente il sistema dinamico saranno $q = [x_p, y_p, x_a, y_a, \theta, \phi]^T$. Supponendo che il biciclo sia formato dalla connessione di due unicicli, le energie in gioco saranno la somma delle energie di ciascuno:

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2} m_p (\dot{x}_p^2 + \dot{y}_p^2) + \frac{1}{2} I_p \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_a (\dot{x}_a^2 + \dot{y}_a^2) + \frac{1}{2} I_a (\dot{\theta} + \dot{\phi})^2 \\
U &= 0
\end{aligned} \tag{3.30}$$

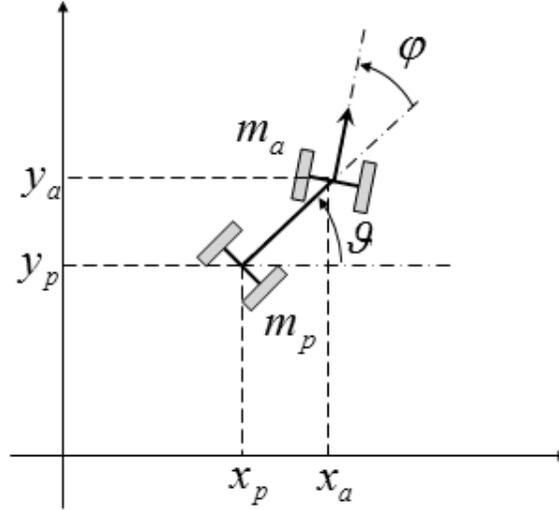


Figura 3.3: Biciclo con masse m_a ed m_p rispettivamente dell'anteriore e del posteriore, con momenti di inerzia rispetto all'asse perpendicolare al piano di moto Z pari a I_a ed I_p . La distanza tra i due unicli è costante e pari L . Due possibili scelte delle coordinate generalizzate sono $q_a = [x_a, y_a, \theta, \phi]^T$ o $q_p = [x_p, y_p, \theta, \phi]^T$.

Si noti come l'energia cinetica T sia espressa relativamente a sei diverse coordinate, ma due delle sei coordinate saranno linearmente dipendenti dalle altre. Due possibili scelte per le coordinate generalizzate relative alla posizione del biciclo sono $q_a = [x_a, y_a, \theta, \phi]^T$ (riferite all'anteriore) o $q_p = [x_p, y_p, \theta, \phi]^T$ (riferite al posteriore). Si veda a tal proposito la discussione fatta nel paragrafo 1.3.3. Scegliendo ad esempio q_p e sostituendo in (3.30), si ottiene:

$$\begin{aligned}
 T(\dot{q}_p, q_p) &= \frac{1}{2}((m_p + m_a)(\dot{x}_p^2 + \dot{y}_p^2) + (I_p + I_a + m_a L^2)\dot{\theta}^2 \\
 &\quad + 2m_a L \dot{\theta}(\dot{y}_p \cos \theta - \dot{x}_p \sin \theta) + I_a \dot{\phi}^2 + 2I_a \dot{\theta} \dot{\phi}) \quad . \quad (3.31) \\
 U(q_p) &= 0
 \end{aligned}$$

Ricordando che $T(\dot{q}_p, q_p) = \frac{1}{2} \dot{q}_p^T B(q) \dot{q}_p$ e che in questo caso l'equazione (3.2)

è $\tau = B(q_p)\ddot{q}_p + \frac{1}{2}\dot{B}(q_p)\dot{q}_p$, si ottiene subito che:

$$B(q_p) = \begin{bmatrix} m_p + m_a & 0 & -m_a L \sin \theta & 0 \\ 0 & m_p + m_a & m_a L \cos \theta & 0 \\ -m_a L \sin \theta & m_a L \cos \theta & I_p + I_a + m_a L^2 & I_a \\ 0 & 0 & I_a & I_a \end{bmatrix}$$

$$\dot{B}(q_p) = C(\dot{q}_p, q_p) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -m_a L \dot{\theta} \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & -m_a L \dot{\theta} \sin \theta & 0 \\ -m_a L \dot{\theta} \cos \theta & -m_a L \dot{\theta} \sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.32)$$

dalle quali è possibile ottenere l'equazione delle forze generalizzate con vincolo:

$$\tau = B(q_p)\ddot{q}_p + C(\dot{q}_p, q_p)\dot{q}_p + \lambda^T A(q_p) \quad (3.33)$$

con le coppie $\tau = [\tau_x, \tau_y, \tau_\theta, \tau_\phi]^T$.

Osservazione 3.5. *Notare che se il link di connessione fosse stato elastico, nel calcolo delle energie in gioco un ulteriore termine in grado di tenere in conto l'energia elastica accumulata nel vincolo sarebbe stato necessario.*

Si scelga di esprimere la dinamica rispetto al posteriore, utilizzando la matrice dei vincoli in forma Pfaffiana riportata in (1.26). Procedendo lo studio con il modello con trazione posteriore, si ottiene la dinamica di \ddot{q}_p rispetto alle quasi velocità:

$$\ddot{q} = \begin{bmatrix} -\dot{\theta} \sin \theta & 0 \\ \dot{\theta} \cos \theta & 0 \\ \frac{1}{L \cos^2 \phi} \dot{\phi} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \nu + \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 \\ \frac{1}{L} \tan \phi & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \dot{\nu}. \quad (3.34)$$

Riscrivendo l'equazione (3.5) come:

$$W \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\phi} \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = H, \quad (3.35)$$

dove:

$$\begin{aligned}
 W &= \begin{bmatrix} m_p + m_a & 0 & -m_a L \sin \theta & 0 & \sin(\theta + \phi) & \sin \theta \\ 0 & m_p + m_a & m_a L \cos \theta & 0 & -\cos(\theta + \phi) & -\cos \theta \\ -m_a L \sin \theta & m_a L \cos \theta & I_p + I_a + m_a L^2 & I_a & -L \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & I_a & I_a & 0 & 0 \\ \sin(\theta + \phi) & -\cos(\theta + \phi) & -L \cos(\theta) & 0 & 0 & 0 \\ \sin \theta & -\cos \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 H &= \begin{bmatrix} \tau_x + m_a L \dot{\theta}^2 \cos \theta \\ \tau_y + m_a L \dot{\theta}^2 \sin \theta \\ \tau_\theta + m_a L \dot{\theta} (\dot{x} \cos \theta + \dot{y} \sin \theta) \\ \tau_\phi \\ -(\dot{\theta} + \dot{\phi})(\cos(\theta + \phi)\dot{x} + \sin(\theta + \phi)\dot{y}) - L \dot{\theta}^2 \sin \theta \\ -\dot{\theta}(\dot{x} \cos \theta + \dot{y} \sin \theta) \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.36}$$

In questo caso la matrice W in (3.35) è singolare nei punti in cui simultaneamente $\phi = k_1\pi$ e $\theta = \frac{\pi}{2} + k_2\pi$ con $k_1, k_2 = 0, 1, \dots$. In tal caso è ancora possibile il calcolo delle reazioni vincolari utilizzando la relazione (3.6). Il calcolo esplicito delle reazioni vincolari espresse in funzione dei parametri del biciclo risulta computazionalmente complesso e non aggiunge niente alla trattazione teorica di queste note, perciò non viene riportato esplicitamente.

Il metodo delle quasi velocità viene applicato ponendo come al solito $S(q_p)^T \tau = S(q_p)^T B(q_p) \dot{S}(q_p)^T \nu + S(q_p)^T B(q_p) S(q_p) \dot{\nu} + S(q_p)^T C(\dot{q}_p, q_p) S(q_p) \nu$, dove:

$$\begin{aligned}
 S(q_p)^T \tau &= \begin{bmatrix} \tau_x \cos \theta + \tau_y \sin \theta + \tau_\theta \frac{1}{L} \tan \phi \\ \tau_\phi \end{bmatrix} \\
 S(q_p)^T B(q_p) S(q_p) &= \begin{bmatrix} \frac{1}{L^2 \cos^2 \phi} (\cos^2 \phi (L^2 m_p - I_a - I_p) + I_p + I_a + m_a L^2) & \frac{1}{L} I_a \tan \phi \\ \frac{1}{L} I_a \tan \phi & I_a \end{bmatrix}, \\
 S(q_p)^T B(q_p) \dot{S}(q_p) &= \begin{bmatrix} \frac{\tan \phi}{\cos^2 \phi L^2} (L^2 m_a \dot{\theta} \cos^2 \phi + \dot{\phi} (I_p + I_a + m_a L^2)) & 0 \\ \frac{1}{L \cos^2 \phi} I_a \dot{\phi} & 0 \end{bmatrix}, \\
 S(q_p)^T C(\dot{q}_p, q_p) S(q_p) &= \begin{bmatrix} -2m_a \dot{\theta} \tan \phi & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.37}$$

le quali ci permettono di ottenere le accelerazioni del biciclo compatibili con i vincoli:

$$\begin{aligned}
 \dot{\nu}_1 &= \frac{L^2 \cos^3 \phi (\cos \theta \tau_x + \sin \theta \tau_y) + L \cos^2 \phi \sin \phi (\tau_\theta - \tau_\phi) + \sin \phi (m_a L^2 \cos^2 \phi \dot{\theta} - (I_p + m_a L^2) \dot{\phi}) \nu_1}{\cos \phi (\cos^2 \phi (L^2 m_p - I_p) + I_p + m_a L^2)} \\
 \dot{\nu}_2 &= - \frac{L I_a \cos \phi \sin \phi (\cos \theta \tau_x + \sin \theta \tau_y) + I_a \sin^2 \phi \tau_\theta - (L^2 (\cos^2 \phi m_p + m_a) + \sin^2 \phi (I_a + I_p)) \tau_\phi + L I_a (m_a \dot{\theta} \sin^2 \phi + \dot{\phi} (m_a + m_p)) \nu_1}{I_a (\cos^2 \phi (L^2 m_p - I_p) + I_p + m_a L^2)}
 \end{aligned} \tag{3.38}$$

Si provi per esercizio a calcolare il modello dinamico del veicolo negli altri tre casi utilizzando il metodo delle quasi velocità.

Capitolo 4

Controllo dinamico dei veicoli

4.1 Introduzione

Nel capitolo 4 sono stati presentati una serie di risultati per il controllo dei veicoli sul modello cinematico. In questo capitolo saranno presentati gli stessi risultati qualora si passi dal modello cinematico del veicolo al corrispondente modello dinamico. Come affermato anche nei capitoli precedenti, i risultati ottenuti con le funzioni di Lyapunov di controllo (comunemente indicate in letteratura con l'acronimo *CLF*, Control Lyapunov Function), ossia la funzione di Lyapunov ottenuta sostituendo i controlli in velocità ottenuti come retroazione dello stato, vorrebbero essere utilizzati anche per il controllo sul modello dinamico, minimizzando il più possibile il lavoro di adattamento al nuovo modello.

Di seguito viene presentato lo strumento principe da utilizzare nel passaggio da modello cinematico a corrispondente dinamico: l'*integratore backstepping*.

4.2 Integratore backstepping

Si consideri un sistema descritto classicamente:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u = F(x, u) \\ f(0) = 0 \end{cases}, \quad (4.1)$$

dove $x \in \mathbb{R}^n$ e $u \in \mathbb{R}$. Si facciano due ulteriori ipotesi sull'esistenza di una legge di controllo in retroazione differenziabile con continuità (regolare) $u = \Gamma(x)$, con $\Gamma(0) = 0$, e di una funzione di Lyapunov $\mathbf{V}(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ che abbia $L_F \mathbf{V}(x) \leq 0$.

Teorema 4.1. *Si consideri adesso il sistema (4.1), ma aumentato con un integratore:*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)\nu = F(x, \nu) \\ \dot{\nu} = u \end{cases} .$$

Se $L_F \mathbf{V}(x)$ è n.d., allora la nuova funzione di Lyapunov estesa:

$$\mathbf{V}_e(x, \nu) = \mathbf{V}(x) + \frac{1}{2}(\nu - \Gamma(x))^2,$$

è una CLF, ossia esiste un controllo in retroazione $u = \Gamma_e(x, \nu)$ che rende il punto di equilibrio $(x, \nu) = (0, 0)$ globalmente asintoticamente stabile. Un possibile controllo in grado di verificare le ipotesi è il seguente:

$$u = -K(\nu - \Gamma(x)) + \frac{\partial \Gamma(x)}{\partial x} [f(x) + g(x)\nu] - \frac{\partial \mathbf{V}(x)}{\partial x} g(x),$$

con $K > 0$.

Nel caso in cui $L_F \mathbf{V}(x)$ sia s.n.d., allora la nuova funzione di Lyapunov estesa permette di asserire sulla stabilità, non asintotica, dell'equilibrio. In tal caso lo studio deve essere ulteriormente esteso con l'analisi di Krasowskii-Lasalle.

Il sistema (4.1) può essere ricondotto al modello cinematico del veicolo, per il quale esiste una legge di stabilizzazione in retroazione $u = \Gamma(x)$, definita dal controllo ricavato precedentemente. Se gli effetti dinamici $\dot{\nu} = f_d(x, \nu)\tau$, con τ coppie di controllo, potessero essere inseriti come è stato fatto nel caso dell'integratore:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)\nu \\ \dot{\nu} = f_d(x, \nu)\tau \end{cases} , \quad (4.2)$$

lo studio del controllo dinamico potrebbe avvalersi del teorema sull'integratore backstepping.

Per poter applicare con successo questa tecnica è necessario estendere la tecnica dell'integratore backstepping al caso MIMO. In tal caso si ha:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)\nu = f(x) + g_1(x)\nu_1 + g_2(x)\nu_2 + \dots + g_m(x)\nu_m = F(x, \nu) \\ \dot{\nu} = u \end{cases} . \quad (4.3)$$

Per il sistema cinematico di partenza si supponga l'esistenza di m leggi di controllo in retroazione differenziabili con continuità (regolari) $u_i = \Gamma_i(x)$, con $\Gamma_i(0) = 0 \forall i = 1, \dots, m$, e di una funzione di Lyapunov $\mathbf{V}(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ che abbia $L_F \mathbf{V}(x) \leq 0$.

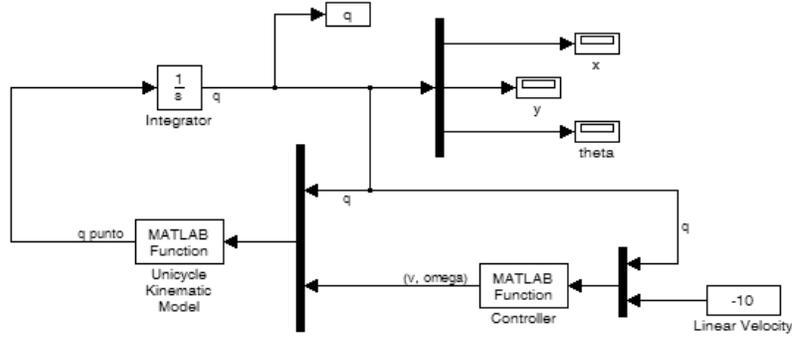


Figura 4.1: Modello generico Simulink del sistema dinamico e relativo controllore.

Se $L_F \mathbf{V}(x)$ è n.d., allora la nuova funzione di Lyapunov estesa:

$$\mathbf{V}_e(x, \nu) = \mathbf{V}(x) + \frac{1}{2}[(\nu_1 - \Gamma_1(x))^2 + (\nu_2 - \Gamma_2(x))^2 + \dots + (\nu_m - \Gamma_m(x))^2], \quad (4.4)$$

è una CLF, ossia esiste un controllo in retroazione $u = \Gamma_e(x, \nu)$ che rende il punto di equilibrio $(x, \nu) = (0, 0)$ globalmente asintoticamente stabile. I possibili controlli (coppie) in grado di verificare le ipotesi possono essere i seguenti:

$$\begin{cases} u_1 = -K_1(\nu - \Gamma_1(x)) + \frac{\partial \Gamma_1(x)}{\partial x} [f(x) + g(x)\nu] - \frac{\partial \mathbf{V}(x)}{\partial x} g_1(x) \\ u_2 = -K_2(\nu - \Gamma_2(x)) + \frac{\partial \Gamma_2(x)}{\partial x} [f(x) + g(x)\nu] - \frac{\partial \mathbf{V}(x)}{\partial x} g_2(x) \\ \vdots \\ u_m = -K_m(\nu - \Gamma_m(x)) + \frac{\partial \Gamma_m(x)}{\partial x} [f(x) + g(x)\nu] - \frac{\partial \mathbf{V}(x)}{\partial x} g_m(x) \end{cases}, \quad (4.5)$$

con $K_i > 0$. Sostituendo questi controlli nella derivata direzionale della candidata di Lyapunov è possibile ottenere:

$$L_F \mathbf{V}_e(x, \nu) = L_F \mathbf{V}(x) - K_1(\nu_1 - \Gamma_1(x))^2 - K_2(\nu_2 - \Gamma_2(x))^2 + \dots + K_m(\nu_m - \Gamma_m(x))^2, \quad (4.6)$$

ovvero la stessa derivata deirezionale del caso iniziale con l'aggiunta dei termini di backstepping. Come anticipato precedentemente, $L_F \mathbf{V}_e(x, \nu)$ dipenderà dalle caratteristiche di $L_F \mathbf{V}(x)$.

Con riferimento al modello dinamico ed al backstepping, per tutti i controllori dinamici sviluppati in queste note si suppone di utilizzare uno schema di montaggio sistema/controllore comune, riportato in figura 4.1. Le simulazioni sono tutte effettuate in ambiente Simulink.

4.3 Path following

Si consideri il problema della stabilizzazione di un unicycle su una circonferenza. Si riporta brevemente il modello cinematico del sistema utilizzato:

$$\begin{bmatrix} \dot{\rho} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho \sin \alpha \hat{v}^* \\ \cos \alpha \hat{v}^* \\ \cos \alpha \hat{v}^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \omega, \quad (4.7)$$

con l'usuale sostituzione $\hat{v} = \rho \hat{v}^*$. Si ricorda che il modello cinematico non lineare sottostante è affine negli ingressi e con termine di deriva per avere rinunciato al controllo sulla velocità lineare v^* . La candidata di Lyapunov utilizzata e la relativa derivata direzionale sono riportate di seguito:

$$\begin{cases} \mathbf{V}(\bar{q}) = \frac{1}{2}(\rho - R)^2 + \frac{1}{2}\alpha^2 \\ L_f \mathbf{V}(\bar{q}) = (\rho - R)\rho \sin \alpha \hat{v}^* + \alpha \cos \alpha \hat{v}^* - \alpha \omega \end{cases}. \quad (4.8)$$

Il controllo sulla velocità angolare ω :

$$\omega = ((\rho - R)\rho \frac{\sin \alpha}{\alpha} + \cos \alpha) \hat{v}^* + K_\alpha \alpha, \quad (4.9)$$

permette di stabilizzare il veicolo sulla circonferenza.

Il modello dinamico del sistema è riportato di seguito:

$$\begin{cases} \dot{v} = \frac{1}{m}(\tau_x \cos \theta + \tau_y \sin \theta) \\ \dot{\omega} = \frac{\tau_\omega}{I_z} \end{cases}, \quad (4.10)$$

espresso nelle coordinate cartesiane dell'unicycle. Per poter essere applicato al modello cinematico riportato sopra, è necessario trasformarlo in coordinate cilindriche, ottenendo:

$$\begin{cases} \dot{v} = \frac{1}{m}(\tau_x \cos(\beta - \alpha + \frac{\pi}{2}) + \tau_y \sin(\beta - \alpha + \frac{\pi}{2})) = \frac{\tau_v}{m} \\ \dot{\omega} = \frac{\tau_\omega}{I_z} \end{cases}, \quad (4.11)$$

dove, per semplicità, τ_v e τ_ω sono le coppie di controllo. L'ultima trasformazione necessaria riguarda la trasformazione da v a v^* :

$$v = \rho v^* \rightarrow \dot{v} = \dot{\rho} v^* + \rho \dot{v}^* = \rho \sin \alpha v^{*2} + \rho \dot{v}^* \rightarrow \dot{v}^* = \frac{\tau_v}{m\rho} - \sin \alpha v^{*2}. \quad (4.12)$$

Il modello dinamico complessivo sarà dunque:

$$\begin{bmatrix} \dot{\rho} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{v}^* \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho \sin \alpha v^* \\ \cos \alpha v^* - \omega \\ \cos \alpha v^* \\ \frac{\tau_v}{m\rho} - \sin \alpha v^{*2} \\ \frac{\tau_\omega}{I_z} \end{bmatrix}. \quad (4.13)$$

Come riportato nello studio dei controlli sul modello cinematico, i problemi di inseguimento di cammini geometrici possono essere risolti rinunciando al controllo sulla velocità di avanzamento lineare, ponendo $v = \hat{v} \neq 0$ costante, al quale corrisponde $v^* = \frac{\dot{v}}{\rho} = \hat{v}^*$ dipendente dal tempo. Questo corrisponde ad avere una coppia di attuazione di equilibrio $\dot{v} = \frac{\tau_v}{m} = 0$ e quindi una evoluzione per la \hat{v}^* pari a:

$$\dot{v}^* = -\sin \alpha v^{*2}. \quad (4.14)$$

Per la stabilizzazione del modello dinamico si applichi la tecnica dell'integratore in backstepping. Si definisca la candidata di Lyapunov estesa:

$$\mathbf{V}_e(\bar{q}, \omega) = \mathbf{V}(\bar{q}) + \frac{1}{2}(\omega - \Omega)^2, \quad (4.15)$$

dove Ω rappresenta la legge di stabilizzazione nel caso cinematico (riportata in (4.9)). Una possibile legge per la coppia di controllo a disposizione τ_ω è:

$$\tau_\omega = I_z(-K_b(\omega - \Omega) + \dot{\Omega} - \frac{\partial \mathbf{V}(\bar{q})}{\partial \bar{q}}g(\bar{q})), \quad (4.16)$$

con $K_b > 0$ costante di backstepping da definire in base alle desiderate velocità di convergenza per il veicolo. Il calcolo del momento angolare τ_ω passa attraverso il calcolo della $\dot{\Omega}$, pari a:

$$\dot{\Omega} = \frac{\rho(2\rho - R)\frac{\sin^2 \alpha}{\alpha}(\hat{v}^*)^2 - ((\rho - R)\rho\frac{\sin \alpha}{\alpha} + \cos \alpha) \sin \alpha (\hat{v}^*)^2 + [\rho(\rho - R)\frac{\alpha \cos \alpha - \sin \alpha}{\alpha^2}\hat{v}^* - \sin \alpha \hat{v}^* + K_\alpha](\cos \alpha \hat{v}^* - \omega)}{\quad}, \quad (4.17)$$

sempre definita, anche nel caso in cui $\alpha \rightarrow 0$, dove vale $\dot{\Omega} = K_\alpha \rho (R - \rho) \hat{v}^*$. Infine:

$$\frac{\partial \mathbf{V}(\bar{q})}{\partial \bar{q}}g(\bar{q}) = -\alpha. \quad (4.18)$$

Sostituendo tutto nella candidata di Lyapunov estesa $\mathbf{V}_e(\bar{q}, \omega)$ e facendone la derivata direzionale si ottiene subito:

$$\begin{aligned} L_f \mathbf{V}_e(\bar{q}, \omega) &= (\rho - R)\rho \sin \alpha \hat{v}^* + \alpha \cos \alpha \hat{v}^* - \alpha \omega - K_b(\omega - \Omega)^2 + \alpha(\omega - \Omega) \\ &= -K_b(\omega - \Omega)^2 - K_\alpha \alpha^2 \end{aligned}, \quad (4.19)$$

dalla quale è possibile notare come si sia ottenuta la stessa derivata direzionale del caso cinematico con l'aggiunta del termine di backstepping.

Per una verifica pratica dei risultati ottenuti con la teoria di Lyapunov ed il backstepping, il controllore è stato implementato e simulato con **Simulink**. Come nel caso cinematico, si fissi la costante di guadagno $K_\alpha = 10$ e la condizione iniziale $q_0 = [x_0, y_0, \theta_0, \hat{v}, \omega]^T = [0, 20, \frac{\pi}{2}, 10, 0]$. In questo caso è

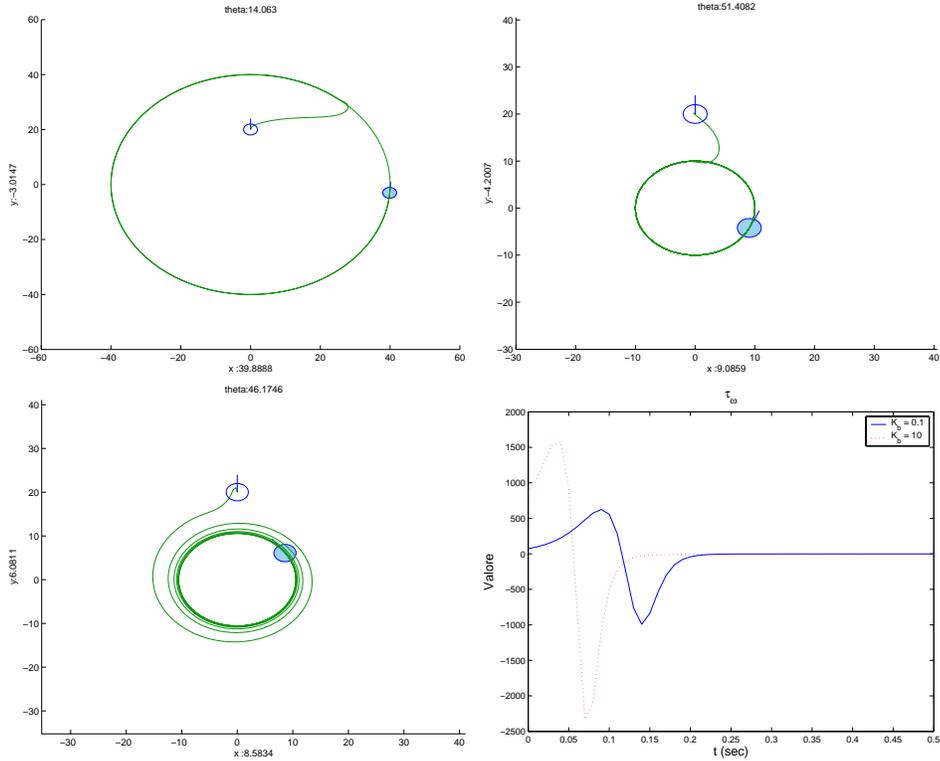


Figura 4.2: Risultati della simulazione per la stabilizzazione dell'uniciclo sulla circonferenza. Tutte le simulazioni hanno come stato iniziale $q_0 = [x_0, y_0, \theta_0, \hat{v}, \omega]^T = [0, 20, \frac{\pi}{2}, 10, 0]$.

necessario aggiungere ulteriormente il valore della costante di backstepping la quale deve essere mediata tra velocità di inseguimento e spesa per il controllo. Nel primo esempio $K_b = 10$, il raggio della circonferenza sulla quale stabilizzare il veicolo sia $R = 40$ mentre $m = 10$ e $I_z = 1$ sono rispettivamente la massa ed il momento di inerzia del veicolo. Con le scelte elencate è possibile ottenere i risultati riportati in figura 4.2, in alto a sinistra. Nel secondo esempio il raggio della circonferenza è $R = 10$ (figura 4.2, in alto a destra). Per valutare l'influenza della costante di guadagno di backstepping sulla convergenza del veicolo, nel terzo esempio essa è fissata a $K_b = 0.1$, valore che permette una “convergenza” del modello dinamico sul cinematico più lenta rispetto al caso precedente. Si ottiene così una traiettoria a spirale (figura 4.2, in basso a sinistra). Abbassando il valore della costante di guadagno di backstepping si ha una diminuzione della coppia τ_ω generata, al prezzo di un tempo di risposta più alto (figura 4.2, in basso a destra). Infine,

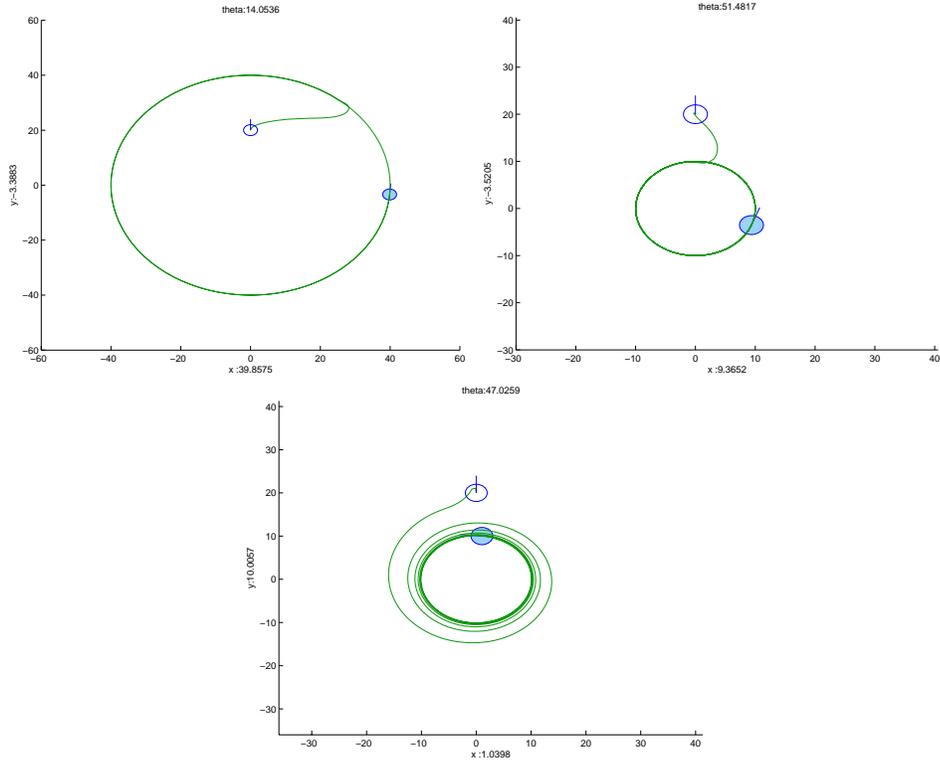


Figura 4.4: Risultati della simulazione per la stabilizzazione dell'uniciclo sulla circonferenza utilizzando il secondo montaggio proposto.

I risultati ottenuti precedentemente sono stati ottenuti nuovamente con questo nuovo montaggio e riportati in figura 4.4. Nel terzo ed ultimo esempio, avendo fissato la costante di guadagno di backstepping $K_b = 0.1$, la velocità di convergenza del veicolo verso il luogo geometrico si riesce a notare la differenza con il montaggio precedente. Questo comportamento è da ricercarsi nel diverso controllo calcolato.

4.4 Trajectory Tracking

Si consideri il problema dell'inseguimento di una traiettoria di riferimento nel caso di unicycle. Le variabili di stato da stabilizzare sono in questo caso gli errori di tracking tra i due veicoli, con cinematica:

$$\dot{e} = \begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_r \cos e_3 - v + e_2 \omega \\ v_r \sin e_3 - e_1 \omega \\ \omega_r - \omega \end{bmatrix}. \quad (4.20)$$

La candidata di Lyapunov e la relativa derivata direzionale per il modello cinematico sono:

$$\begin{cases} \mathbf{V}(e) = \frac{1}{2}(e_1^2 + e_2^2) + K_{e_3}(1 - \cos e_3) \\ L_f \mathbf{V}(e) = e_1(v_r \cos e_3 - v + e_2 \omega) + e_2(v_r \sin e_3 - e_1 \omega) + K_{e_3} \sin e_3(\omega_r - \omega) \end{cases} \quad (4.21)$$

Sostituendo i controlli:

$$\begin{cases} v = v_r \cos e_3 + e_1 \\ \omega = \omega_r + \frac{1}{K_{e_3}} e_2 v_r + \sin e_3 \end{cases} \quad , \quad (4.22)$$

è possibile concludere sulla asintotica stabilità del punto di equilibrio $e = [e_1, e_2, e_3]^T = [0, 0, 0]^T$.

Il modello dinamico del sistema è riportato di seguito:

$$\begin{cases} \dot{v} = \frac{\tau_v}{m} \\ \dot{\omega} = \frac{\tau_\omega}{I_z} \end{cases} \quad , \quad (4.23)$$

dove τ_v e τ_ω sono le coppie di controllo.

Il modello dinamico complessivo sarà dunque:

$$\dot{e} = \begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \\ \dot{v} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_r \cos e_3 - v + e_2 \omega \\ v_r \sin e_3 - e_1 \omega \\ \omega_r - \omega \\ \frac{\tau_v}{m} \\ \frac{\tau_\omega}{I_z} \end{bmatrix} \quad . \quad (4.24)$$

Per la stabilizzazione del modello dinamico si applichi la tecnica dell'integratore in backstepping (la seconda tecnica di compensazione della dinamica non viene riportata ed è lasciata al lettore come utile esercizio). Si definisca la candidata di Lyapunov estesa:

$$\mathbf{V}_e(e, v, \omega) = \mathbf{V}(e) + \frac{1}{2}(v - \bar{V}(e))^2 + \frac{1}{2}(\omega - \Omega(e))^2, \quad (4.25)$$

dove $\Omega(e)$ e $\bar{V}(e)$ rappresentano le leggi di stabilizzazione nel caso cinematico (riportate in (4.22)). Due possibili leggi per le coppie di controllo a disposizione τ_v e τ_ω sono:

$$\begin{cases} \tau_v = m(-K_{bv}(v - \bar{V}(e)) + \frac{d\bar{V}(e)}{dt} - \frac{\partial \mathbf{V}(e)}{\partial e} g(e)) \\ \tau_\omega = I_z(-K_{b\omega}(\omega - \Omega(e)) + \dot{\Omega}(e) - \frac{\partial \mathbf{V}(e)}{\partial e} g(e)) \end{cases} \quad , \quad (4.26)$$

con $K_{bv} > 0$ e $K_{b\omega} > 0$ costanti di backstepping, rispettivamente per la velocità lineare ed angolare, da definire in base alle desiderate velocità di

convergenza per il veicolo. Il calcolo delle coppie angolari τ_v e τ_ω passa attraverso il calcolo delle derivate temporali delle rispettive leggi cinematiche di stabilizzazione $\frac{d\bar{V}(e)}{dt}$ e $\dot{\Omega}(e)$, rispettivamente pari a:

$$\begin{cases} \frac{d\bar{V}(e)}{dt} &= -(\omega_r - \omega)v_r \sin e_3 + v_r \cos e_3 - v + e_2\omega + \dot{v}_r \cos e_3 \\ \dot{\Omega} &= \frac{1}{K_{e_3}}v_r^2 \sin e_3 - \frac{1}{K_{e_3}}v_r e_1\omega + \frac{1}{K_{e_3}}e_2\dot{v}_r + (\omega_r - \omega) \cos e_3 + \dot{\omega}_r \end{cases}, \quad (4.27)$$

dipendenti dalla dinamica del riferimento tramite \dot{v}_r e ω_r . Infine:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{V}(e)}{\partial e} g_1(e) = -e_1 \\ \frac{\partial \mathbf{V}(e)}{\partial e} g_2(e) = -K_{e_3} \sin e_3 \end{cases}. \quad (4.28)$$

Sostituendo (4.27) e (4.28) nella derivata direzionale di $\mathbf{V}_e(e, v, \omega)$ si ottiene subito:

$$\begin{aligned} L_f \mathbf{V}_e(e, v, \omega) &= e_1(v_r \cos e_3 - v + e_2\omega) + e_2(v_r \sin e_3 - e_1\omega) \\ &\quad + K_{e_3} \sin e_3(\omega_r - \omega) - K_{bv}(v - \bar{V}(e))^2 - K_{b\omega}(\omega - \Omega(e))^2 \\ &\quad + (v - \bar{V}(e))e_1 + (\omega - \Omega(e))K_{e_3} \sin e_3 \\ &= -e_1^2 - K_{e_3} \sin e_3 - K_{bv}(v - \bar{V}(e))^2 - K_{b\omega}(\omega - \Omega(e))^2 \end{aligned}, \quad (4.29)$$

dalla quale è possibile notare come si sia ottenuta la stessa derivata direzionale del caso cinamntico con l'aggiunta del termine di backstepping.

Fissando la costante di guadagno $K_{e_3} = 10$ e le costanti di backstepping $K_{bv} = 10$ e $K_{b\omega} = 1000$ si ottengono vari risultati a seconda delle velocità del riferimento. La massa ed il momento di inerzia dei due unicli sono supposti identici per i due veicoli (una differenza non comporta alcun problema dal punto di vista del controllore) e pari rispettivamente a $m = 10$ e $I_z = 1$. Nel primo esempio (figura 4.5, in alto a sinistra) il veicolo inseguitore ha posizione iniziale $q_0^i = [x_0^i, y_0^i, \theta_0^i, v, \omega]^T = [0, 20, \frac{\pi}{2}, 0, 0]^T$, mentre il riferimento ha come condizione iniziale $q_0^r = [x_0^r, y_0^r, \theta_0^r, v_r, \omega_r]^T = [0, -10, 0, 10, 1]^T$ e velocità $[v_r(t), \omega_r(t)]^T = [10, 1]^T$ (la sua traiettoria descrive una circonferenza di raggio $R = 10$ nello spazio di stato del veicolo, percorsa a velocità costante). Nel secondo esempio (figura 4.5, in alto a destra) il veicolo di riferimento ha come condizione iniziale $q_0^r = [x_0^r, y_0^r, \theta_0^r, v_r, \omega_r]^T = [0, -20, 0, -20, 1]^T$ ed il veicolo inseguitore $q_0^i = [x_0^i, y_0^i, \theta_0^i, v, \omega]^T = [0, 20, 0, 0, 0]^T$. Le velocità del riferimento sono stavolta $[v_r(t), \omega_r(t)]^T = [0.1t, 1]^T$ corrispondenti ad una uniforme accelerazione lungo la velocità di avanzamento. Nel terzo esempio (figura 4.5, in basso a sinistra) il veicolo di riferimento ha come condizione iniziale $q_0^r = [x_0^r, y_0^r, \theta_0^r, v_r, \omega_r]^T = [0, -10, 0, 20, 0]^T$ e velocità $[v_r(t), \omega_r(t)]^T = [20 \cos(t), 10 \sin(t)]^T$, le quali descrivono una traiettoria generica nello spazio di stato. La posizione di partenza del veicolo inseguitore è

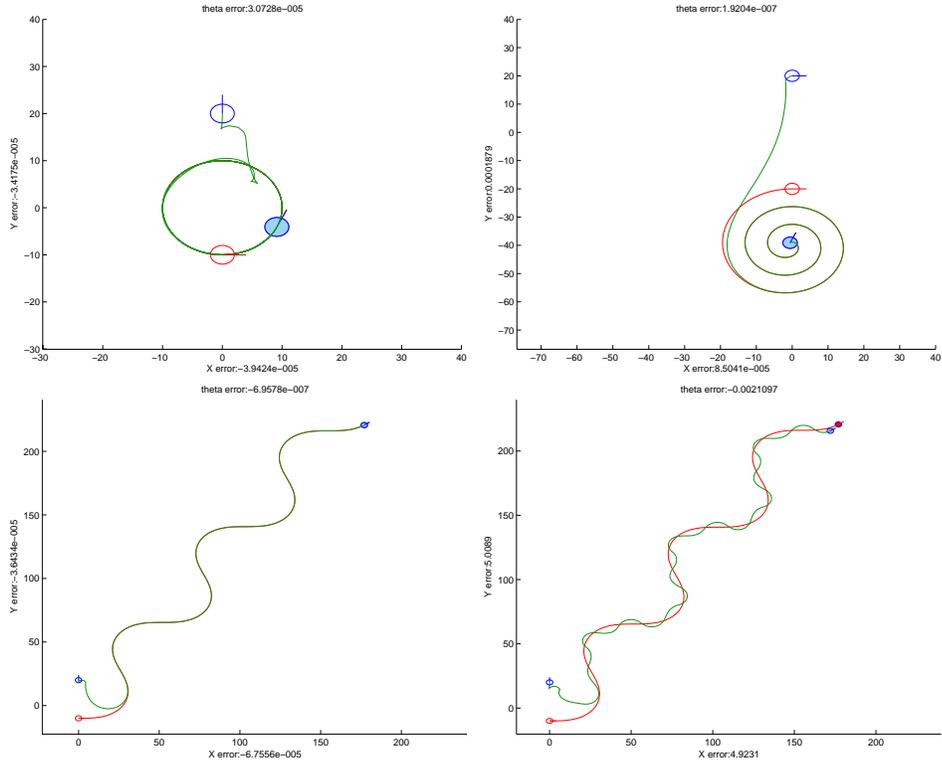


Figura 4.5: Risultati della simulazione per l'inseguimento di un unicycle di riferimento nel caso di modello dinamico.

invece $q_0^i = [x_0^i, y_0^i, \theta_0^i, v, \omega]^T = [0, 20, \frac{\pi}{2}, 0, 0]^T$. Si noti come un cambiamento nel tuning delle costanti di guadagno di backstepping, fissando ad esempio $K_{b\omega} = 10$, porta il sistema ad avere una convergenza verso il riferimento molto lenta.

Lo studio del controllore e le relative simulazioni pensando ad uno schema del tipo di figura 4.3 non sono state riportate e si lasciano come utile esercizio al lettore.

4.5 Point-To-Point Motion

Anche per quest'ultimo esempio si prenda in considerazione la stabilizzazione dinamica su un punto di un veicolo unicycle. Si riporta brevemente il modello

cinematico del sistema utilizzato:

$$\begin{cases} \dot{\rho} = -\cos \beta v \\ \dot{\phi} = \frac{1}{\rho} \sin \beta v \\ \dot{\beta} = \frac{1}{\rho} \sin \beta v - \omega \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{\rho} = -\rho \cos \beta v^* \\ \dot{\phi} = \sin \beta v^* \\ \dot{\beta} = \sin \beta v^* - \omega \end{cases}, \quad (4.30)$$

dove $v^* = \frac{v}{\rho}$ è la nuova velocità di avanzamento lineare del veicolo ed ω è l'usuale velocità angolare.

La candidata di Lyapunov utilizzata e la relativa derivata direzionale sono riportate di seguito:

$$\begin{cases} \mathbf{V}(\bar{q}) = \frac{1}{2}(\rho^2 + \phi^2 + \lambda\beta^2) \\ L_f \mathbf{V}(\bar{q}) = -\rho^2 \cos \beta v^* + \phi \sin \beta v^* + \lambda\beta \sin \beta v^* - \lambda\beta\omega \end{cases}, \quad (4.31)$$

dove $\lambda > 0$ è un grado di libertà aggiuntivo a disposizione del progettista. Scegliendo i seguenti controlli:

$$\begin{cases} v^* = \cos \beta = V^*(\bar{q}) \\ \omega = \frac{\phi \sin \beta \cos \beta + \lambda\beta \sin \beta \cos \beta}{\lambda\beta} + \beta = \Omega(\bar{q}) \end{cases}, \quad (4.32)$$

si ottiene $L_f \mathbf{V}(\bar{q})$ s.n.d. ed utilizzando ancora una volta Krosowskii–Lasalle, è possibile concludere sulla asintotica stabilità del punto di equilibrio.

Il modello dinamico del sistema è riportato di seguito:

$$\begin{cases} \dot{v} = \frac{\tau_v}{m} \\ \dot{\omega} = \frac{\tau_\omega}{I_z} \end{cases}, \quad (4.33)$$

dove, per semplicità, τ_v e τ_ω sono le coppie di controllo. Il modello dinamico (4.33) necessita della trasformazione $v \rightarrow v^*$:

$$v = \rho v^* \rightarrow \dot{v} = \dot{\rho} v^* + \rho \dot{v}^* = -\rho \cos \beta v^{*2} + \rho \dot{v}^* \rightarrow \dot{v}^* = \frac{\tau_v}{m\rho} + \cos \beta v^{*2}. \quad (4.34)$$

Il modello dinamico complessivo sarà dunque:

$$\begin{bmatrix} \dot{\rho} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\beta} \\ \dot{v}^* \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\rho \cos \beta v^* \\ \sin \beta v^* \\ \sin \beta v^* - \omega \\ \frac{\tau_v}{m\rho} + \cos \beta v^{*2} \\ \frac{\tau_\omega}{I_z} \end{bmatrix}. \quad (4.35)$$

Per la stabilizzazione del modello dinamico si applichi la tecnica dell'integratore in backstepping. Si definisca la candidata di Lyapunov estesa:

$$\mathbf{V}_e(\bar{q}, v^*, \omega) = \mathbf{V}(\bar{q}) + \frac{1}{2}(v^* - V^*(\bar{q}))^2 + \frac{1}{2}(\omega - \Omega(\bar{q}))^2, \quad (4.36)$$

dove $\Omega(\bar{q})$ e $V^*(\bar{q})$ rappresentano le leggi di stabilizzazione nel caso cinematico (riportate in (4.32)). Due possibili leggi per le coppie di controllo a disposizione τ_v e τ_ω sono:

$$\begin{cases} \tau_v = m\rho(-K_{bv}(v^* - V^*(\bar{q})) + \dot{V}^*(\bar{q}) - \frac{\partial \mathbf{V}(\bar{q})}{\partial \bar{q}} g_1(\bar{q})) \\ \tau_\omega = I_z(-K_{b\omega}(\omega - \Omega(\bar{q})) + \dot{\Omega}(\bar{q}) - \frac{\partial \mathbf{V}(\bar{q})}{\partial \bar{q}} g_2(\bar{q})) \end{cases}, \quad (4.37)$$

con $K_{bv} > 0$ e $K_{b\omega} > 0$ costanti di backstepping, rispettivamente per la velocità lineare ed angolare, da definire in base alle desiderate velocità di convergenza per il veicolo. Il calcolo delle coppie angolari τ_v e τ_ω passa attraverso il calcolo delle derivate temporali delle rispettive leggi cinematiche di stabilizzazione $\dot{V}^*(\bar{q})$ e $\dot{\Omega}(\bar{q})$, rispettivamente pari a:

$$\begin{cases} \dot{V}^*(\bar{q}) = -\sin^2 \beta v^* - \sin \beta \omega \\ \dot{\Omega}(\bar{q}) = \frac{1}{\lambda\beta^2}(\phi\beta(\cos^2 \beta - \sin^2 \beta) + 2\lambda\beta^2 \cos^2 \beta - \phi \sin \beta \cos \beta) \\ \quad (\sin \beta v^* - \omega) + \frac{\cos \beta \sin^2 \beta}{\lambda\beta} v^* \end{cases}. \quad (4.38)$$

Infine:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{V}(\bar{q})}{\partial \bar{q}} g_1(\bar{q}) = -\rho^2 \cos \beta + \phi \sin \beta + \lambda\beta \sin \beta \\ \frac{\partial \mathbf{V}(\bar{q})}{\partial \bar{q}} g_2(\bar{q}) = -\lambda\beta \end{cases}. \quad (4.39)$$

Si noti come in questo caso sia stata adottata la tecnica dell'integratore backstepping anche se la dinamica v^* non sia quella di un integratore puro. Per ovviare al problema dell'aggiunta di dinamica nell'integratore, è necessario aggiungere un ulteriore termine correttivo $\tau_{v^*} = -m\rho \cos \beta (v^*)^2$ nel calcolo della coppia di avanzamento lineare.

Sostituendo (4.38), (4.39) ed il termine correttivo τ_{v^*} nella derivata direzionale di $\mathbf{V}_e(\bar{q}, v, \omega)$ si ottiene:

$$\begin{aligned} L_f \mathbf{V}_e(\bar{q}, v^*, \omega) &= -\rho^2 \cos \beta v^* + \phi \sin \beta v^* + \lambda\beta \sin \beta v^* - \lambda\beta \omega \\ &\quad - K_{bv}(v^* - V^*(\bar{q}))^2 - K_{b\omega}(\omega - \Omega(\bar{q}))^2 + (\omega - \Omega(\bar{q}))\lambda\beta \\ &\quad - (v^* - V^*(\bar{q}))(-\rho^2 \cos \beta + \phi \sin \beta + \lambda\beta \sin \beta) \\ &= -\rho^2 \cos^2 \beta - \lambda\beta^2 - K_{bv}(v^* - V^*(\bar{q}))^2 - K_{b\omega}(\omega - \Omega(\bar{q}))^2 \end{aligned}, \quad (4.40)$$

dalla quale è possibile notare come si sia ottenuta la stessa derivata direzionale del caso cinematico con l'aggiunta del termine di backstepping.

Per una verifica pratica dei risultati ottenuti con la teoria di Lyapunov ed il backstepping, il controllore è stato implementato e simulato con **Simulink**. Come nel caso cinematico, si fissi la costante di guadagno $\lambda = 1/2$ e la condizione iniziale $q_0 = [x_0, y_0, \theta_0, v, \omega]^T = [0, 20, \frac{\pi}{2}, 10, 0]$. Nel caso di controllo

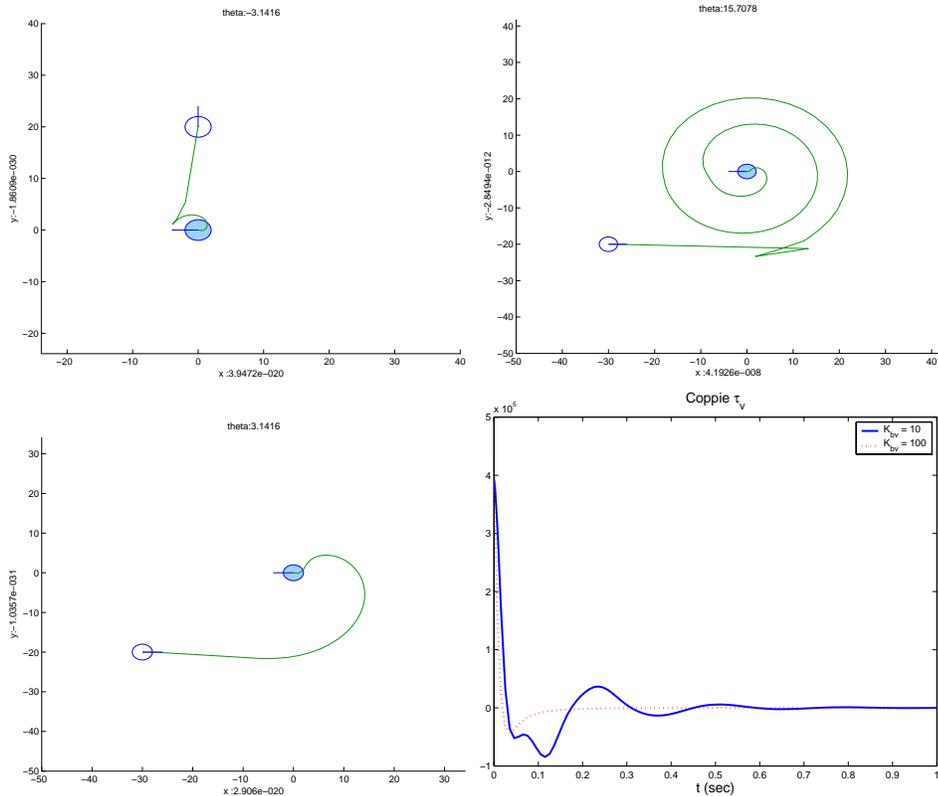


Figura 4.6: Risultati della simulazione per la stabilizzazione dell'uniciclo su un punto utilizzando il modello dinamico con $m = 10$, massa del veicolo, e $I_z = 1$ momento di inerzia.

sul modello dinamico è necessario fissare il valore delle costanti di backstepping, mediandole tra velocità di inseguimento e spesa per il controllo. Si fissi perciò $K_{bv} = 10$ e $K_{b\omega} = 100$. $m = 10$ e $I_z = 1$ sono rispettivamente la massa ed il momento di inerzia del veicolo. Con le scelte elencate è possibile ottenere i risultati riportati in figura 4.6, in alto a sinistra. Nel secondo esempio la posizione iniziale del veicolo è $q_0 = [x_0, y_0, \theta_0]^T = [-30, -20, 0, 0, -1]^T$ (figura 4.6, in alto a destra). Per valutare l'influenza della costante di guadagno di backstepping sulla convergenza del veicolo, nel terzo esempio la costante relativa alla velocità di avanzamento è fissata a $K_{bv} = 100$, valore che permette una "convergenza" del modello dinamico sul cinematico più veloce rispetto al caso precedente. Si ottiene così una traiettoria più regolare rispetto alla spirale ottenuta nell'esempio precedente (figura 4.6, in basso a sinistra). Alzando il valore della costante di guadagno di backstepping si ha un aumento della coppia τ_{bv} generata, ottenendo però un tempo di risposta più basso

(figura 4.2, in basso a destra).

Capitolo 5

Controllo di Veicoli Mediante Linearizzazione in Retroazione

5.1 Introduzione alla linearizzazione in retroazione

In questo paragrafo richiameremo brevemente la teoria su cui si basa la tecnica della *linearizzazione in retroazione* (*feedback linearization*) per poi applicarla nella risoluzione di problemi di controllo cinematico per veicoli di tipo unicycle e bicycle.

Tali veicoli rientrano nella classe di sistemi non lineari affini nel controllo

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x)u_i; \quad x, f(x), g(x) \in \mathbb{R}^n, \quad u_i \in \mathbb{R}$$

dove i campi vettoriali $f(x)$ e $g(x)$ si dicono rispettivamente di *deriva* e di *ingresso*.

Senza perdere di generalità restringeremo la nostra analisi in un intorno dell'origine $x = 0$ considerato punto di equilibrio del sistema con $f(x)$ e $g(x)$ continue e derivabili.

Inizieremo con lo studio del caso di sistema *SISO* richiamando gli strumenti matematici necessari, le *Lie brackets* (o *Lie-derivative*), la definizione di *grado relativo*, e introdurremo il concetto di *zero dinamica*.

Nella parte finale del capitolo estenderemo lo studio al caso *MIMO* e distingueremo tra *linearizzazione statica e dinamica*. Per un approfondimento: “Nonlinear Systems”, A. Isidori, oppure “Robot Motion Planning and Control”, Ed. Jean-Paul Laumond.

5.1.1 Formulazione del problema nel caso SISO

Sia dato

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = h(x) \end{cases} \quad (5.1)$$

sistema non lineare SISO in forma affine nel controllo avente l'origine come punto di equilibrio

$$f(0) = 0$$

e dove $y = h(x)$ rappresenta la funzione di uscita del sistema non lineare in esame. Derivando $h(x)$ una prima volta si ottiene

$$\dot{y} = \frac{\partial h}{\partial x} \dot{x} = \frac{\partial h}{\partial x} (f(x) + g(x)u) = L_f h + L_g h u$$

dove $L_f h$ e $L_g h$ sono le derivate direzionali della funzione h lungo i campi vettoriali $f(x)$ e $g(x)$, note come *Lie-brackets* (o *Lie-derivative*).

Qualora $L_g h = 0$ in \dot{y} non appare l'ingresso u come in y . Procedendo con le derivate successive si trova

$$\ddot{y} = \frac{\partial L_f h}{\partial x} \dot{x} = L_f^2 h + L_g L_f h u$$

per la derivata seconda. Se $L_g L_f h = 0$ anch'essa non presenta l'ingresso u . Procedendo con derivazioni successive se u appare alla derivata generica k -esima avremo

$$y^{(k)} = L_f^{(k)} h + L_g L_f^{(k-1)} h u \quad \text{con} \quad L_g L_f^{(r-1)} h(x=0) \neq 0$$

Diremo allora che il sistema possiede *grado relativo* r rispetto alla funzione di uscita h se

1. $L_g h = L_g L_f h = L_g L_f^2 h = \dots = L_g L_f^{(r-2)} h = 0$ identicamente nulle in un intorno dell'origine $x = 0$.
2. $L_g L_f^{(r-1)} h(x=0) \neq 0$.

In pratica il grado relativo indica il numero di volte che occorre derivare la funzione di uscita h affinché appaia l'ingresso u .

Nostro scopo è trovare un cambiamento di variabili $z = \Phi(x)$ con equilibrio nell'origine $z(0) = 0$ ed un ingresso u ottenuto mediante retroazione nonlineare degli stati x

$$u(x) = \alpha(x) + \beta(x)\nu, \quad \beta^{-1}(x) \neq 0$$

tale che il sistema nelle nuove variabili z sia lineare e controllabile¹

$$\dot{z} = Az + b\nu$$

¹Potendo scegliere una retroazione degli stati sugli ingressi e dunque la posizione dei

5.1.2 Linearizzazione input-stati

Sia dato il sistema (5.1) e si supponga di averne calcolato grado relativo. Se $r = n$ si parla di *linearizzazione input-stati* oppure di *linearizzazione esatta* e possiamo scegliere come cambiamento di variabili

$$z = \Phi(x) = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \\ \ddot{y} \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(x) \\ L_f h(x) \\ L_f^2 h(x) \\ \vdots \\ L_f^{(n-1)} h(x) \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

Occorre verificare che il cambiamento di variabili sia ammissibile cioè che

$$\det \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x} \neq 0$$

o in altre parole vedere che la funzione vettoriale Φ sia regolare ed invertibile (*diffeomorfismo*) in un intorno dell'origine $x = 0$.

Se questa condizione è verificata, cioè se le n funzioni $h, L_f h, \dots, L_f^{(n-1)} h$ sono linearmente indipendenti, il sistema nelle sue nuove coordinate sarà

$$\begin{cases} \dot{z}_1 &= z_2 \\ &\vdots \\ \dot{z}_{n-1} &= z_n \\ \dot{z}_n &= L_f^{(n)} h + L_g L_f^{(n-1)} h u = a(x) + b(x)u \end{cases} \quad (5.3)$$

con $b(x) \neq 0$ in un intorno di $x = 0$.

Se adesso definiamo la retroazione non lineare

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{b(x)} [-a(x) + v] = -\frac{a(x)}{b(x)} + \frac{v}{b(x)} = \\ &= -\frac{L_f^{(n)} h}{L_g L_f^{(n-1)} h} + \frac{1}{L_g L_f^{(n-1)} h} v = \alpha(x) + \beta(x)v \end{aligned}$$

poli di A , faremo in modo che essi siano tutti nell'origine con la coppia (A, B) in *forma canonica* di controllo

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

con

$$\alpha(x) = -\frac{L_f^{(n)}h}{L_g L_f^{(n-1)}h} = -\frac{a(x)}{b(x)}; \quad \beta(x) = \frac{1}{L_g L_f^{(n-1)}h} = \frac{\nu}{b(x)}$$

Il sistema (5.3) si trova in *forma canonica di controllo*, la stessa forma in cui viene posto solitamente un sistema lineare prima dell'assegnamento dei poli con retroazione statica degli stati. In particolare, esplicitando le matrici nelle nuove coordinate otteniamo la *forma canonica di Brunowski*

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \vdots \\ \dot{z}_{n-1} \\ \dot{z}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{n-1} \\ z_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \nu = Az + b\nu$$

dove ν è il nuovo riferimento. Il legame tra l'uscita y e l'ingresso ν è una catena di n integratori

$$\frac{d^n y}{dt^n} = \frac{d^n z_1}{dt^n} = \dot{z}_n = \nu$$

pertanto con una semplice retroazione degli stati z sull'ingresso ν del tipo $\nu = kz$, con k vettore riga, possiamo stabilizzare il sistema posizionando i poli dove si desidera.

5.1.3 Linearizzazione input-output

Nal caso in cui il grado relativo $r < n$ si può ricorrere ad una *linearizzazione input-output* (o *linearizzazione parziale*).

Nella ricerca del cambiamento di variabili $z = \Phi(x)$ possiamo scegliere per le prime r nuove variabili le derivate della funzione di uscita h fino all' r -esima come visto prima

$$\begin{aligned} z_1 &= h(x) \\ z_2 &= L_f h \\ z_3 &= L_g L_f h \\ &\vdots \\ z_r &= L_g L_f^{(r-1)} h \end{aligned}$$

mentre per le rimanenti $n - r$ variabili possiamo utilizzare alcuni tra i *vecchi stati* purché il cambiamento $z = \Phi(x)$ sia ammissibile. La dinamica delle

prime r nuove variabili sarà

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= L_f h = z_2 \\ \dot{z}_2 &= L_g L_f h = z_3 \\ &\vdots \\ \dot{z}_{r-1} &= z_r \\ \dot{z}_r &= L_f^{(r)} h + L_g L_f^{(r-1)} h u \\ &= a(x) + b(x)u = \nu\end{aligned}$$

Per quanto riguarda le restanti $n-r$ variabili possiamo scrivere le seguenti espressioni generali:

$$\begin{aligned}\dot{z}_{r+1} &= q_{r+1}(z) + p_{r+1}(z)u \\ \dot{z}_{r+2} &= q_{r+2}(z) + p_{r+2}(z)u \\ &\vdots \\ \dot{z}_n &= q_n(z) + p_n(z)u\end{aligned}$$

Il sistema nelle sue nuove coordinate può essere pertanto scritto nella forma *normale*

$$\begin{cases} \dot{\xi} = A_0 \xi + b_0 \nu \\ \dot{\eta} = q(\xi, \eta) + p(\xi, \eta)u \\ y = \xi_1 = c_0 \xi \end{cases} \quad (5.4)$$

dove

$$\xi = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_r \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{r \times 1}; \quad \eta = \begin{bmatrix} z_{r+1} \\ z_{r+2} \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{n-r \times 1};$$

$$A_0 = \left[\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \vdots & & I & \\ 0 & & & \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right] \in \mathbf{R}^{r \times r}; \quad b_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{r \times 1};$$

$$c_0 = [1 \ 0 \ \dots \ 0] \in \mathbf{R}^{1 \times r};$$

con ingresso linearizzante u come prima pari a

$$u = -\frac{a(x)}{b(x)} + \frac{\nu}{b(x)} = \alpha(x) + \beta(x)\nu$$

Tuttavia avendo linearizzato solo parte del sistema occorre studiare il comportamento della dinamica interna, quella descritta dalle variabili η .

La loro evoluzione non influenza l'uscita (è non osservabile) ma potrebbe compromettere la stabilità interna del sistema.

Pertanto è necessario valutare quali stati iniziali ξ_0, η_0 e quali controlli u mantengono l'uscita a zero. Questo perché le evoluzioni a partire da tali stati con tali controlli rappresentano i modi della dinamica interna non osservabile $\dot{\eta}(t)$. Lo studio della dinamica interna $\dot{\eta}(t)$ prende così il nome di *zero dinamica* (infatti nel caso di sistema lineare è essa rappresentata dagli zeri del sistema).

5.1.4 Estensione al caso MIMO

Per semplicità studieremo sistemi quadrati, tante uscite quanti sono gli ingressi (m), cioè

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x)u_i \\ y_1 = h_1(x) \\ \vdots \\ y_m = h_m(x) \end{cases} \quad (5.5)$$

e analogamente al caso *SISO* procediamo con la derivazione delle funzioni di uscita $h_i(x)$ finché non appare almeno uno degli ingressi u_i :

$$\left\{ \begin{array}{ll} y_1 & = h_1(x) \\ \dot{y}_1 & = L_f h_1(x) \\ \vdots & \\ y_1^{(r_1)} & = L_f^{(r_1)} h_1(x) + L_{g_1} L_f^{(r_1-1)} h_1(x) u_1 + \dots + L_{g_m} L_f^{(r_1-1)} h_1(x) u_m \\ & \text{(dove almeno una delle } L_{g_i} L_f^{(r_1-1)} h_1(x) \neq 0) \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ y_m & = h_m(x) \\ \dot{y}_m & = L_f h_m(x) \\ \vdots & \\ y_m^{(r_m)} & = L_f^{(r_m)} h_m(x) + L_{g_1} L_f^{(r_m-1)} h_m(x) u_1 + \dots + L_{g_m} L_f^{(r_m-1)} h_m(x) u_m \\ & \text{(dove almeno una delle } L_{g_i} L_f^{(r_m-1)} h_m(x) \neq 0) \end{array} \right.$$

Raggruppando le ultime equazioni da ciascuna delle m catene in forma

matriciale

$$\begin{bmatrix} y_1^{(r_1)} \\ \vdots \\ y_m^{(r_m)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_f^{(r_1)} h_1(x) \\ \vdots \\ L_f^{(r_m)} h_m(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_{g_1} L_f^{(r_1-1)} h_1(x) & \dots & L_{g_m} L_f^{(r_1-1)} h_1(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ L_{g_1} L_f^{(r_m-1)} h_m(x) & \dots & L_{g_m} L_f^{(r_m-1)} h_m(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}$$

$$y = \Gamma(x) + E(x)u$$

Se la matrice $E(x)$ è invertibile in un intorno del punto di equilibrio $x = 0$ è definito un *grado relativo vettoriale*

$$\underline{r} = (r_1, \dots, r_m)^T$$

ed un *grado relativo totale* $r = \sum_{i=1}^m r_i$.

In questo modo è possibile trovare r variabili linearmente indipendenti ξ_i date dalle funzioni di uscita $h_i(x)$ e dalle loro derivate successive

$$\begin{array}{lll} \xi_1^1 = \xi_1 = h_1(x) & \xi_1^2 = \xi_{r_1+1} = h_2(x) & \dots \quad \xi_1^m = \xi_{r_1+\dots+r_{m-1}+1} = h_m(x) \\ \xi_2^1 = \xi_2 = L_f h_1 & \xi_2^2 = \xi_{r_1+2} = L_f h_2 & \dots \quad \xi_2^m = \xi_{r_1+\dots+r_{m-1}+2} = L_f h_m \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \xi_{r_1}^1 = \xi_{r_1} = L_f^{(r_1-1)} h_1 & \xi_{r_2}^2 = \xi_{r_1+r_2} = L_f^{(r_2-1)} h_2 & \dots \quad \xi_{r_m}^m = \xi_r = L_f^{(r_m-1)} h_m \end{array}$$

A questo punto possiamo scrivere per $i = 1, \dots, m$ i sistemi in forma normale come nel caso *SISO*. Per ciascuno dei canali i avremo una catena di

r_i integratori che legano il nuovo ingresso ν_i all'uscita y_i

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\xi}_1^i = \xi_2^i \\ \dot{\xi}_2^i = \xi_3^i \\ \vdots \\ \dot{\xi}_{r_i-1}^i = \xi_{r_i}^i \\ \dot{\xi}_{r_i}^i = \nu_i = a_i(\xi, \eta) + \sum_{j=1}^m b_{ij}(\xi, \eta)u_j \leftarrow \begin{cases} \text{righe di } \Gamma(x), E(x) \\ \text{(con } x = \Phi^{-1}(\xi, \eta)) \\ \text{in cui interviene} \\ \text{un ingresso } u_j \end{cases} \\ \\ \dot{\eta} = q(\xi, \eta) + \sum_{i=1}^m p_j(\xi, \eta)u_j \\ \\ y_1 = \xi_1^1 \\ y_2 = \xi_1^2 \\ \vdots \\ y_m = \xi_1^m \end{array} \right. \quad (5.6)$$

Come nel caso *SISO* se il grado relativo totale è pari alla dimensione dello spazio di stator $= r_1 + r_2 + \dots + r_m = n$ non esiste zero dinamica e possiamo *linearizzare esattamente* il sistema (5.5) attraverso il cambiamento di variabili $\xi = \Phi(x)$. A questo punto non rimane che cercare un vettore di m funzioni $\alpha_i(x)$

$$\alpha(x) = \begin{bmatrix} \alpha_1(x) \\ \vdots \\ \alpha_m(x) \end{bmatrix}$$

ed una matrice $\beta(x) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ di funzioni $\beta_{ii}(x)$

$$\beta(x) = \begin{bmatrix} \beta_{11}(x) & \dots & \beta_{1m}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \beta_{m1}(x) & \dots & \beta_{mm}(x) \end{bmatrix}$$

che definiscano la retroazione non lineare

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} = \alpha(x) + \beta(x)\nu$$

Per far questo imponiamo che il vettore ν dei nuovi riferimenti sia pari al vettore y delle derivate di ordine massimo su ciascun canale

$$\nu = \begin{bmatrix} y_1^{(r_1)} \\ \vdots \\ y_m^{(r_m)} \end{bmatrix} = y = \Gamma(x) + E(x)u$$

Ricavando l'ingresso u dalla relazione appena scritta otteniamo

$$u = -E^{-1}(x)\Gamma(x) + E^{-1}(x)\nu = \alpha(x) + \beta(x)\nu$$

con

$$\alpha(x) = -E^{-1}(x)\Gamma(x); \quad \beta(x) = E^{-1}(x);$$

da cui si ritrova la condizione SISO di invertibilità di $\beta(x)$ (in un intorno dell'origine, $x = 0$).

In definitiva nelle nuove coordinate il sistema sarà

$$\begin{cases} \dot{\xi} = A\xi + B\nu \\ y_1 = h_1(x) = \xi_1 \\ y_2 = h_2(x) = \xi_{r_1+1} \\ y_3 = h_3(x) = \xi_{r_1+r_2+1} \\ \vdots \\ y_m = h_m(x) = \xi_{r_1+\dots+r_{m-1}+1} \end{cases}$$

dove

$$\xi = [\xi_1, \dots, \xi_{r_1}, \xi_{r_1+1}, \dots, \xi_{r_1+r_2}, \dots, \xi_{r_1+\dots+r_{m-1}+1}, \dots, \xi_{r=n}]^T \in \mathbf{R}^{1 \times n};$$

$$A = \text{diag}(A_1, \dots, A_m) \quad A_i \in \mathbf{R}^{r_i \times r_i};$$

$$B = \text{diag}(b_1, \dots, b_m) \quad b_i \in \mathbf{R}^{r_i \times 1};$$

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad b_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix};$$

I legami tra gli ingressi u_i e le uscite y_i sono delle catene di integratori così fatte

$$\frac{d^{r_i} y}{dt^{r_i}} = \frac{d^{r_i} \xi_{r_1+\dots+r_{i-1}+1}}{dt^{r_i}} = \dot{\xi}_{r_1+\dots+r_i} = \nu_i; \quad i = 1, \dots, m$$

Pertanto con opportune retroazioni del tipo $\nu_i = k_i \xi$ su ciascuno degli m canali (k_i vettore riga) possiamo controllare agevolmente le variabili ξ_i posizionando i poli come desideriamo.

Se invece $r < n$ avremo una *zero dinamica* di dimensione $n - r$ (vedi sistema (5.6)) e possiamo procedere con una *linearizzazione parziale*. Analogamente al caso *SISO* per coprire l'intero spazio di stato occorrono altre $n - r$ funzioni η_i tali che il cambiamento di variabili $z = (\xi, \eta) = \Phi(x)$ sia ammissibile

$$\eta_1(x), \dots, \eta_{n-r}(x)$$

con comparsa della zero dinamica.

5.1.5 Linearizzazione in retroazione dinamica

La tecnica descritta finora viene chiamata *linearizzazione in retroazione statica* per distinguerla dalla *linearizzazione in retroazione dinamica*. Quest'ultima rappresenta un modo per ottenere un grado relativo quando questo non è definito ($b(x) = 0$ nel caso *SISO* oppure matrice $E(x)$ non invertibile nel caso *MIMO*) per poter così procedere con l'algoritmo descritto nei paragrafi precedenti.

Con questo metodo è spesso possibile linearizzare completamente il sistema non lineare e non avere alcuna *zero dinamica* da studiare. Il prezzo da pagare però è costituito da un allargamento dello spazio di stato con una conseguente complicazione dei calcoli.

L'idea alla base di questa tecnica consiste nell'introdurre un ritardo su uno degli ingressi del sistema in modo da poter proseguire con il calcolo delle derivate successive delle funzioni di uscita h ed ottenere pertanto l'uguaglianza tra grado relativo e dimensione dello spazio di stato la cui dimensione però è aumentata del numero di ritardi inseriti sugli ingressi reali del sistema. Nel capitolo successivo sarà fornito un esempio concreto di applicazione di tale tecnica.

5.2 Uniciclo

Nel seguente paragrafo verrà affrontato il problema del controllo del modello cinematico dell'uniciclo utilizzando la tecnica della *linearizzazione in*

retroazione. Mediante tale tecnica verranno proposte alcune soluzioni per i classici problemi del controllo di veicoli: *path following*, *trajectory tracking*.

5.2.1 Path Following

Nel Path Following si cerca di far stabilizzare il veicolo unicycle su un luogo geometrico ben definito. Tale luogo è descritto da una precisa equazione; la completa conoscenza dello stato q dell'unicycle (posizione nel piano ed orientazione) è data per nota.

Il modello cinematico dell'unicycle è il seguente (vedi figura 5.2.1):

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^2 g_i(q)u_i = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \omega \quad (5.7)$$

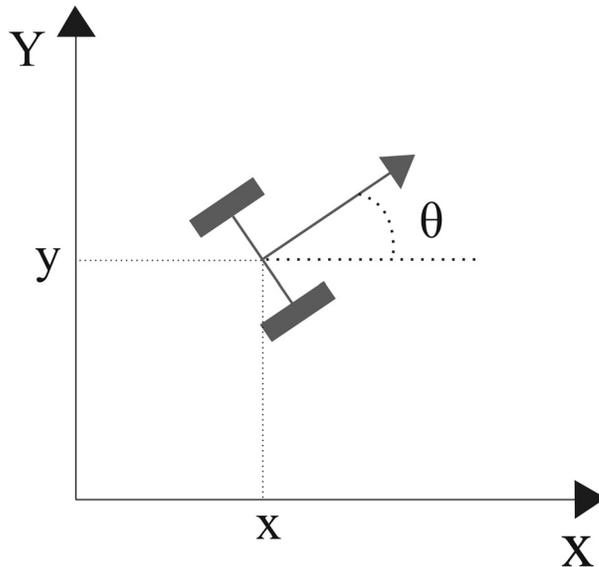


Figura 5.1: L'Unicycle nel piano.

Poiché non è importante sapere *quando* il veicolo si posizionerà sul luogo geometrico desiderato ma solo *se* lo farà, l'ingresso v , che indica la velocità di avanzamento dell'unicycle, viene considerato costante. Rimane pertanto un solo ingresso a disposizione, ω , la velocità angolare dell'unicycle. Ciò è messo in risalto dall'equazione (5.8) in cui v viene trattato come un parametro costante del sistema divenendo vettore di *deriva* $f(q)$ e $u = \omega$ rappresenta l'unico ingresso.

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta v \\ \sin \theta v \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \omega = f(q) + g(q)u \quad (5.8)$$

Stabilizzazione dell'uniciclo sull'asse x

Supponendo di voler stabilizzare il veicolo in esame sull'asse x , sarà sufficiente controllare a zero la variabile di stato y e l'orientazione θ . Possiamo immaginare di avere come funzione di uscita pertanto $h(q) = y$. Il sistema visto in questo modo diventa *SISO* ma rimane il problema dell'altra variabile di stato, θ . Affinché l'uniciclo si mantenga sull'asse x con velocità costante v occorre infatti che anche θ sia nullo. Tramite la linearizzazione in retroazione è possibile mostrare come questo problema sia risolvibile.

Come abbiamo visto nel paragrafo 5.1.1, occorre trovare un cambiamento di coordinate $\Phi(q)$ che linearizzi il sistema non lineare, rendendo applicabili a quel punto i tradizionali metodi del controllo lineare.

Come primo passo occorre controllare il *grado relativo* r del sistema. Derivando $h(q)$ una prima volta si ottiene

$$\dot{y} = \sin \theta v$$

e poiché v non rappresenta piú un ingresso si deve derivare una seconda volta giungendo cosí all'espressione

$$\ddot{y} = \cos \theta v \omega = \nu$$

dove questa volta compare l'unico ingresso a nostra disposizione, ω . A questo punto imponiamo che questa quantità sia pari a ν , inteso come nuovo ingresso per il sistema nelle nuove coordinate.

Con questa scelta fatta per la $h(q)$ il grado relativo è minore del numero degli stati del sistema ($r = 2$, $n = 3$, $r < n$), dunque non è possibile ottenere una linearizzazione in retroazione completa. In questi casi si procede realizzando una *linearizzazione input-output o parziale* con la conseguente presenza di una *zero dinamica*.

Per definire il cambiamento di coordinate $\Phi(q)$ di dimensioni pari allo spazio di stato si scelgono per le prime r variabili $h(q)$ e le sue derivate fino alla $(r - 1)$ -esima. Le rimanenti $n - r$ sono i *vecchi stati* in modo che tale cambiamento di coordinate sia ammissibile, ovvero $\det[\frac{d\Phi(q)}{dq}] \neq 0$.

Le equazioni che regolano il comportamento di queste $n - r$ variabili vanno sotto il nome di *zero dinamica* e solo se quest'ultima è asintoticamente stabile possiamo stabilizzare l'uniciclo sulla retta.

Nel caso specifico dell'uniciclo il cambiamento di coordinate nello spazio di stato risulta pertanto:

$$\Phi(q) = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ \sin \theta v \\ x \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

Nell'equazione (5.9) sono state introdotte le variabili ξ_i e la variabile η ; la prime due si riferiscono alla parte *linearizzata* del sistema, mentre η rappresenta la variabile non controllabile dell'uniciclo appartenente alla *zero dinamica*. Utilizzando la notazione matriciale abbiamo la nuova dinamica per l'uniciclo nelle nuove coordinate

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 = \nu \\ \dot{\eta} = \cos \theta v \end{cases} \quad (5.10)$$

L'ingresso *linearizzante* ω risulta quindi

$$\omega = \frac{\nu}{\cos \theta v} \quad (5.11)$$

(si noti come ω non sia definito se $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$).

La linearizzazione in retroazione si concretizza ponendo $\nu = k\xi$ ovvero retroazionando il nuovo stato ξ sul nuovo ingresso una volta moltiplicato per degli opportuni coefficienti raccolti nel vettore k :

$$\nu = k\xi = \begin{bmatrix} -k_0 & -k_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = -k_0\xi_1 - k_1\xi_2 \quad (5.12)$$

Questi k_i non sono altro che i coefficienti del polinomio che stabilizza la variabile di stato $y = \xi_1$, infatti sapendo che $\nu = \dot{\xi}_2 = \ddot{\xi}_1$ abbiamo

$$\nu = \ddot{\xi}_1 = -k_0\xi_1 - k_1\dot{\xi}_1 \quad \longrightarrow \quad \ddot{\xi}_1 + k_1\dot{\xi}_1 + k_0\xi_1 = 0$$

È stato quindi effettuato un semplice posizionamento dei poli in modo che il polinomio in questione sia *Hurwitz* (con radici α_i a parte reale negativa, $\mathbf{Re}\{\alpha_i\} < 0$). Così facendo si è sicuri che y si annulli; resta da studiare il comportamento della *zero dinamica*. Per far ciò dobbiamo individuare quali stati iniziali (ξ_0, η_0) e quali controlli lasciano l'uscita a zero, poiché le evoluzioni a partire da questi stati iniziali con tali controlli rappresentano i modi della parte non accessibile.

Nel nostro caso si ha:

$$y = \xi_1 = 0 \implies \xi_2 = \dot{\xi}_1 = \sin \theta v = 0 \implies \theta = 0, \pi \quad \forall \theta \in [0, 2\pi]$$

Per avere uscita nulla ($y = 0$) θ dev'essere zero o π il che vuol dire che siamo nella situazione di orientazione corretta per il veicolo. Spostandoci sull'evoluzione della *zero dinamica* in queste condizioni abbiamo

$$\dot{\eta} = \begin{cases} +v & \theta = 0 \\ -v & \theta = \pi \end{cases} \quad (5.13)$$

cioè l'uniciclo si muove con velocità costante v nella direzione con le x crescenti o decrescenti a seconda delle condizioni iniziali.

Risultati delle simulazioni

Partendo dal punto iniziale q_0 di coordinate $[2, 2, \pi/3]^T$, scegliendo $k_0 = 6$, $k_1 = 5$ (i poli quindi sono reali) ed utilizzando il modello Simulink di figura 5.2 sono stati ottenuti i risultati mostrati nei grafici della figura 5.3.

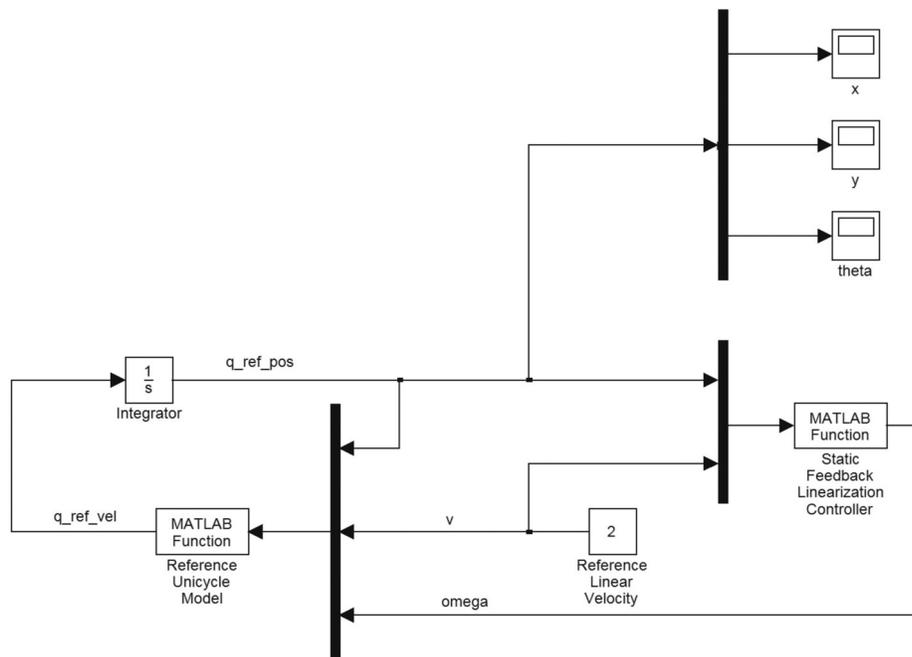


Figura 5.2: Modello Simulink per il problema del Path Following (sull'asse x) per un uniciclo

Scegliendo invece un punto iniziale più distante dal luogo geometrico desiderato (l'asse x in questo caso) ad esempio $q_0 = [5, 20, \pi/4]^T$ lasciando invariati k_0, k_1 otterremo andamenti diversi.

Dai grafici sottostanti di figura 5.4 è possibile notare infatti come le variabili di stato abbiano un comportamento *instabile* fin tanto che l'uniciclo si trova lontano dall'asse x ; una volta giunto nei pressi del luogo prefissato l'andamento delle variabili riprende il suo corso normale come nel caso precedente.

Ciò è dovuto alla natura *proporzionale* del controllo utilizzato e al passo d'integrazione (durante la verifica del modello nelle simulazioni) di `Simulink`.

Stabilizzazione dell'uniciclo su retta generica

Se invece di stabilizzare l'uniciclo sull'asse x identificato dall'equazione $y = 0$ volessimo portare l'uniciclo su una retta generica di pendenza α e offset b di equazione $y = x \tan \alpha + b$, una soluzione possibile è l'applicazione di una *roto-traslazione* $\Psi(q)$ al sistema di partenza tale da far coincidere la retta generica con il nuovo asse delle ascisse x . Così facendo non faremmo altro che ricadere nel caso precedentemente studiato.

Più precisamente si tratta di applicare il cambiamento di coordinate $\bar{q} = \Psi(q)$ definito da

$$\bar{q} = \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{\theta} \end{bmatrix} = \Psi(q) = \begin{bmatrix} x \cos \alpha + y \sin \alpha - b \sin \alpha \\ -x \sin \alpha + y \cos \alpha - b \cos \alpha \\ \theta - \alpha \end{bmatrix}$$

che ha come cambiamento di coordinate inverso

$$q = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \end{bmatrix} = \Psi^{-1}(\bar{q}) = \begin{bmatrix} \bar{x} \cos \alpha - \bar{y} \sin \alpha \\ \bar{x} \sin \alpha + \bar{y} \cos \alpha + b \\ \bar{\theta} + \alpha \end{bmatrix}$$

Questo cambiamento è un diffeomorfismo globale, cioè è invertibile e regolare con jacobiano a rango pieno su tutto lo spazio di stato.

Nelle nuove coordinate il modello cinematico dell'uniciclo risulterà:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{q}} &= \frac{\partial \Psi(q)}{\partial q} \dot{q} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u = \\ &= \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \theta + \sin \alpha \sin \theta & 0 \\ \sin \theta \cos \alpha - \sin \alpha \cos \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u = \begin{bmatrix} \cos(\theta - \alpha) & 0 \\ \sin(\theta - \alpha) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u = \begin{bmatrix} \cos \bar{\theta} & 0 \\ \sin \bar{\theta} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u \end{aligned}$$

dove $u = [v \ \omega]^T$ è il vettore degli ingressi.

Il nuovo modello risulta in tutto e per tutto uguale a quello studiato per la stabilizzazione sull'asse x ; possiamo pertanto applicare la stessa legge di controllo trovata prima e successivamente applicando la trasformazione inversa $\Psi^{-1}(\bar{q})$ ottenere lo scopo prefissato.

Stabilizzazione dell'uniciclo su una circonferenza

In questo nuovo caso il luogo geometrico sul quale vogliamo stabilizzare l'uniciclo è una circonferenza di raggio R .

Senza perdere di generalità ci ridurremo al caso di circonferenza attorno all'origine; una circonferenza di centro diverso può essere ricondotta a questa mediante una semplice traslazione della terna di riferimento.

In questa situazione occorre ricordare di come le due coordinate x e y siano legate tra loro dalla relazione $x^2 + y^2 = R^2$ ed inoltre l'orientazione del veicolo stesso nel suo moto lungo la circonferenza non può essere qualsiasi bensì $\theta = \arctan(y/x)$.

Analogamente al caso di stabilizzazione su retta generica conviene introdurre un cambiamento di coordinate $\Psi(q)$ opportuno; in questo caso basterà passare dalle coordinate cartesiane di partenza a quelle cilindriche:

$$\bar{q} = \begin{bmatrix} \rho \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \Psi(q) = \begin{bmatrix} \sqrt{x^2 + y^2} \\ \arctan(\frac{y}{x}) - \theta + \frac{\pi}{2} \\ \arctan(\frac{y}{x}) \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

con cambiamento di coordinate inverso

$$q = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \end{bmatrix} = \Psi^{-1}(\bar{q}) = \begin{bmatrix} \rho \cos \beta \\ \rho \sin \beta \\ \beta - \alpha + \frac{\pi}{2} \end{bmatrix}$$

dove ρ indica la distanza del punto di mezzo dell'interasse dell'uniciclo dall'origine, α è lo scostamento dell'orientazione del veicolo rispetto alla tangente alla circonferenza in quel punto e β è una terza coordinata indipendente dalle altre due.

Da notare come il diffeomorfismo $\Psi(\bar{q})$ non sia globale perché non definito nell'origine ($\rho = 0$). Tuttavia ciò non costituisce un problema purché non si intersechi tale punto.

Il modello dell'uniciclo nel nuovo sistema di coordinate risulta

$$\dot{\bar{q}} = \begin{bmatrix} \dot{\rho} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \sin \alpha \\ \frac{v}{\rho} \cos \alpha \\ \frac{v}{\rho} \cos \alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \omega = \begin{bmatrix} \hat{v} \rho \sin \alpha \\ \hat{v} \cos \alpha \\ \hat{v} \cos \alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \omega =$$

$$= f(\bar{q}) + g(\bar{q})u$$

dove per comodità si è posto $v = \rho\hat{v}$. Ciò è possibile a patto di rimanere distanti dall'origine dove sappiamo non essere definito il diffeomorfismo $\Psi(\bar{q})$.

Si noti come prima v e poi \hat{v} siano nel vettore di deriva $f(\bar{q})$ avendo considerato come nel caso precedente la velocità di avanzamento del veicolo costante, rendendola di fatto un parametro del modello stesso. Adesso non resta che applicare la linearizzazione in retroazione.

Il luogo geometrico dei punti sul quale vorremmo stabilizzare l'uniciclo è individuato da $\rho = R$ e $\alpha = 0$, pertanto dovendo cercare una funzione di uscita $h(\bar{q})$ una possibile scelta potrebbe essere $h(\bar{q}) = \rho - R$.

Procedendo con le derivazioni successive troviamo:

$$\begin{cases} h(\bar{q}) &= \rho - R = \xi_1 \\ \dot{h}(\bar{q}) &= \hat{v}\rho \sin \alpha = \xi_2 = \dot{\xi}_1 \\ \ddot{h}(\bar{q}) &= \hat{v}\dot{\rho} \sin \alpha + \hat{v}\rho\dot{\alpha} \cos \alpha = \\ &= \hat{v}^2 \rho \sin^2 \alpha + \hat{v}\rho \cos \alpha (\hat{v} \cos \alpha - \omega) = \\ &= \hat{v}^2 \rho - \hat{v}\rho \cos \alpha \omega = \nu \end{cases}$$

dove si è indicato con ν il nuovo ingresso. Come nel caso precedente la linearizzazione non è completa in quanto il grado relativo è $r = 2$, quindi per avere un cambiamento di coordinate $\Phi(\bar{q})$ di dimensione 3 occorre definire una terza coordinata η . Una scelta possibile è $\eta = \beta$.

In definitiva abbiamo

$$\Phi(\bar{q}) = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho - R \\ \hat{v}\rho \sin \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

(cambiamento di variabili ammissibile) che produce questa nuova dinamica per l'uniciclo:

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 &= \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 &= \nu \\ \dot{\eta} &= \hat{v} \cos \alpha \end{cases}$$

con retroazione linearizzante

$$\omega = \frac{\hat{v}}{\cos \alpha} - \frac{\nu}{\hat{v}\rho \cos \alpha}$$

da cui si nota come la spesa sul controllo ω aumenti quando $\alpha \rightarrow \pm \frac{\pi}{2}$ mentre quando $\alpha = \pm \frac{\pi}{2} \quad \forall \alpha \in [0, 2\pi]$ ω stesso non sia definito.

Non resta che applicare la linearizzazione in retroazione costruendo il polinomio che stabilizza la variabile ξ_1 :

$$\nu = k\xi = \begin{bmatrix} -k_0 & -k_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = -k_0\xi_1 - k_1\xi_2$$

e siccome $\nu = \dot{\xi}_2 = \ddot{\xi}_1$ e $\xi_2 = \dot{\xi}_1$ si ha

$$\nu = \ddot{\xi}_1 = -k_0\xi_1 - k_1\dot{\xi}_1 \quad \longrightarrow \quad \ddot{\xi}_1 + k_1\dot{\xi}_1 + k_0\xi_1 = 0$$

Abbiamo il solito polinomio di secondo grado ed in base alla scelta dei coefficienti k_0 e k_1 possiamo determinare l'andamento della variabile ξ_1 (poli reali o complessi).

Occupiamoci ora dello studio della variabile η . Quando $\xi_1 = h(\bar{q}) = \rho - R = 0$ allora $\rho = R$ e ci troviamo esattamente dove dovremmo essere, ad una distanza R dall'origine del sistema. Di conseguenza per la variabile ξ_2 si ha

$$\xi_1 = 0 \Rightarrow \dot{\xi}_1 = 0 \Rightarrow \xi_2 = \dot{\xi}_1 = \hat{v}R \sin \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0, \pi \quad \forall \alpha \in [0, 2\pi]$$

Per ottenere un'uscita nulla ($h(\bar{q}) = 0$) $\rho = R$ e $\alpha = 0, \pi$ l'uniciclo si deve muovere su una circonferenza di raggio R percorrendola in modo orario ($\alpha = \pi$) o antiorario ($\alpha = 0$) con velocità ω . Infatti considerando che il modulo della velocità di avanzamento $|\hat{v}|$ è costante, si ha

$$\dot{\eta} = \dot{\beta} = \hat{v} \cos \alpha = \begin{cases} \frac{v}{R} & \alpha = 0 \\ -\frac{v}{R} & \alpha = \pi \end{cases}$$

↓

$$\beta = \pm \frac{vt}{R} = \pm \omega t$$

in virtù della relazione $\omega = \frac{v}{R}$ valida in caso di moto circolare uniforme (a regime $\rho \rightarrow R$ e quindi $\frac{v}{\rho} = \frac{v}{R}$).

L'uniciclo pertanto si muove sul luogo geometrico desiderato.

Risultati delle simulazioni

Una volta costruito in ambiente `Matlab` il modello `Simulink` di figura 5.5 si è proceduto con la verifica di alcune simulazioni ottenendo risultati analoghi al caso di stabilizzazione sull'asse x .

Infatti partendo dal punto iniziale $\bar{q}_0 = [\rho_0, \alpha_0, \beta_0]^T = [30, \pi/6, \pi/8]^T$, vicino alla circonferenza di raggio $R = 40$ di interesse con velocità di avanzamento $v = 2$ e coefficienti $k_0 = 2$ e $k_1 = 10$ (ovvero poli reali), abbiamo un andamento accettabile da parte delle variabili di stato e della variabile di controllo ω (vedi figura 5.6). In particolare si può vedere che la variabile ω si stabilizza proprio sul rapporto $\frac{v}{R} = 0.05$.

Anche in questo caso si possono avere problemi di simulazione qualora si parta da troppo lontano (ad esempio si veda la figura 5.7).

5.2.2 Trajectory Tracking

Formulazione del problema

L'obiettivo nel problema del trajectory tracking è inseguire una traiettoria variabile nel tempo. Ciò può essere modellato con un uniciclo che ne inseguire un altro (che chiameremo uniciclo di riferimento).

Affinché l'inseguimento abbia esito positivo cercheremo di annullare l'errore di posizione

$$e = \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - x_r \\ y - y_r \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

dove con x_r e y_r indichiamo la posizione dell'uniciclo di riferimento e con x e y la posizione di quello che inseguire.

La natura del problema è dunque *quadrata* in quanto abbiamo a disposizione due ingressi (v e ω) e vorremmo annullare i due errori di posizione e_x e e_y . Con questa definizione di errore è naturale scegliere come funzioni di uscita per l'uniciclo inseguitore (quello che controlleremo)

$$h_1(q) = x; \quad h_2(q) = y;$$

Siamo pertanto nel caso *MIMO*; il passo successivo consiste nel calcolare il grado relativo tramite la derivazione ripetuta delle h_i fino alla comparsa di uno dei due ingressi:

$$\begin{cases} z_1 = h_1(q) = x \\ \dot{z}_1 = \cos \theta v \end{cases} \quad \begin{cases} z_2 = h_2(q) = y \\ \dot{z}_2 = \sin \theta v \end{cases}$$

Apparentemente il grado relativo totale sembrerebbe essere $r = 1 + 1 = 2$; in realtà non è definito perché controllando la matrice $E(q)$

$$\nu = \begin{bmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 \end{bmatrix}}_{E(q)} \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} = E(q)u$$

si nota che è *singolare*.

Si osservi come in quest'ultima equazione non sia presente il vettore colonna che nel capitolo 5.1.1 avevamo indicato con $\Gamma(x)$. Ciò è spiegabile con l'assenza del vettore di deriva $f(q)$ nel modello cinematico dell'uniciclo (*sistema driftless*) e quindi delle derivate successive $L_f^{(r_i)} h_i(x)$.

Non resta a questo punto che applicare la tecnica della linearizzazione in retroazione *dinamica*. Per poter continuare nelle derivazioni successive inseriamo un ritardo sull'ingresso v , $\dot{v} = \mu$, dove μ è il nuovo ingresso. Lo stato adesso diventa pertanto $[x \ y \ \theta \ v]^T$.

In conseguenza di questo il modello dell'uniciclo *modificato* è

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta v \\ \sin \theta v \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mu + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \omega \quad (5.16)$$

Procedendo con le derivazioni delle funzioni di uscita (v non è più un ingresso adesso)

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = x \\ \ddot{\xi}_1 = \cos \theta v \\ \ddot{\xi}_1 = \cos \theta \dot{v} - \sin \theta v \dot{\theta} \\ \quad = \cos \theta \mu - \sin \theta v \omega \end{cases} \quad \begin{cases} \xi_3 = y \\ \dot{\xi}_3 = \sin \theta v \\ \ddot{\xi}_3 = \sin \theta \dot{v} + \cos \theta v \dot{\theta} \\ \quad = \sin \theta \mu + \cos \theta v \omega \end{cases}$$

e raggruppando il tutto si ottiene

$$\nu = \begin{bmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{\xi}_1 \\ \ddot{\xi}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta v \\ \sin \theta & \cos \theta v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ \omega \end{bmatrix} = E(q)u$$

con $v \neq 0$ la matrice $E(q)$ è *non singolare*, il grado relativo è definito e risulta $r = 2 + 2 = 4 = 3 + 1 = n$. Possiamo procedere con la linearizzazione *esatta*.

Il cambiamento di coordinate

$$\xi = \Phi(q) = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ \cos \theta v \\ y \\ \sin \theta v \end{bmatrix}$$

è ammissibile (con $v \neq 0$) e la retroazione linearizzante è

$$u = E^{-1}(q)\nu = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta/v & \cos \theta/v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu \\ \omega \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

Non rimane che costruire le retroazioni dei nuovi stati ξ_i sui nuovi ingressi ν_i e posizionare i poli a nostro piacimento in modo da annullare l'errore e definito dall'equazione (5.15). In definitiva possiamo scrivere:

$$\begin{aligned}
\nu_1 &= \ddot{\xi}_1 = \ddot{x}_r + \lambda_1 \dot{x}_r + \lambda_0 x_r + \lambda \xi = \\
&= \ddot{x}_r + \lambda_1 \dot{x}_r + \lambda_0 x_r + \underbrace{\begin{bmatrix} -\lambda_0 & -\lambda_1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\lambda} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{bmatrix} = \\
&= \ddot{x}_r + \lambda_1 \dot{x}_r + \lambda_0 x_r - \lambda_0 \xi_1 - \lambda_1 \xi_2 = \\
&= \ddot{x}_r - \lambda_1 (\dot{\xi}_1 - \dot{x}_r) - \lambda_0 (\xi_1 - x_r)
\end{aligned}$$

↓

$$\underbrace{(\ddot{\xi}_1 - \ddot{x}_r)}_{\ddot{e}_x} + \lambda_1 \underbrace{(\dot{\xi}_1 - \dot{x}_r)}_{\dot{e}_x} + \lambda_0 \underbrace{(\xi_1 - x_r)}_{e_x} = 0 \quad (5.18)$$

(dove si suppone di conoscere \dot{x}_r e \ddot{x}_r , rispettivamente velocità e accelerazione dell'uniciclo di riferimento lungo l'asse x) quindi scegliendo opportunamente i coefficienti λ_0 e λ_1 possiamo annullare l'errore e_x . Analogamente per e_y scriviamo:

$$\begin{aligned}
\nu_2 &= \ddot{\xi}_3 = \ddot{y}_r + \gamma_1 \dot{y}_r + \gamma_0 y_r + \gamma \xi = \\
&= \ddot{y}_r + \gamma_1 \dot{y}_r + \gamma_0 y_r + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & -\gamma_0 & -\gamma_1 \end{bmatrix}}_{\gamma} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{bmatrix} = \\
&= \ddot{y}_r + \gamma_1 \dot{y}_r + \gamma_0 y_r - \gamma_0 \xi_3 - \gamma_1 \xi_4 = \\
&= \ddot{y}_r - \gamma_1 (\dot{\xi}_3 - \dot{y}_r) - \gamma_0 (\xi_3 - y_r)
\end{aligned}$$

↓

$$\underbrace{(\ddot{\xi}_3 - \ddot{y}_r)}_{\ddot{e}_y} + \gamma_1 \underbrace{(\dot{\xi}_3 - \dot{y}_r)}_{\dot{e}_y} + \gamma_0 \underbrace{(\xi_3 - y_r)}_{e_y} = 0 \quad (5.19)$$

I polinomi sono del secondo ordine pertanto in base ai coefficienti scelti possiamo avere due poli reali oppure complessi coniugati ottenendo andamenti diversi per e_x e e_y .

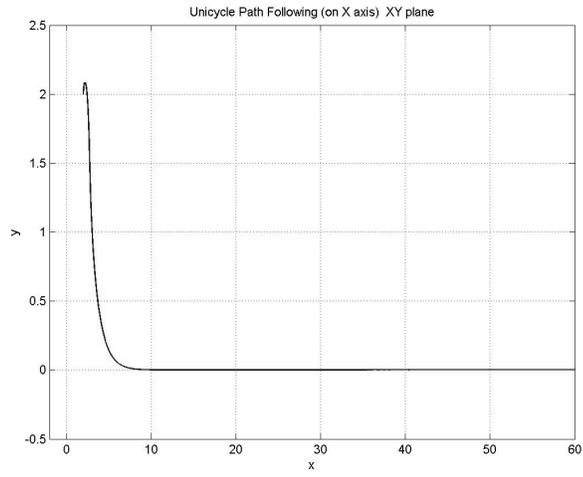
Risultati delle simulazioni

La verifica simulativa è stata eseguita costruendo i modelli `Simulink` di figura 5.8 ((a) per l'anello di controllo e (b) per l'uniciclo di riferimento) e successivamente testandoli con diverse traiettorie da inseguire.

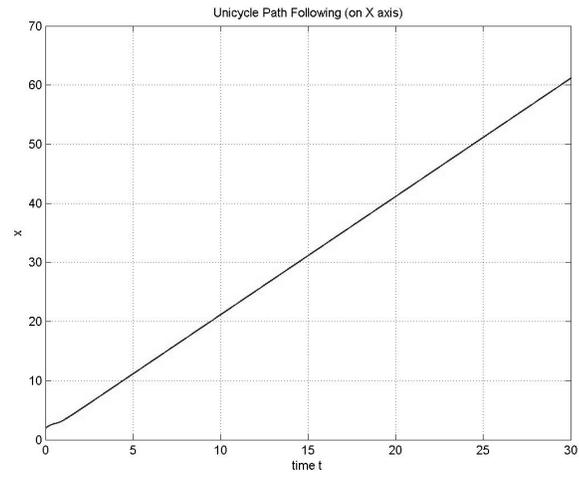
Partendo dai punti $P_1 = [4, 4, \pi/8]^T$ per l'uniciclo di riferimento (*reference*) e $P_2 = [10, 8, \pi/3, 0.5]^T$ per quello inseguitore (*tracker*) con $\lambda_0 = \gamma_0 = 13$ e $\lambda_1 = \gamma_1 = 4$ (cioè poli complessi coniugati), è stato considerato per primo il caso di ingressi costanti per quest'ultimo, ovvero $v_{ref} = 4$ m/sec e $\omega_{ref} = 1$ rad/sec. La traiettoria sulla quale si posiziona pertanto il veicolo da inseguire è una circonferenza.

In figura 5.9 sono mostrati gli andamenti nel tempo degli errori per ciascuna variabile di stato e la traiettoria descritta dai due unicicli nel piano XY .

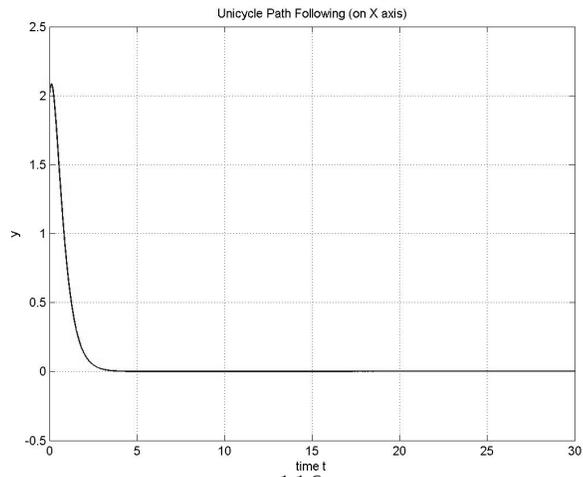
Scegliendo gli stessi punti di partenza P_1 e P_2 ma cambiando la tipologia di ingressi per l'uniciclo di riferimento otteniamo i due grafici di figura 5.10 che ci mostrano l'andamento nel piano XY dei due veicoli. Nel primo (a) v_r è scelta come prima costante ($v_r = 4$) mentre $\omega_r = 10 \sin 2t$; nel secondo (b) entrambe le velocità di riferimento, angolare e lineare, sono sinusoidali.



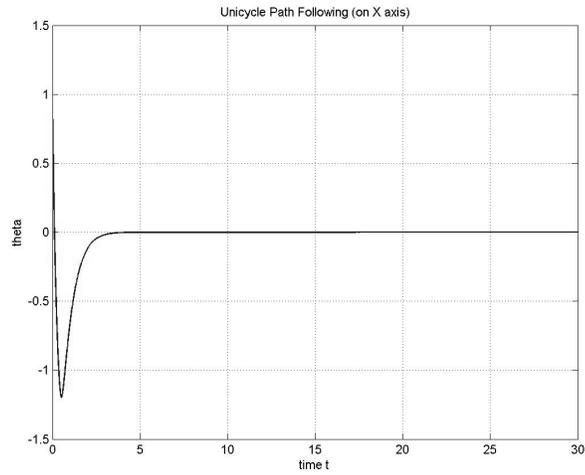
(a)



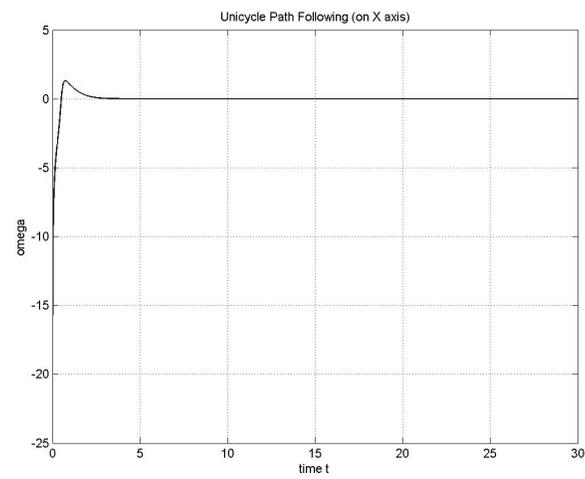
(b)



116
(c)

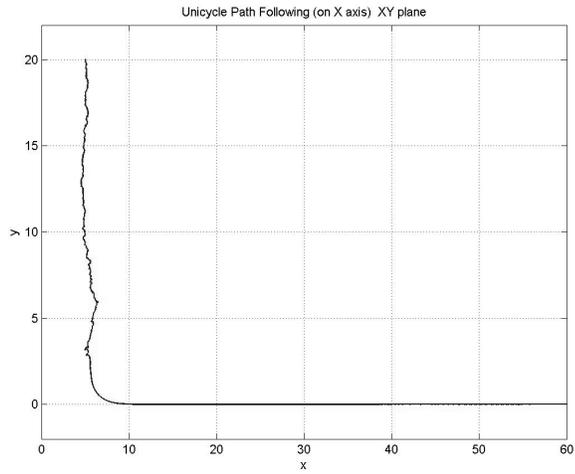


(d)

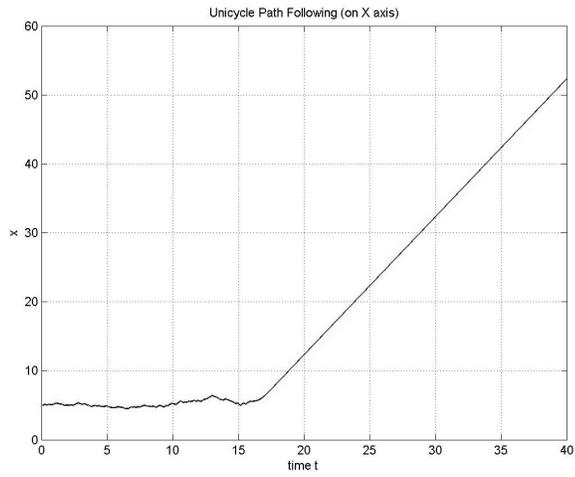


(e)

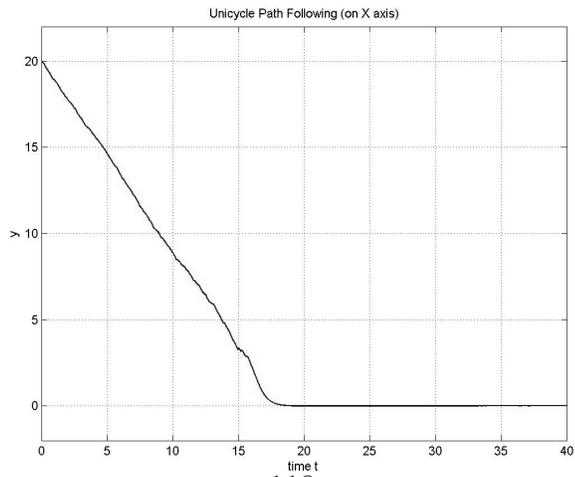
Figura 5.3: Andamento dell'uniciclo nel piano XY (a) e delle variabili x (b), y (c), θ (d) e ω (e) nel tempo.



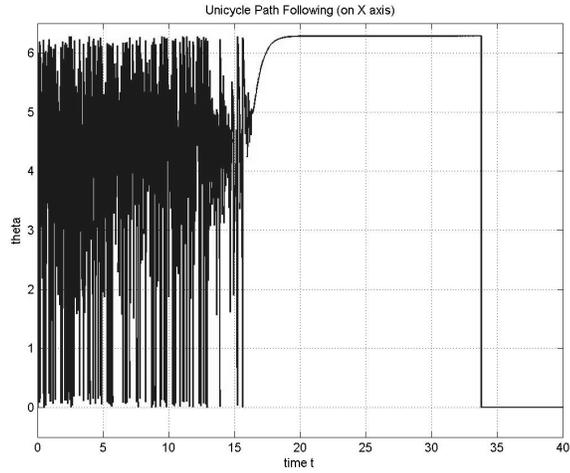
(a)



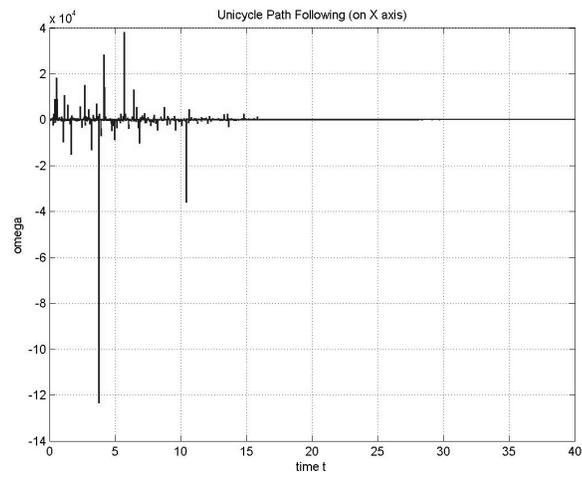
(b)



(c)



(d)



(e)

Figura 5.4: Andamento dell'uniciclo nel piano XY (a) e delle variabili x (b), y (c), θ (d) e ω (e) nel tempo nel caso di punto iniziale *distante*.

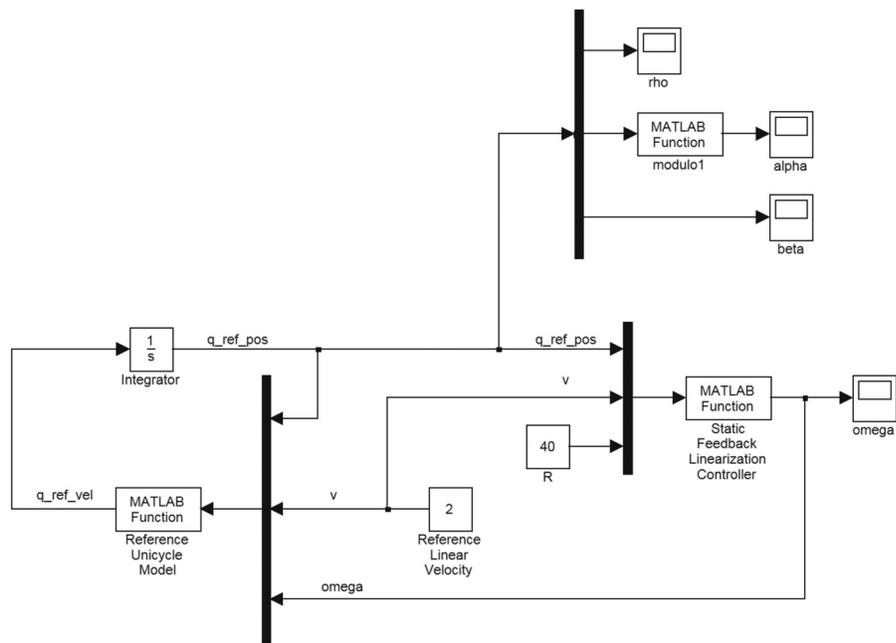
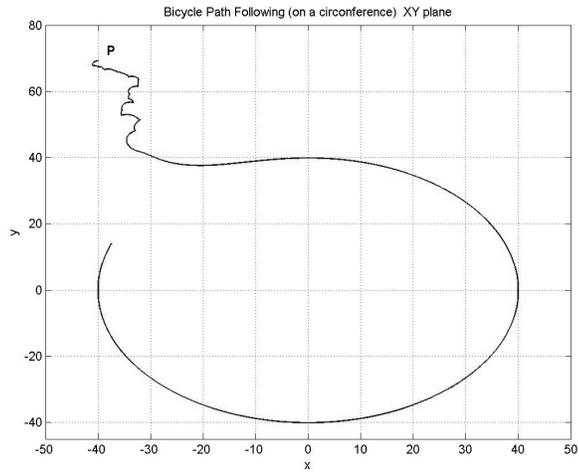
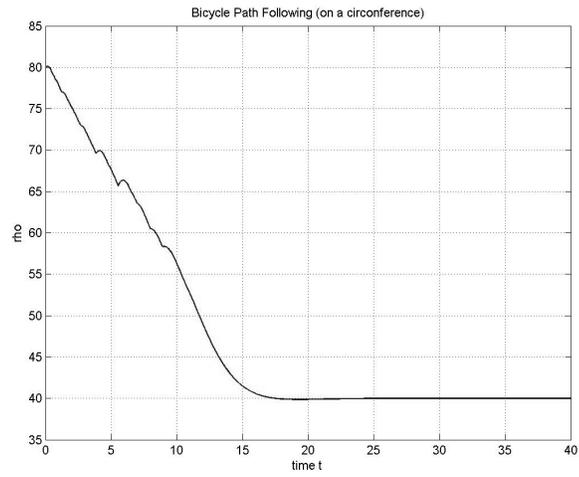


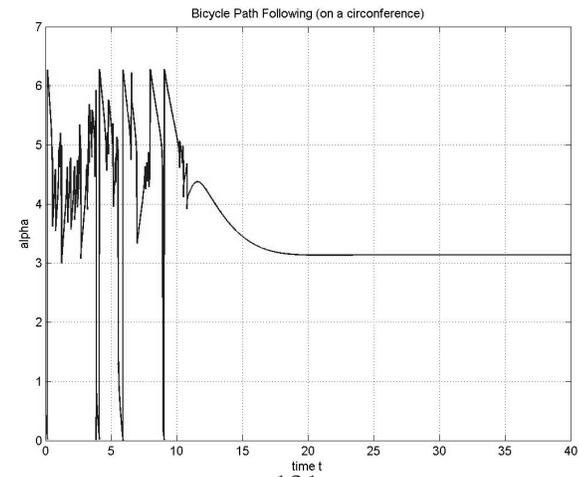
Figura 5.5: Modello Simulink per il problema del Path Following (su una circonferenza) per un unicycle



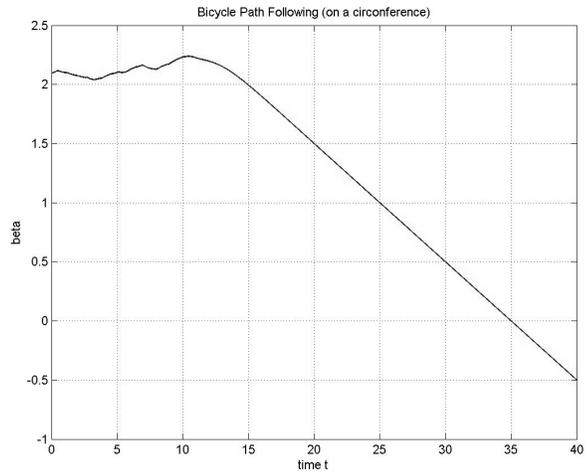
(a)



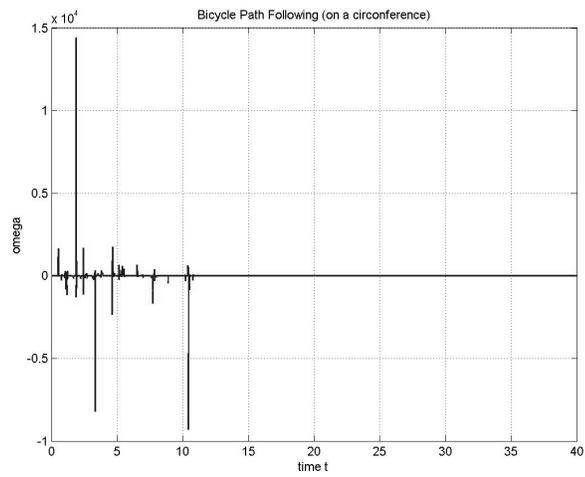
(b)



(c)

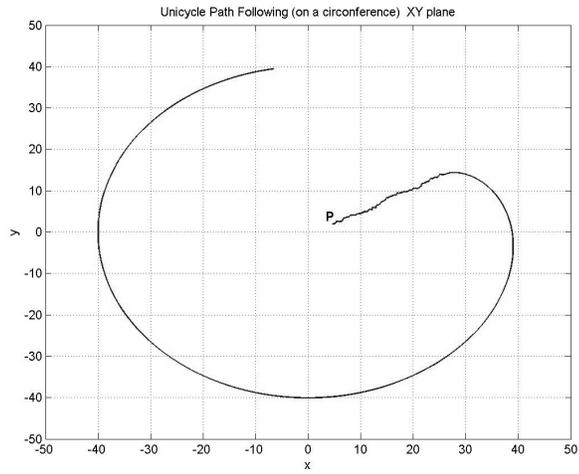


(d)

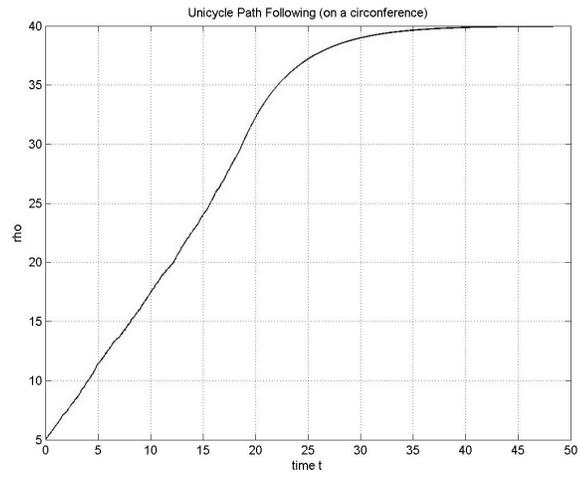


(e)

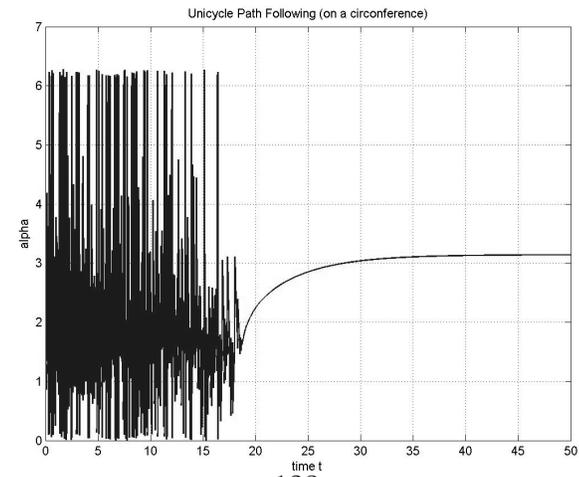
Figura 5.6: Andamento dell'uniciclo nel piano XY (a) e delle variabili ρ (b), α (c), β (d) e ω (e) nel tempo



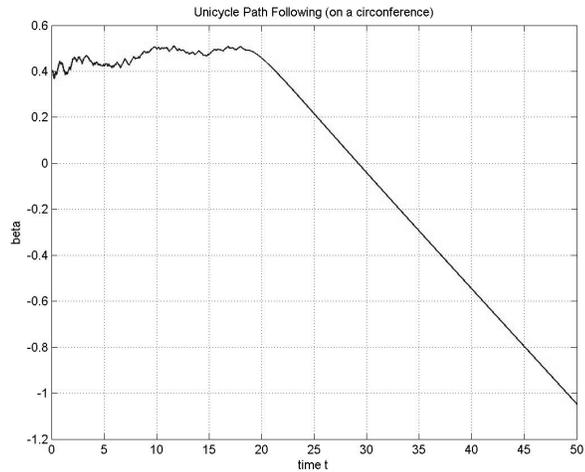
(a)



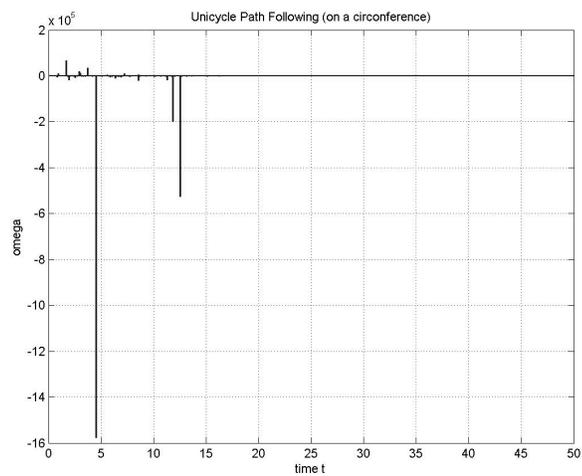
(b)



(c)

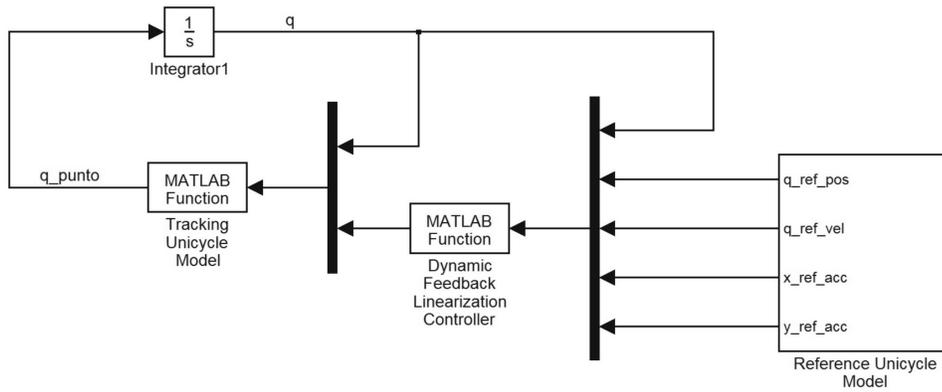


(d)

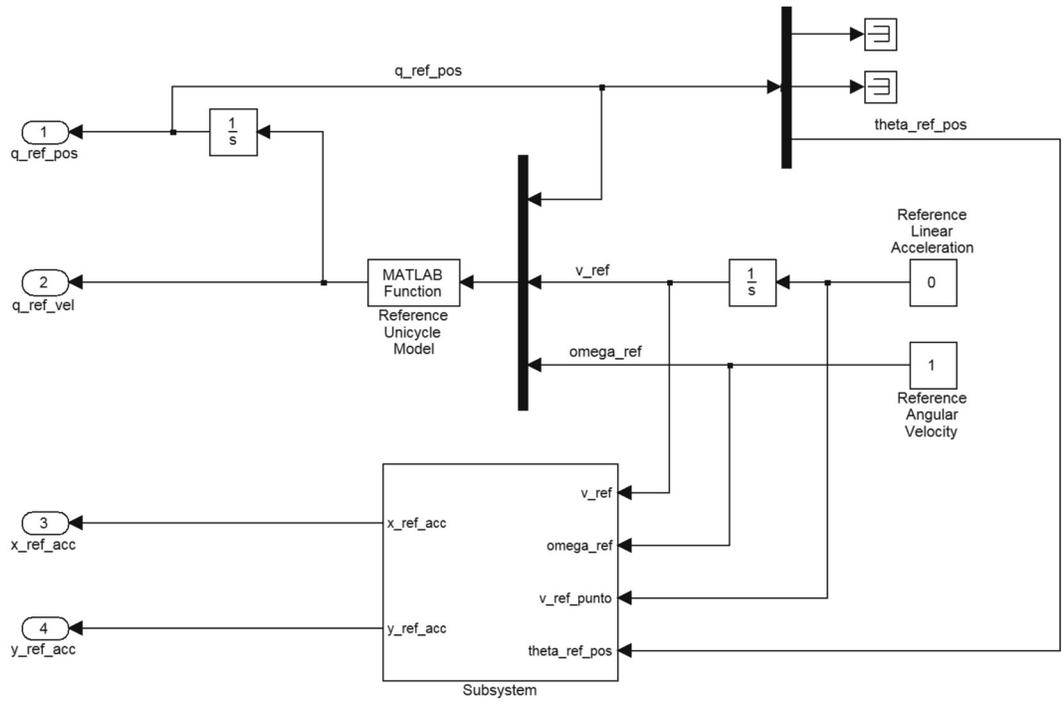


(e)

Figura 5.7: Andamento dell'uniciclo nel piano XY (a) e delle variabili ρ (b), α (c), β (d) e ω (e) nel tempo nel caso di punto iniziale *distante*.

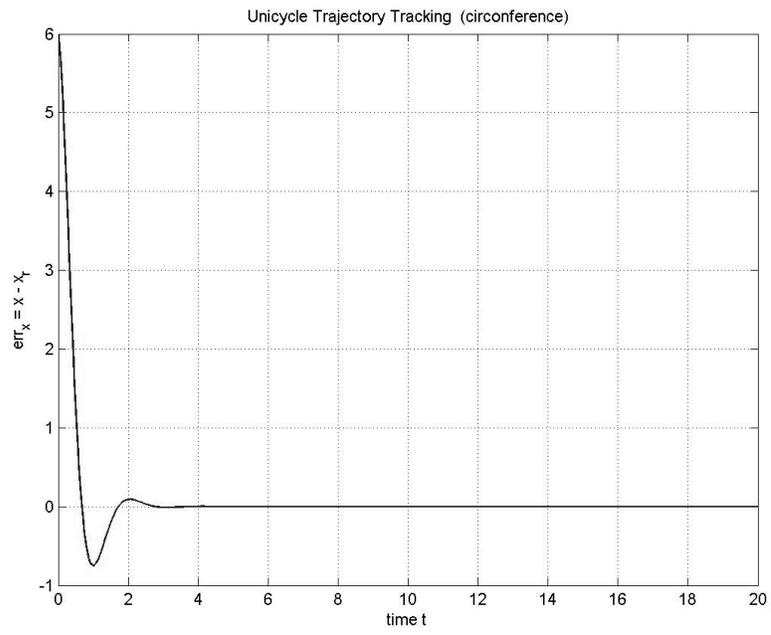


(a)

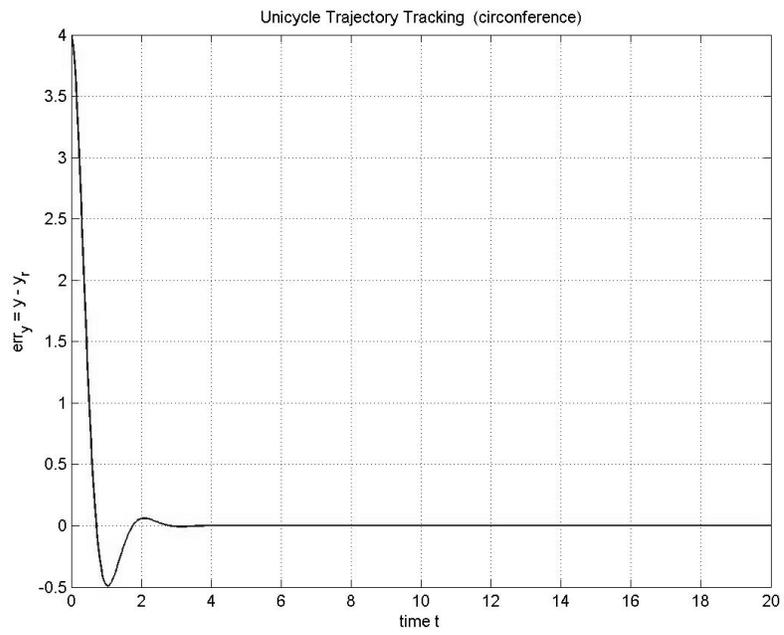


(b)

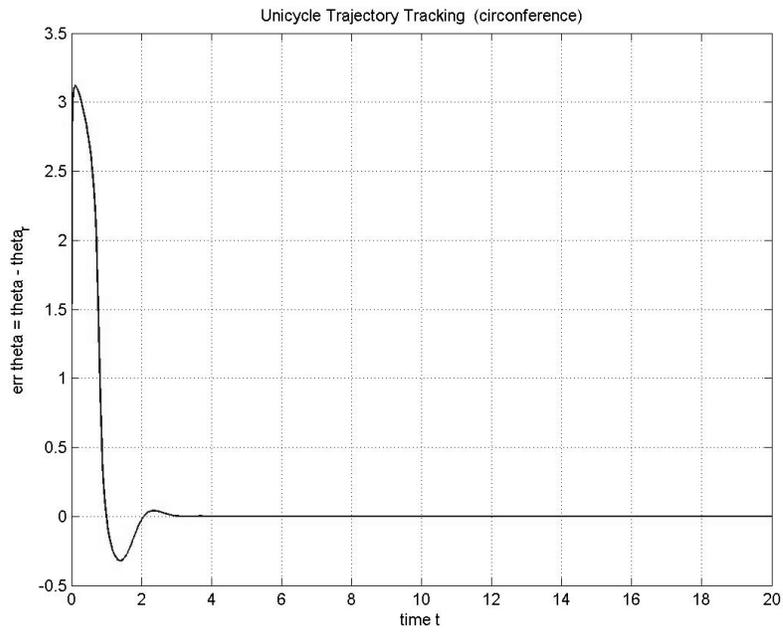
Figura 5.8: Modelli Simulink per il problema del Trajectory Tracking: (a) anello di controllo, (b) unicycle di riferimento.



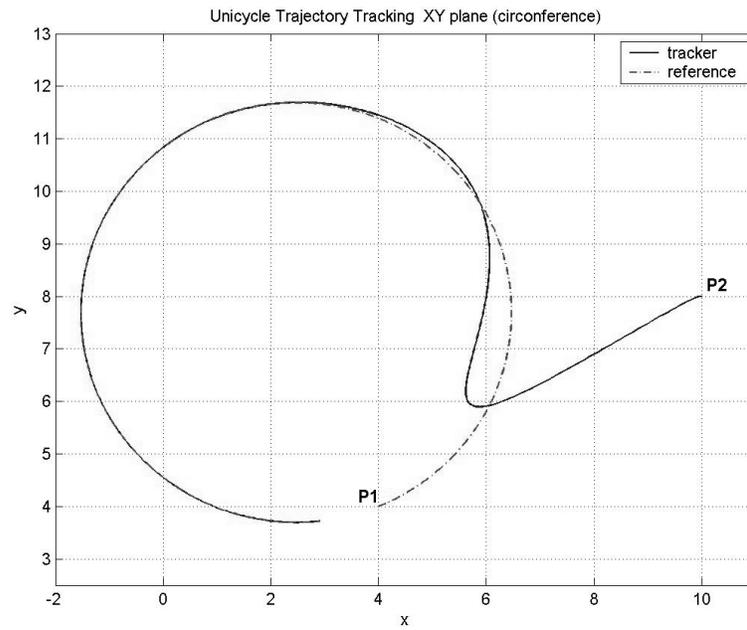
(a)



(b)

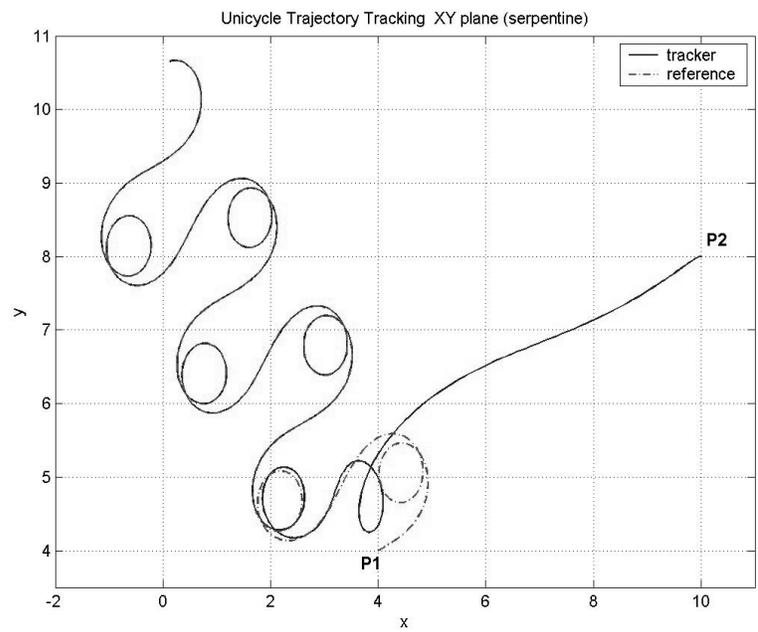


(c)

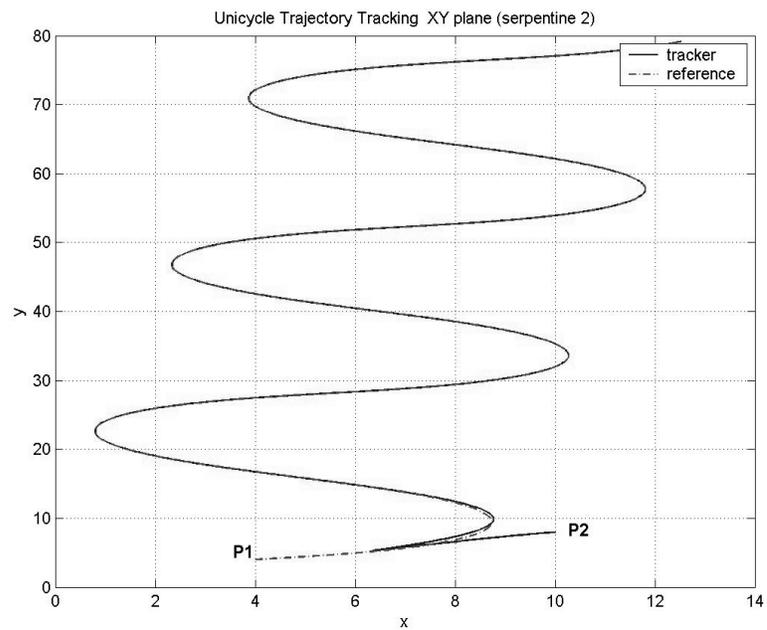


(d)

Figura 5.9: Andamenti nel tempo degli errori per ciascuna variabile di stato, $e_x = x - x_r$ (a), $e_y = y - y_r$ (b), $e_\theta = \theta - \theta_r$ (c), e andamento nel piano XY dei due unicycli (d).



(a)



(b)

Figura 5.10: Andamento nel piano XY dei due unicycli in caso di un solo ingresso sinusoidale (a) o entrambi (b).

5.3 Biciclo

Affronteremo le problematiche appena studiate anche nel caso del *biciclo*. A differenza dell'uniciclo, più di un modello cinematico si può ottenere, a seconda del punto di riferimento considerato (asse anteriore o posteriore) e della trazione del veicolo stesso (anteriore o posteriore).

Vedremo quale modello verrà opportunamente considerato di volta in volta nello studio dei tipici problemi della classe dei veicoli.

5.3.1 Path Following

Il modello cinematico del biciclo che prenderemo in esame sarà quello a *trazione posteriore*

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{x}_p \\ \dot{y}_p \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ \frac{1}{L} \tan \varphi \\ 0 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \omega \quad (5.20)$$

dove x_p e y_p sono le coordinate del centro dell'asse posteriore, θ è l'angolo di orientazione del link L congiungente i due assi delle ruote rispetto al piano, mentre φ rappresenta l'angolo di sterzo dell'asse anteriore (vedi figura 5.11).

Il nostro obiettivo è quello di stabilizzare il veicolo sull'asse x . Ancora una volta ci disinteressiamo di quanto tempo occorra per raggiungere tale luogo geometrico considerando la velocità v di avanzamento del veicolo costante. Pertanto gli ingressi a nostra disposizione da due si riducono ad uno, ω e prendendo come funzione di uscita $h(q) = y = \xi_1$ ci mettiamo nelle condizioni di sistema SISO.

Procediamo con le derivazioni successive di $h(q)$ tenendo presente che v adesso è un parametro e non più un ingresso:

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_1 = h(q) = y \\ \dot{\xi}_1 = \sin \theta v \\ \ddot{\xi}_1 = \dot{\theta} \cos \theta = \frac{v^2}{L} \cos \theta \tan \theta \\ \xi_1^{(3)} = \frac{v^2}{L} [-\dot{\theta} \sin \theta \tan \varphi + \dot{\varphi} \cos \theta (1 + \tan^2 \varphi)] = \\ = -\frac{v^3}{L^2} \sin \theta \tan^2 \varphi + \frac{v^2}{L} \cos \theta (1 + \tan^2 \varphi) \omega = \\ = a(q) + b(q)u = \nu \end{array} \right.$$

L'ingresso ω compare nella derivata terza di $h(q)$, quindi il grado relativo del sistema è $r = 3$. Dato che $n = 4$, abbiamo che $r < n$ e occorre una variabile indipendente η per avere un cambiamento di variabili $z = \Phi(q)$ completo; per questo motivo abbiamo perciò una *zero dinamica* (linearizzazione parziale, input-output).

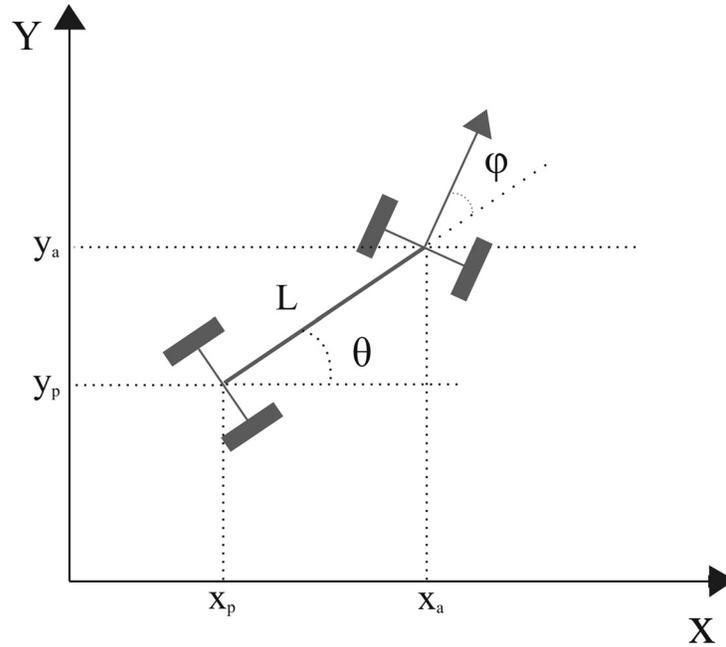


Figura 5.11: Il Biciclo nel piano.

La scelta ovvia per tale variabile è $\eta = x$ (variabile non osservabile) che definisce il cambiamento di coordinate

$$z = (\xi, \eta) = \Phi(q) = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \dot{\xi}_1 \\ \ddot{\xi}_1 \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ \sin \theta v \\ \frac{v^2}{L} \cos \theta \tan \varphi \\ x \end{bmatrix}$$

Tale cambiamento di coordinate è ammissibile; il modello cinematico del biciclo nelle nuove coordinate sarà

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 = \xi_3 \\ \dot{\xi}_3 = \nu \\ \dot{\eta} = \cos \theta v \end{cases} \quad (5.21)$$

e la retroazione *linearizzante* risulta

$$\xi_1^{(3)} = a(q) + b(q)u = \nu$$

↓

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{v^3 \sin \theta \tan^2 \varphi L}{L^2 v^2 \cos \theta (1 + \tan^2 \varphi)} + \frac{L\nu}{v^2 \cos \theta (1 + \tan^2 \varphi)} = \\ &= \frac{v \tan \theta \tan^2 \varphi}{(1 + \tan^2 \varphi)L} + \frac{L\nu}{v \cos \theta (1 + \tan^2 \varphi)}\end{aligned}$$

Si noti come per $\theta = \pi/2, 3\pi/2 \quad \forall \theta \in [0, 2\pi]$ il controllo ω non sia definito.

Non resta che attuare la retroazione stabilizzante degli stati ξ_i sul nuovo ingresso ν in modo da controllare a zero la variabile y di nostro interesse:

$$\begin{aligned}\xi_1^{(3)} &= \nu = k^T \xi = \begin{bmatrix} -k_0 & -k_1 & -k_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = \\ &= -k_0 \xi_1 - k_1 \xi_2 - k_2 \xi_3 = \\ &= -k_0 \xi_1 - k_1 \dot{\xi}_1 - k_2 \dot{\xi}_1\end{aligned}$$

↓

$$\xi_1^{(3)} + k_2 \ddot{\xi}_1 + k_1 \dot{\xi}_1 + k_0 \xi_1 = 0$$

Scegliendo i k_i opportunamente (in modo che il polinomio così ottenuto sia di *Hurwitz*) possiamo portare la variabile y a zero.

Rimane tuttavia da analizzare il comportamento della *zero dinamica*. Per avere uscita nulla ($y = 0$) dovrà essere

$$\xi_1 = y = 0$$

⇓

$$\xi_2 = \dot{\xi}_1 = \sin \theta v = 0 \Rightarrow \theta = 0, \pi \quad \forall \theta \in [0, 2\pi]$$

⇓

$$\xi_3 = \dot{\xi}_2 = \frac{v^2}{L} \cos \theta \tan \varphi = 0 \Rightarrow \frac{v^2}{L} \tan \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 0, \pi \quad \forall \varphi \in [0, 2\pi]$$

Per tali valori di θ e φ l'evoluzione della variabile η è

$$\eta = x \Rightarrow \dot{\eta} = \dot{x} = \cos \theta v \rightarrow \begin{cases} +v & \theta = 0 \\ -v & \theta = \pi \end{cases}$$

quindi in questa situazione il biciclo si trova esattamente sull'asse x ($y = 0$, $\theta = 0$ o π , $\varphi = 0$ o π) con velocità $\pm v$ a seconda della condizione iniziale.

Risultati delle simulazioni

Una volta costruito in ambiente **Simulink** il modello del biciclo per la sua stabilizzazione sull'asse x (vedi figura 5.12) si è proceduto alla verifica della teoria appena esposta.

Partendo dal punto iniziale $P = [x_0, y_0, \theta_0, \varphi_0]^T = [2, 2, 2\pi/3, \pi/4]^T$ con $k_0 = 1$ e $k_1 = k_2 = 3$ (ovvero tre poli reali concidenti in -1) sono stati ottenuti gli andamenti per le variabili di stato, il controllo e la traiettoria sul piano XY mostrati in figura 5.13.

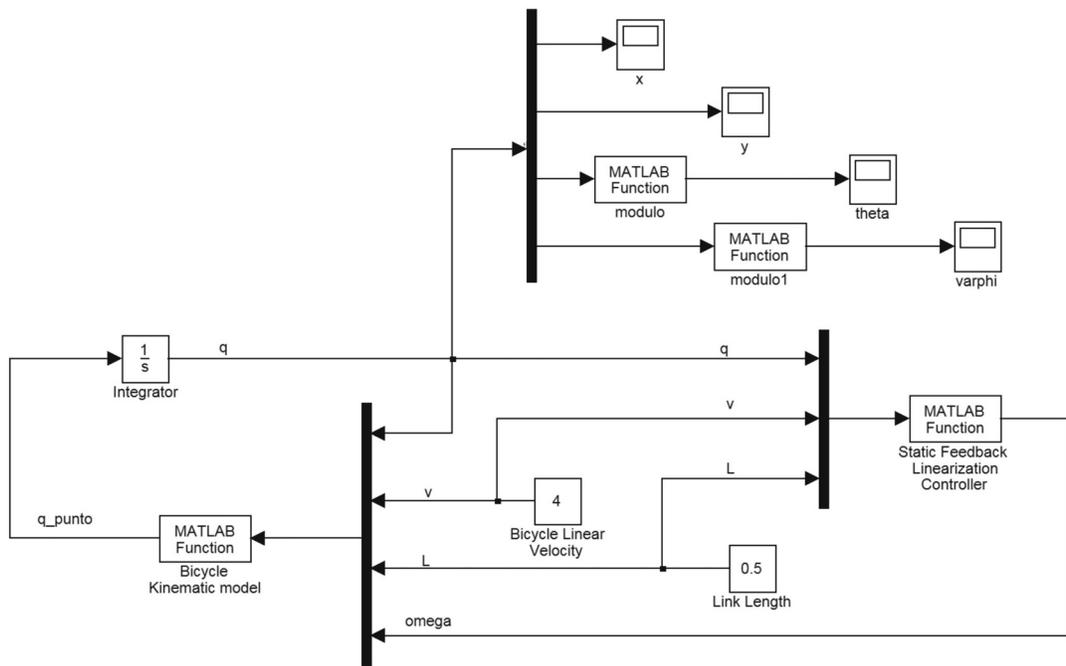
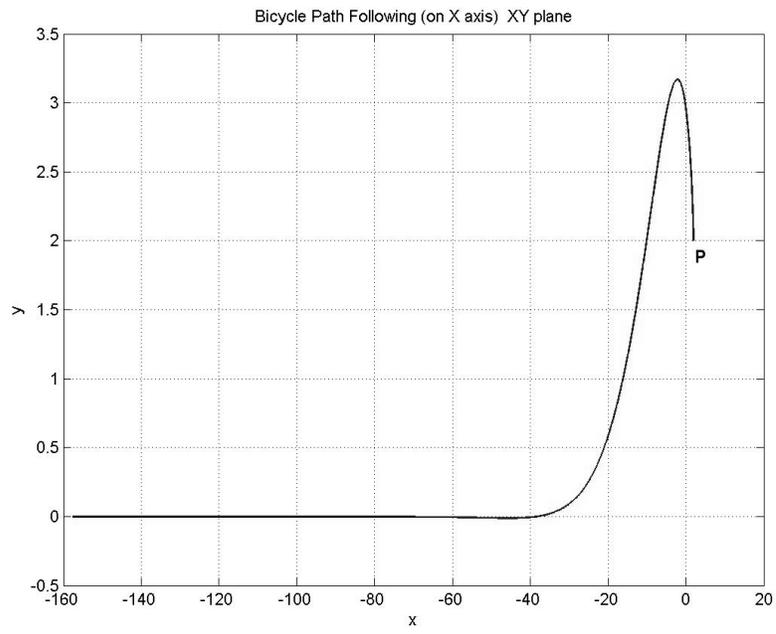
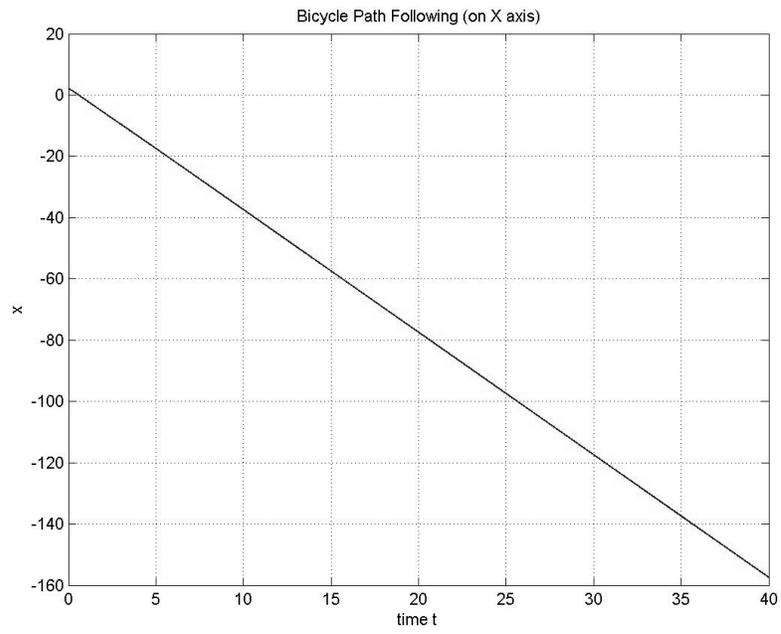


Figura 5.12: Modello **Simulink** per il problema del Path Following (sull'asse x) per un biciclo.

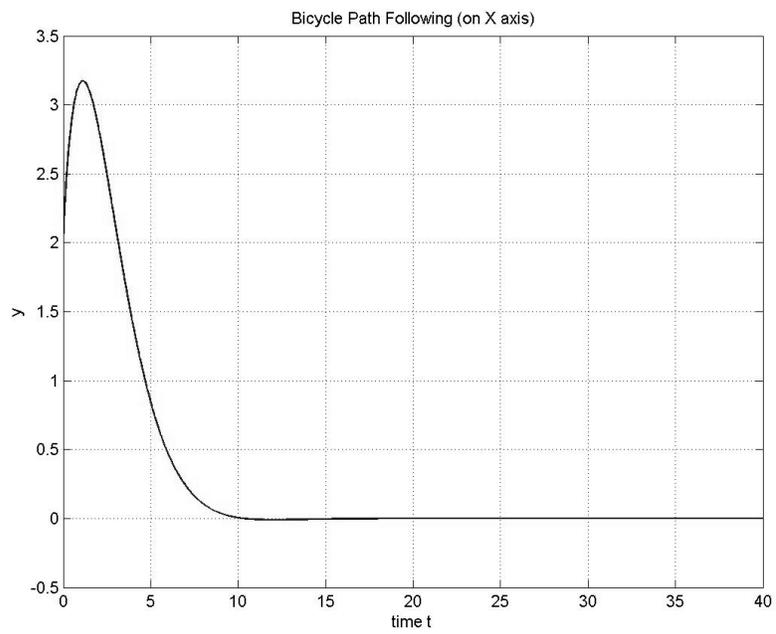
Come per l'uniciclo però, in caso di allontanamento del punto iniziale P dal luogo geometrico prefissato si ottengono andamenti *instabili* che tornano *normali* nei pressi dell'asse x come mostrato in figura 5.14 dove $P = [2, 30, 2\pi/3, \pi/4]^T$ (con i tre poli sempre in -1).



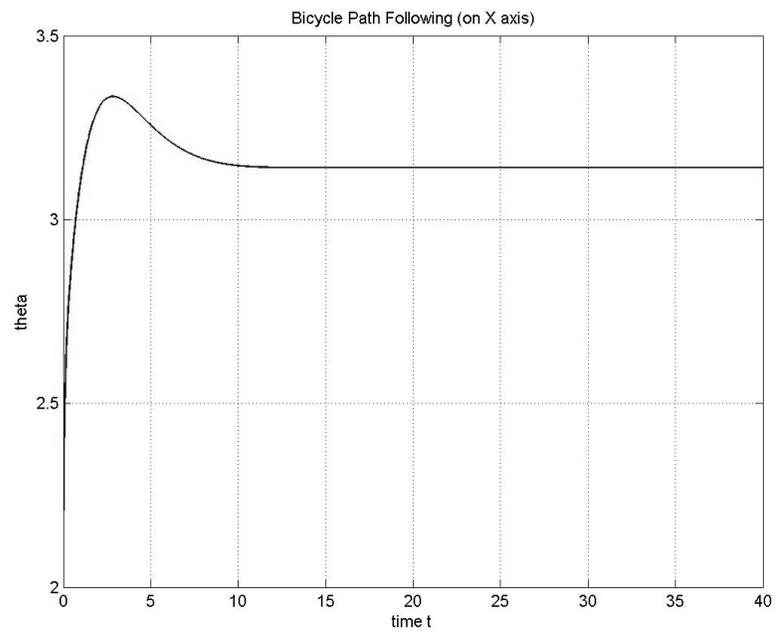
(a)



(b)



(c)



(d)

Stabilizzazione del biciclo su una circonferenza

Proviamo a stabilizzare il biciclo su una circonferenza di raggio R . Come per l'uniciclo, prima di applicare la linearizzazione in retroazione occorre passare ad un sistema di coordinate conveniente, in questo caso

$$\bar{q} = \begin{bmatrix} \rho \\ \alpha \\ \beta \\ \varphi \end{bmatrix} = \Psi(q) = \begin{bmatrix} \sqrt{x^2 + y^2} \\ \arctan(\frac{y}{x}) - \theta + \frac{\pi}{2} \\ \arctan(\frac{y}{x}) \\ \varphi \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

dove le variabili ρ , α e β hanno lo stesso significato dell'analogo caso per l'uniciclo (vedi eq. (5.14)). Il cambiamento di coordinate inverso

$$q = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \\ \varphi \end{bmatrix} = \Psi^{-1}(\bar{q}) = \begin{bmatrix} \rho \cos \beta \\ \rho \sin \beta \\ \beta - \alpha + \frac{\pi}{2} \\ \varphi \end{bmatrix}$$

Ancora una volta tale cambiamento di coordinate non è definito nell'origine ($\rho = 0$).

Nel nuovo sistema il modello cinematico del biciclo è

$$\dot{\bar{q}} = \frac{\partial \Psi(q)}{\partial q} \dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{\rho} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho \sin \alpha \\ \cos \alpha - \frac{\rho}{L} \tan \varphi \\ \cos \alpha \\ 0 \end{bmatrix} \hat{v} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \omega \quad (5.23)$$

dove per comodità si è posto $v = \rho \hat{v}$ (ciò è ammissibile finché $\rho \neq 0$).

Una volta trasformato il sistema nelle nuove coordinate possiamo procedere con la linearizzazione in retroazione scegliendo la funzione di uscita, ad esempio $h(\bar{q}) = \rho - R$, per poi derivarla successivamente ottenendo:

$$\begin{cases} h(\bar{q}) &= \rho - R = \xi_1 \\ \dot{h}(\bar{q}) &= \rho \sin \alpha \hat{v} = \xi_2 \\ \ddot{h}(\bar{q}) &= \rho \hat{v}^2 - \frac{\rho^2 \hat{v}^2}{L} \cos \alpha \tan \varphi = \xi_3 \\ h^{(3)}(\bar{q}) &= \rho \hat{v}^3 \sin \alpha - \frac{\rho^2 \hat{v}^3}{L^2} \sin \alpha \tan^2 \varphi - \frac{\rho \hat{v}^2}{L} \cos \alpha (1 + \tan^2 \varphi) \omega = \\ &= a(\bar{q}) + b(\bar{q})u = \nu \end{cases}$$

con ν al solito nuovo ingresso.

Tuttavia notiamo come l'ingresso ω compaia nella derivata terza di $h(\bar{q})$ pertanto il grado relativo del sistema è $r = 3$. Per avere un cambiamento

di coordinate $z = \Phi(\bar{q})$ completo occorre una quarta variabile indipendente, per esempio $\eta = \beta$

$$z = (\xi, \eta) = \Phi(\bar{q}) = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \dot{\xi}_1 \\ \ddot{\xi}_1 \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho - R \\ \rho \sin \alpha \hat{v} \\ \rho \hat{v}^2 - \frac{\rho^2 \hat{v}^2}{L} \cos \alpha \tan \varphi \\ \beta \end{bmatrix}$$

Tale cambiamento è ammissibile ed il modello cinematico del biciclo in questo nuovo sistema risulta

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 = \xi_3 \\ \dot{\xi}_3 = \nu \\ \dot{\eta} = \cos \alpha \hat{v} \end{cases} \quad (5.24)$$

con retroazione linearizzante

$$h^{(3)}(\bar{q}) = \dot{\xi}_3 = \xi_1^{(3)} = a(\bar{q}) + b(\bar{q})u = \nu$$

↓

$$\omega = \frac{\hat{v}L \sin \alpha}{\cos \alpha(1 + \tan^2 \varphi)} - \frac{\rho \hat{v} \sin \alpha \tan^2 \varphi}{L \cos \alpha(1 + \tan^2 \varphi)} - \frac{\nu L}{\rho \hat{v}^2 \cos \alpha(1 + \tan^2 \varphi)}$$

Tale controllo ω non è definito quando $\alpha = \pi/2, 3\pi/2 \quad \forall \alpha \in [0, 2\pi]$.

Non resta che applicare la tecnica della linearizzazione in retroazione (*parziale*) definendo la retroazione stabilizzante degli stati ξ_i sull'ingresso:

$$\begin{aligned} \xi_1^{(3)} &= \nu = k^T \xi = \begin{bmatrix} -k_0 & -k_1 & -k_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = \\ &= -k_0 \xi_1 - k_1 \xi_2 - k_2 \xi_3 = \\ &= -k_0 \xi_1 - k_1 \dot{\xi}_1 - k_2 \ddot{\xi}_1 \end{aligned}$$

↓

$$\xi_1^{(3)} + k_2 \ddot{\xi}_1 + k_1 \dot{\xi}_1 + k_0 \xi_1 = 0$$

Scegliendo i k_i opportunamente (in modo che il polinomio così ottenuto sia di *Hurwitz*) possiamo portare la variabile y a zero. A questo punto rimane solo lo studio della variabile non osservabile η (*zero dinamica*).

Per avere uscita nulla $h(\bar{q}) = 0$ dev'essere $\rho = R$ il che implica

$$\xi_1 = h(\bar{q}) = 0 \rightarrow \rho = R$$

↓

$$\xi_2 = \dot{\xi}_1 = \rho \sin \alpha \hat{v} = R \sin \alpha \hat{v} = 0 \Rightarrow \alpha = 0, \pi \quad \forall \alpha \in [0, 2\pi]$$

↓

$$\xi_3 = \dot{\xi}_2 = \rho \hat{v}^2 - \frac{\rho \hat{v}^2}{L} \cos \alpha \tan \varphi = 0 \Rightarrow R \hat{v}^2 - \frac{R \hat{v}^2}{L} \tan \varphi = 0$$

$$\tan \varphi = \frac{L}{R} \Rightarrow \varphi = \arctan \frac{L}{R}$$

Per tali valori di α l'evoluzione della variabile η (indipendente da φ) è

$$\dot{\eta} = \dot{\beta} = \cos \alpha \hat{v} \rightarrow \begin{cases} +\hat{v} & \alpha = 0 \\ -\hat{v} & \alpha = \pi \end{cases}$$

↓

$$\eta = \beta = \begin{cases} +\hat{v}t = +\frac{vt}{R} & \alpha = 0 \\ -\hat{v}t = -\frac{vt}{R} & \alpha = \pi \end{cases}$$

Quindi il biciclo ruota con velocità costante $|v|$ sulla circonferenza di raggio R in senso orario ($\alpha = 0$) o antiorario ($\alpha = \pi$).

Risultati delle simulazioni

Costruito il modello **Simulink** per il problema del Path Following su una circonferenza di raggio R , si è proceduto con alcune simulazioni per verificare la bontà della teoria sopra introdotta.

Partendo dal punto $P = [50, \pi/6, 2\pi/3, \pi/4]^T$ con $k_0 = 1$, $k_1 = k_2 = 3$ (tre poli reali coincidenti in -1) e posto $R = 40$, $v = 4$ e $L = 0.5$ (L rappresenta la lunghezza del link congiungente asse anteriore e posteriore) sono stati ottenuti i grafici di figura 5.15.

Da notare come il valore del controllo $\omega (= \dot{\varphi})$ sia nullo a regime dopo un picco iniziale. Percorrendo una circonferenza infatti, il valore dell'angolo di sterzata φ è costante ed è esattamente pari al rapporto $\frac{L}{R} = 0.0125$ (si ricordi che la funzione *arctan* ha pendenza unitaria in un intorno dell'origine e quindi $\arctan(\frac{L}{R}) \simeq \frac{L}{R}$).

Analogamente alla stabilizzazione del biciclo sull'asse x (così come nel Path Following per l'uniciclo), in caso di allontanamento del punto iniziale P dal luogo geometrico prefissato abbiamo la presenza di andamenti *instabili* che tornano *normali* nei pressi della circonferenza come risulta dalla figura 5.16 dove $P = [80, \pi/6, 2\pi/3, \pi/4]^T$.

5.3.2 Trajectory Tracking

Formulazione del problema

L'obiettivo consiste nell'ottenere un inseguimento perfetto di un biciclo di riferimento da parte di un altro biciclo.

Per far questo supponiamo di voler annullare l'errore di posizione

$$e = \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - x_r \\ y - y_r \end{bmatrix} \quad (5.25)$$

tenendo presente che oltre l'angolo di orientazione θ nel modello del biciclo si ha anche l'angolo di *sterzata* φ .

Scegliamo come modello per il biciclo quello a *trazione posteriore* con riferimento all'*asse posteriore* (x_{post}, y_{post})

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{x}_{post} \\ \dot{y}_{post} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ \frac{1}{L} \tan \varphi \\ 0 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \omega \quad (5.26)$$

Scegliendo come funzioni di uscita

$$h_1(q) = x_{post}; \quad h_2(q) = y_{post};$$

abbiamo dei problemi perché

$$\begin{cases} \dot{h}_1(q) = \cos \theta v \\ \dot{h}_2(q) = \sin \theta v \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} \dot{h}_1(q) \\ \dot{h}_2(q) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 \end{bmatrix}}_{E(q)} \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} = E(q)u$$

la matrice $E(q)$ è singolare e non esiste un grado relativo r .

Per superare questo inconveniente utilizziamo la tecnica della linearizzazione in retroazione *dinamica*. Inseriamo un primo ritardo sull'ingresso v definendo $\dot{a} = v$. Notiamo infatti che con la scelta fatta per le funzioni di uscita, nelle derivate prime compare solo l'ingresso v e non ω .

Se adesso deriviamo le $h_i(q)$ otteniamo:

$$\begin{cases} h_1(q) = x \\ \dot{h}_1(q) = \cos \theta v \\ \ddot{h}_1(q) = a \cos \theta - \frac{v^2}{L} \sin \theta \tan \varphi \end{cases} \quad \begin{cases} h_2(q) = y \\ \dot{h}_2(q) = \sin \theta v \\ \ddot{h}_2(q) = a \sin \theta + \frac{v^2}{L} \cos \theta \tan \varphi \end{cases}$$

e visto che l'ingresso ω non compare ancora, inserendo un secondo ritardo sull'ingresso v ovvero $\dot{a} = b$ possiamo effettuare una terza operazione di derivazione sulle funzioni di uscita arrivando così a

$$h_1^{(3)}(q) = b \cos \theta - \frac{3va}{L} \sin \theta \tan \varphi - \frac{v^2}{L} \left[\frac{v}{L} \cos \theta \tan^2 \varphi + \sin \theta (1 + \tan^2 \varphi) \omega \right]$$

$$h_2^{(3)}(q) = b \sin \theta + \frac{3va}{L} \cos \theta \tan \varphi + \frac{v^2}{L} \left[-\frac{v}{L} \sin \theta \tan^2 \varphi + \cos \theta (1 + \tan^2 \varphi) \omega \right]$$

Nelle derivate terze delle $h_i(q)$ appare l'ingresso reale ω e b : la procedura si arresta.

Se adesso mettiamo il tutto in forma matriciale abbiamo

$$\begin{bmatrix} h_1^{(3)} \\ h_2^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3va}{L} \sin \theta \tan \varphi - \frac{v^3}{L^2} \cos \theta \tan^2 \varphi \\ \frac{3va}{L} \cos \theta \tan \varphi - \frac{v^3}{L^2} \sin \theta \tan^2 \varphi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \theta & -\frac{v^2}{L} \sin \theta (1 + \tan^2 \varphi) \\ \sin \theta & \frac{v^2}{L} \cos \theta (1 + \tan^2 \varphi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ \omega \end{bmatrix}$$

$$\nu = \Gamma(q) + E(q)u$$

Essendo $\det E = \frac{v^2}{L} (1 + \tan^2 \varphi)$ se $v = 0$ la matrice E non è invertibile e non esiste grado relativo r . Se queste condizioni *non* sono verificate allora E^{-1} esiste ed $r = 3 + 3 = 6 = 4 + 2 = n + 2$. La linearizzazione è esatta (*input-stati*) e ν_1 e ν_2 sono i nuovi ingressi.

Avendo "allargato" lo spazio di stato con l'inserimento dei due ritardi sull'ingresso v ($[x, y, \theta, \varphi, v, a]^T$) il modello cinematico del biciclo è il seguente

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \\ \dot{v} \\ \dot{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \cos \theta \\ v \sin \theta \\ \frac{v}{L} \tan \varphi \\ 0 \\ a \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} b + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \omega \quad (5.27)$$

Il cambiamento di variabili

$$\xi = \Phi(q) = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \\ \xi_5 \\ \xi_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1(q) \\ \dot{h}_1(q) \\ \ddot{h}_1(q) \\ h_2(q) \\ \dot{h}_2(q) \\ \ddot{h}_2(q) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ v \cos \theta \\ a \cos \theta - \frac{v^2}{L} \sin \theta \tan \varphi \\ y \\ v \sin \theta \\ a \sin \theta + \frac{v^2}{L} \cos \theta \tan \varphi \end{bmatrix}$$

è ammissibile, mentre la retroazione linearizzante risulta:

$$\begin{bmatrix} b \\ \omega \end{bmatrix} = u = -E^{-1}(q)\Gamma(q) + E^{-1}(q)\nu = \\ = \begin{bmatrix} \frac{v^3}{L^2} \tan^2 \varphi \\ -\frac{3 \tan \varphi a}{v(1+\tan^2 \varphi)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \theta \nu_1 + \sin \theta \nu_2 \\ -\frac{L \sin \theta}{v^2(1+\tan^2 \varphi)} \nu_1 + \frac{L \cos \theta}{v^2(1+\tan^2 \varphi)} \nu_2 \end{bmatrix}$$

(si noti come per $v = 0$ il controllo ω diverga). Non resta che costruire le retroazioni degli stati ξ_i sui nuovi ingressi ν_i posizionando i poli a nostro piacimento in modo da annullare l'errore definito dall'equazione (5.25):

$$\begin{aligned} \nu_1 = \xi_1^{(3)} &= x_r^{(3)} + \lambda_2 \ddot{x}_r + \lambda_1 \dot{x}_r + \lambda_0 x_r + \lambda \xi = \\ &= x_r^{(3)} + \lambda_2 \ddot{x}_r + \lambda_1 \dot{x}_r + \lambda_0 x_r + \underbrace{\begin{bmatrix} -\lambda_0 & -\lambda_1 & -\lambda_2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\lambda} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \\ \xi_5 \\ \xi_6 \end{bmatrix} = \\ &= x_r^{(3)} + \lambda_2 \ddot{x}_r + \lambda_1 \dot{x}_r + \lambda_0 x_r - \lambda_0 \xi_1 - \lambda_1 \xi_2 - \lambda_2 \xi_3 = \\ &= x_r^{(3)} - \lambda_2 (\ddot{\xi}_1 - \ddot{x}_r) - \lambda_1 (\dot{\xi}_1 - \dot{x}_r) - \lambda_0 (\xi_1 - x_r) \end{aligned}$$

↓

$$\underbrace{(\xi_1^{(3)} - x_r^{(3)})}_{e_x^{(3)}} + \lambda_2 \underbrace{(\ddot{\xi}_1 - \ddot{x}_r)}_{\dot{e}_x} + \lambda_1 \underbrace{(\dot{\xi}_1 - \dot{x}_r)}_{\dot{e}_x} + \lambda_0 \underbrace{(\xi_1 - x_r)}_{e_x} = 0$$

per quanto riguarda l'errore lungo x ; analogamente per quello lungo y

$$\begin{aligned}
\nu_2 = \xi_4^{(3)} &= y_r^{(3)} + \gamma_2 \ddot{y}_r + \gamma_1 \dot{y}_r + \gamma_0 y_r + \gamma \xi = \\
&= y_r^{(3)} + \gamma_2 \ddot{y}_r + \gamma_1 \dot{y}_r + \gamma_0 y_r + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\gamma_0 & -\gamma_1 & -\gamma_2 \end{bmatrix}}_{\gamma} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \\ \xi_5 \\ \xi_6 \end{bmatrix} = \\
&= y_r^{(3)} + \gamma_2 \ddot{y}_r + \gamma_1 \dot{y}_r + \gamma_0 y_r - \gamma_0 \xi_4 - \gamma_1 \xi_5 - \gamma_2 \xi_6 = \\
&= y_r^{(3)} - \gamma_2 (\xi_4 - \ddot{y}_r) - \gamma_1 (\xi_5 - \dot{y}_r) - \gamma_0 (\xi_4 - y_r)
\end{aligned}$$

↓

$$\underbrace{(\xi_4^{(3)} - y_r^{(3)})}_{e_y^{(3)}} + \gamma_2 \underbrace{(\xi_5 - \dot{y}_r)}_{\dot{e}_y} + \gamma_1 \underbrace{(\xi_6 - \ddot{y}_r)}_{\ddot{e}_y} + \gamma_0 \underbrace{(\xi_4 - y_r)}_{e_y} = 0$$

La presenza dei termini $x_r^{(3)}, y_r^{(3)}$, le derivate terze delle coordinate x e y del biciclo di riferimento, nei due polinomi preposti ad annullare gli errori e_x e e_y implica che la traiettoria da inseguire dev'essere derivabile almeno tre volte.

Risultati delle simulazioni

Supponiamo che il biciclo di riferimento si muova su una circonferenza di raggio R (per semplicità) attorno all'origine. La traiettoria desiderata che vogliamo inseguire è definita quindi da

$$x_r(t) = R \cos \sigma t \quad y_r(t) = R \sin \sigma t$$

dove σ è la pulsazione di rotazione. Dal modello cinematico del biciclo si ricava il valore degli ingressi del biciclo di riferimento v_r e ω_r ; più precisamente

$$\begin{cases} \dot{x}_r = -\sigma R \sin \sigma t = \cos \theta_r v_r \\ \dot{y}_r = +\sigma R \cos \sigma t = \sin \theta_r v_r \end{cases} \Rightarrow v_r = \pm \sqrt{\dot{x}_r^2 + \dot{y}_r^2} = \pm \sigma R$$

$$\frac{\dot{y}_r}{\dot{x}_r} = \frac{\sin \theta_r v_r}{\cos \theta_r v_r} = \tan \theta_r = \frac{\sigma R \cos \sigma t}{-\sigma R \sin \sigma t} = -\cot \sigma t$$

↓

$$\theta_r = -\arctan [\cot \sigma t] \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta}_r = \sigma(1 + \cot^2 \sigma t) \frac{1}{(1 + \cot^2 \sigma t)} = \sigma$$

↓

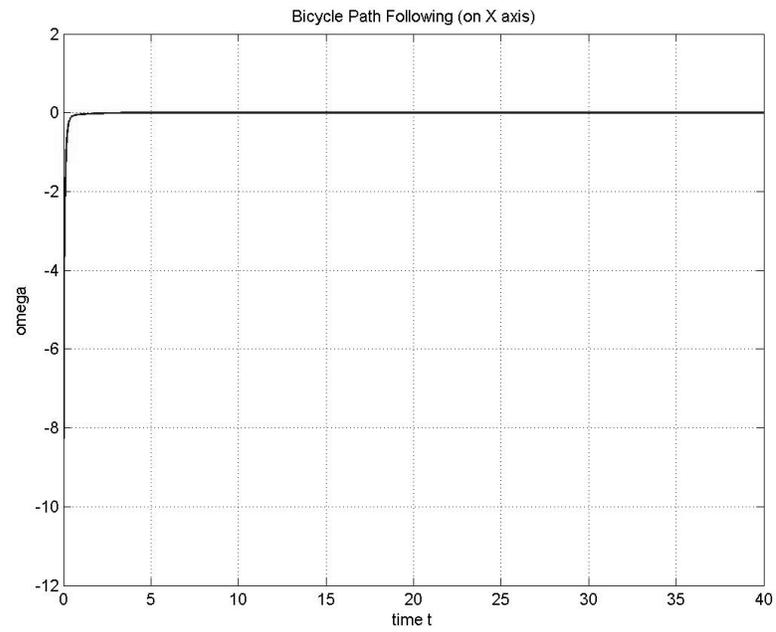
$$\dot{\theta}_r = \sigma = \frac{\sigma R}{L} \tan \varphi_r \quad \Rightarrow \quad \varphi_r = \arctan \frac{L}{R} \quad \Rightarrow \quad \dot{\varphi}_r = \omega_r = 0$$

In definitiva affinché il biciclo di riferimento si muova su una circonferenza di raggio R con pulsazione σ , occorre una v_r costante e pari a $\pm\sigma R$ (la tipica relazione del moto circolare uniforme), un angolo di sterzata costante $\varphi_r = \frac{L}{R}$ dato dalla geometria del sistema e una ω_r nulla.

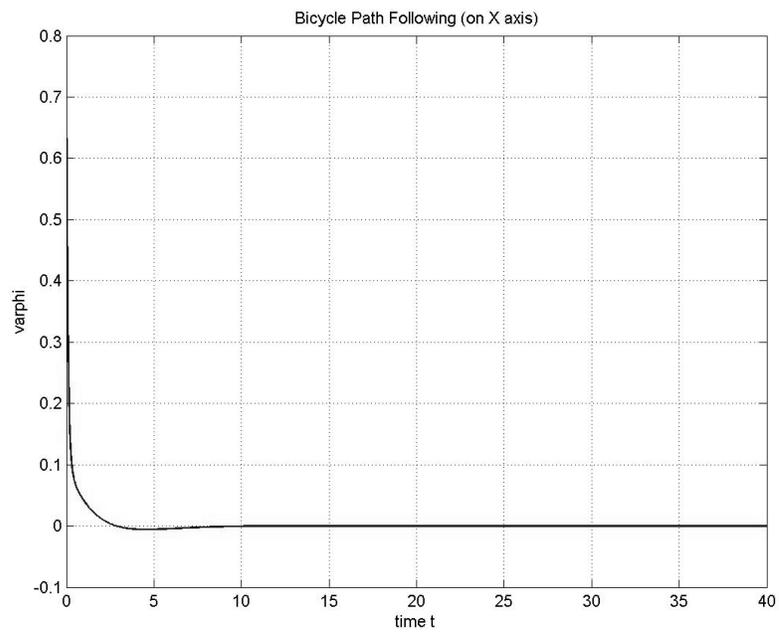
Una volta costruito in ambiente **Simulink** il modello del biciclo per il Trajectory Tracking (vedi figura 5.17) si è dunque proceduto ad alcune simulazioni.

Considerando $\sigma = 0.5$ e $R = 10$ per il biciclo di riferimento (ottenendo così una $v_r = 5$), $L = 0.5$ e facendo partire il biciclo inseguitore dal punto iniziale $P = [x_0, y_0, \theta_0, \varphi_0, v_0, a_0]^T = [2, 3, 0, 0, 0.5, 0]^T$ e si sono avuti gli andamenti delle variabili di stato mostrati in figura 5.18.

Durante le simulazioni i valori dei coefficienti λ_i, γ_i sono stati scelti in modo da avere poli reali α_i con $\mathbf{Re}\{\alpha_i\} < 0$ e non poli complessi coniugati perché pur scelti a parte reale negativa possono generare andamenti divergenti per problemi di integrazioni numerica in **Matlab**. Nel caso specifico tutti e tre i poli sono stati posizionati in -1 che in termini dei coefficienti dei polinomi stabilizzanti equivale a porre $\lambda_0 = \gamma_0 = 1$, $\lambda_1 = \gamma_1 = 3$, $\lambda_2 = \gamma_2 = 3$.

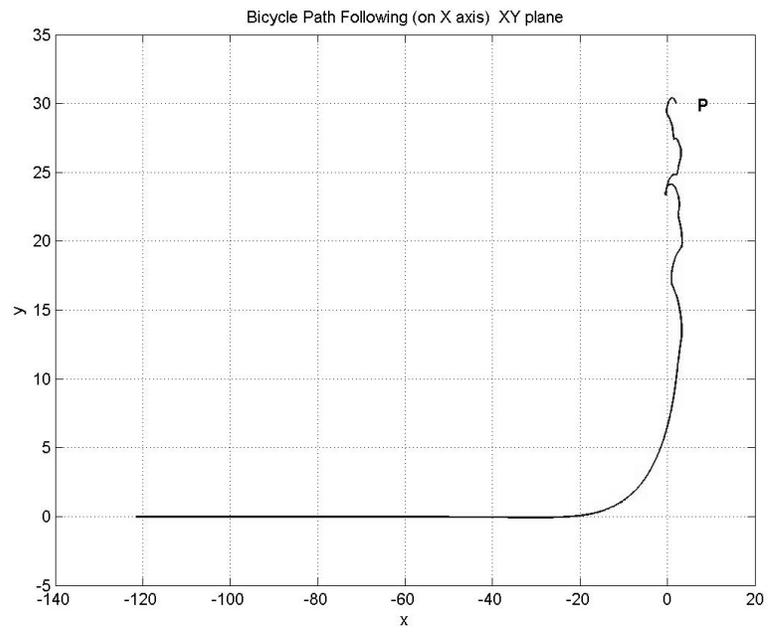


(e)

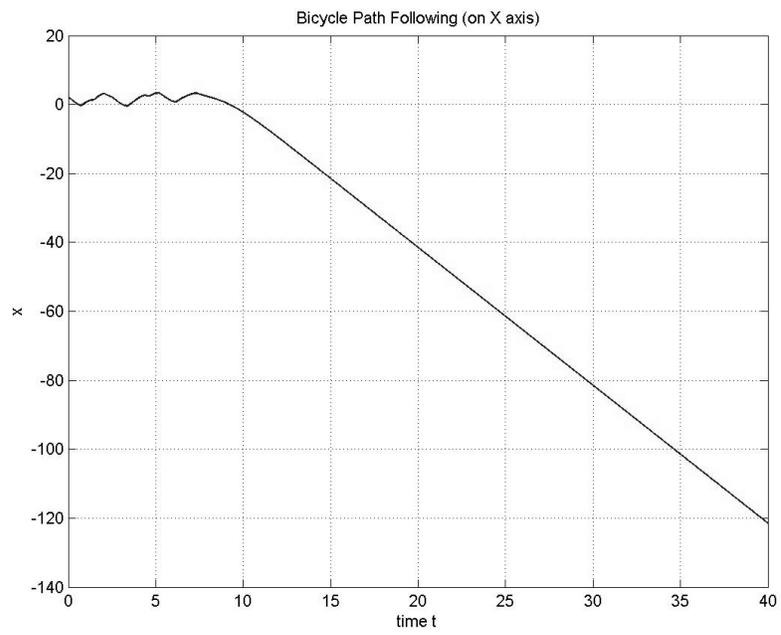


(f)

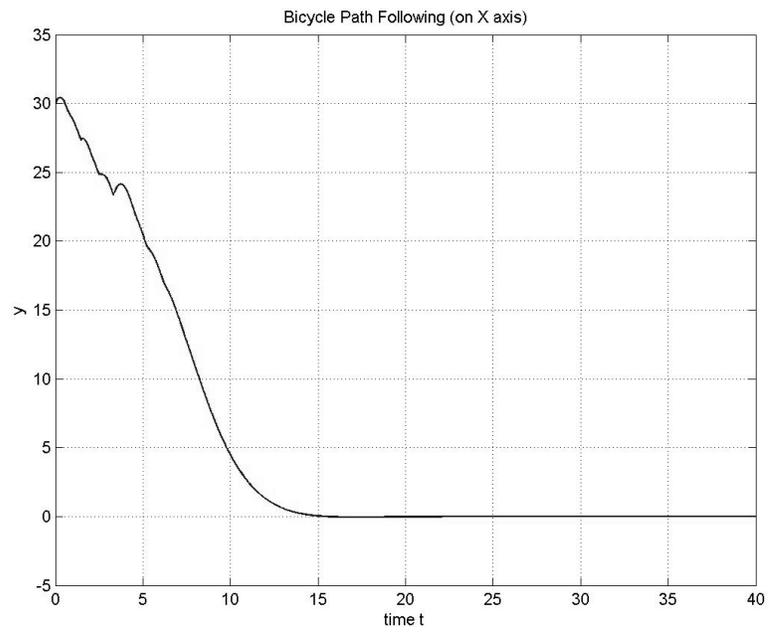
Figura 5.13: Andamento del biciclo nel piano XY (a) e delle variabili x (b), y (c), θ (d), φ (f) e ω (e) nel tempo.



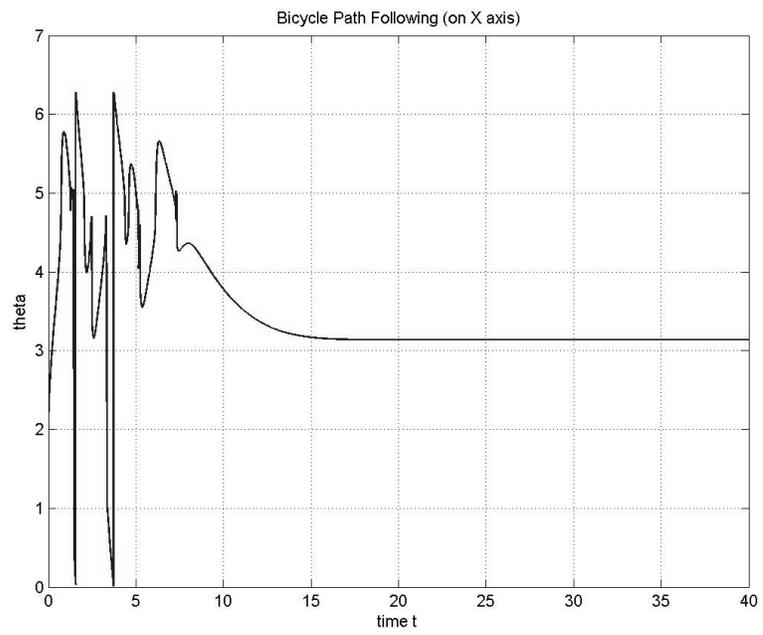
(a)



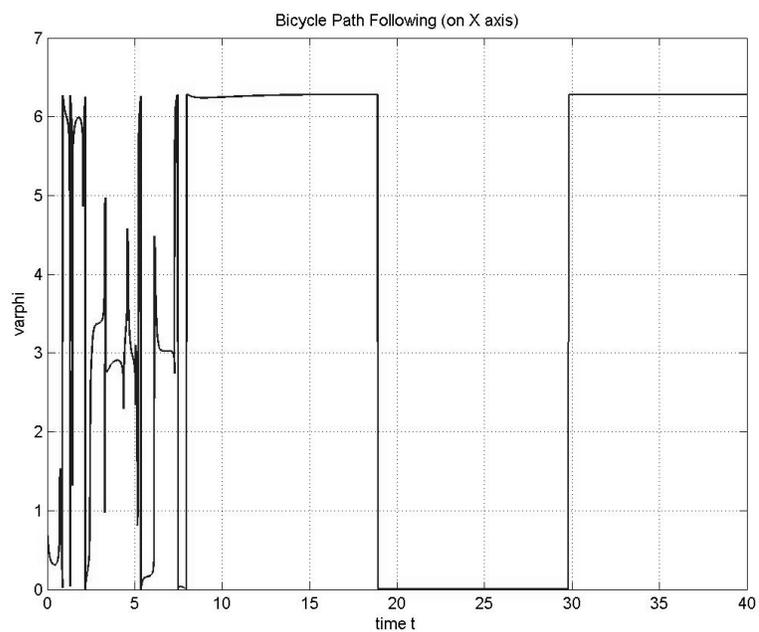
(b)



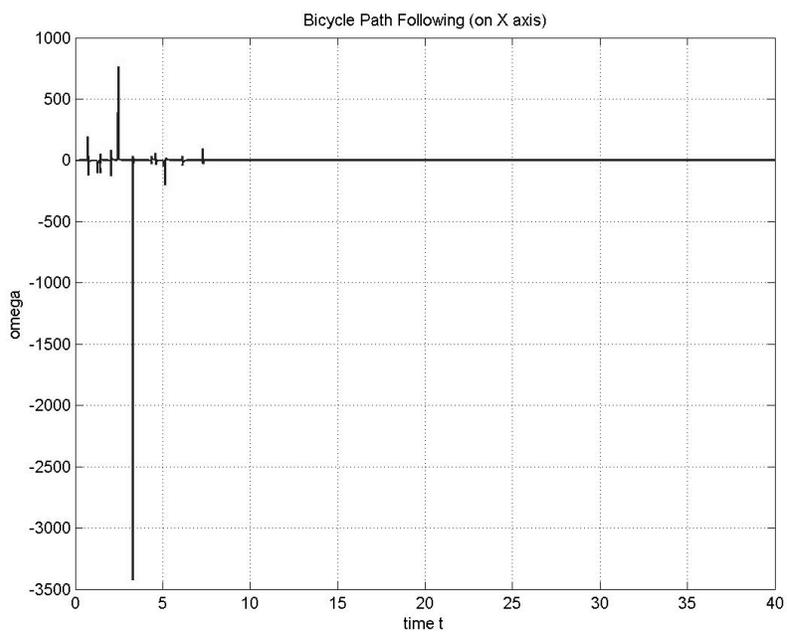
(c)



(d)

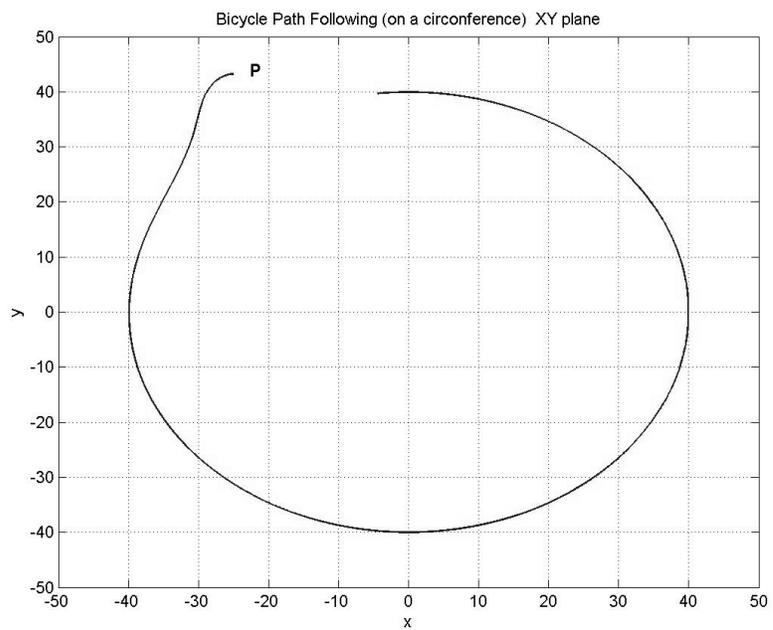


(e)

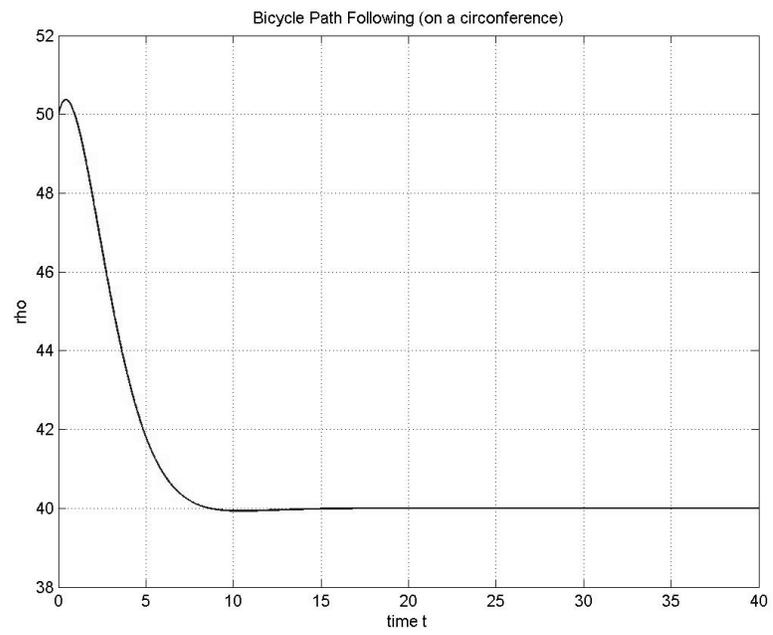


(f)

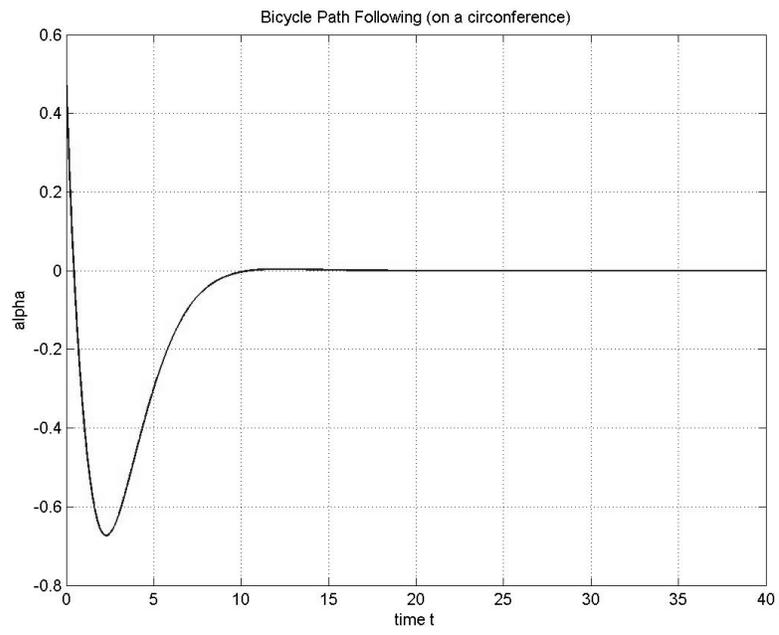
Figura 5.14: Andamento del biciclo nel piano XY (a) e delle variabili x (b), y (c), θ (d), φ (e) e ω (f) nel tempo partendo da un punto iniziale *distante*.



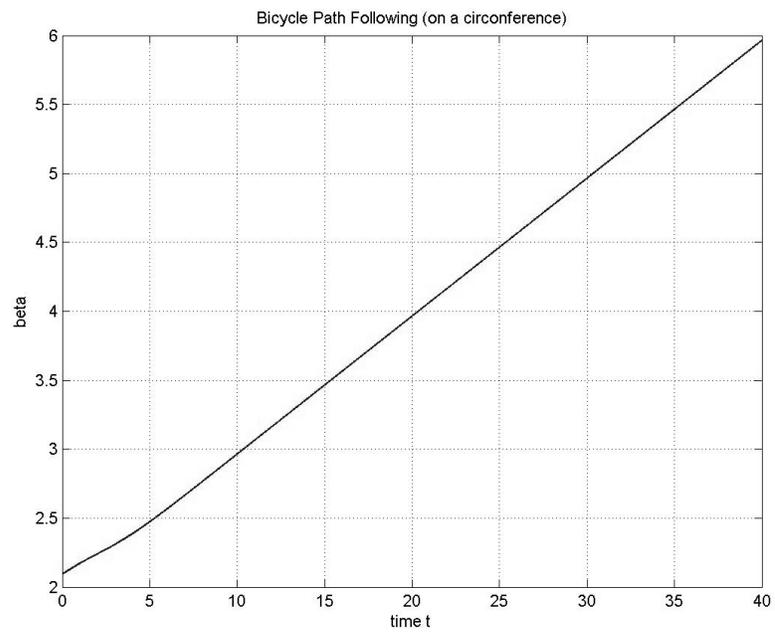
(a)



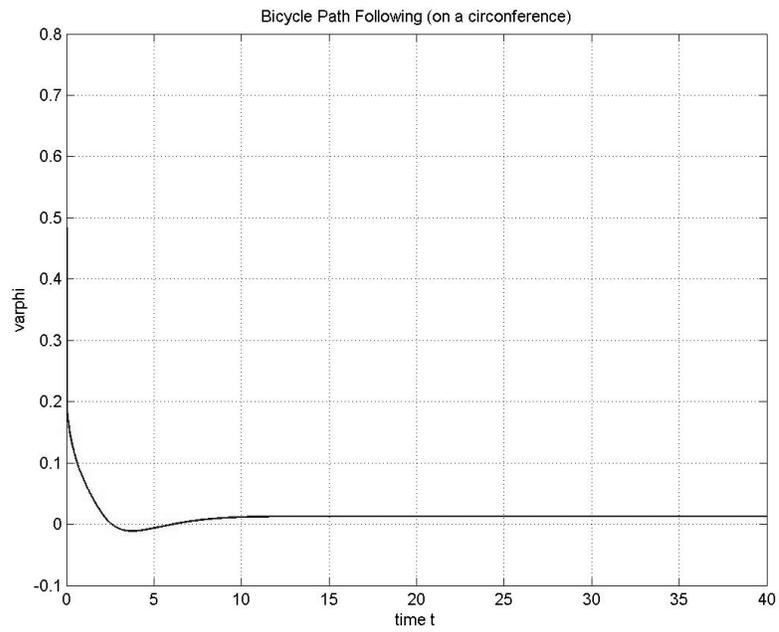
(b)



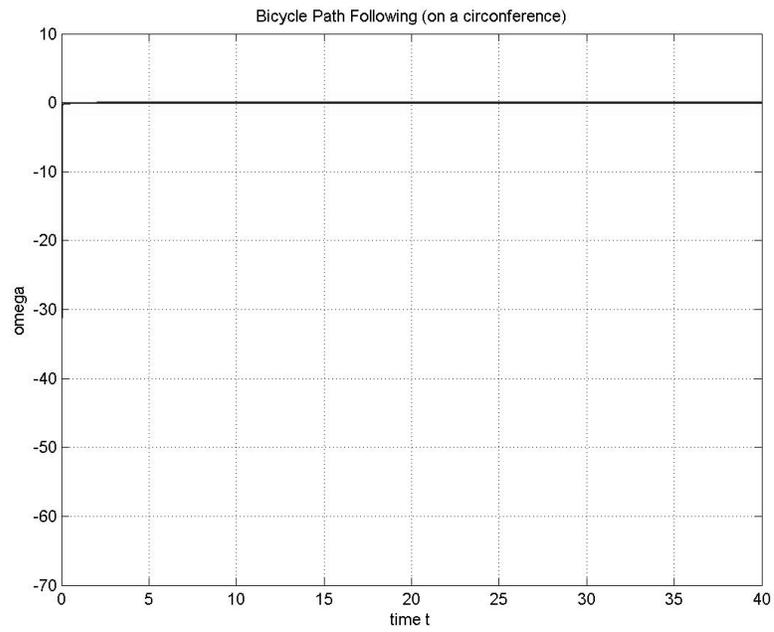
(c)



(d)

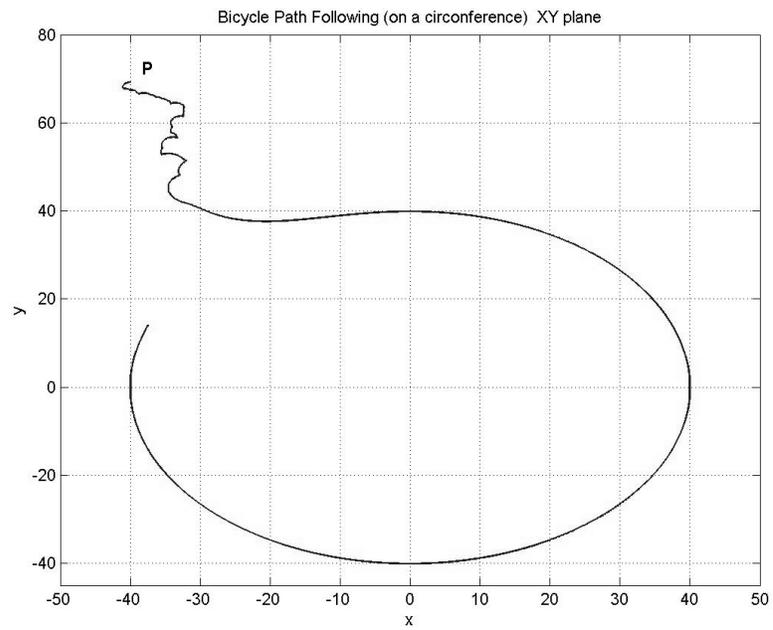


(e)

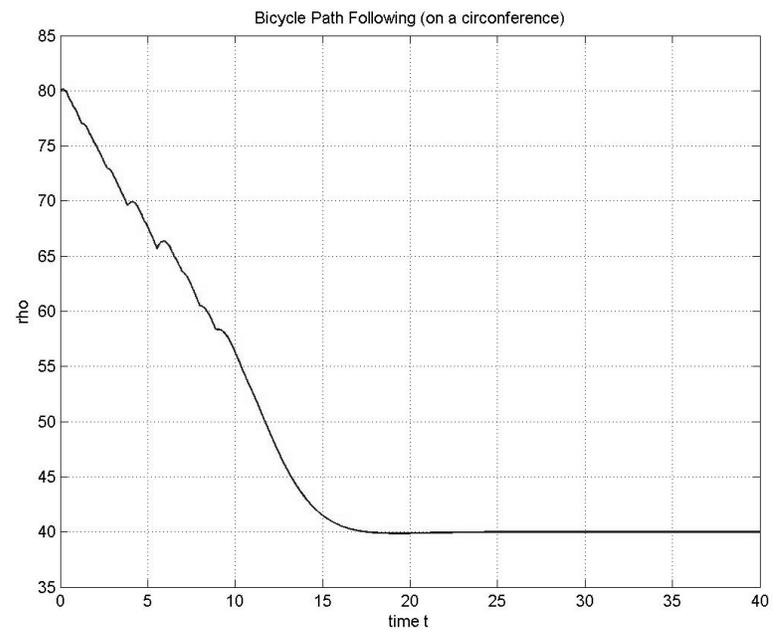


(f)

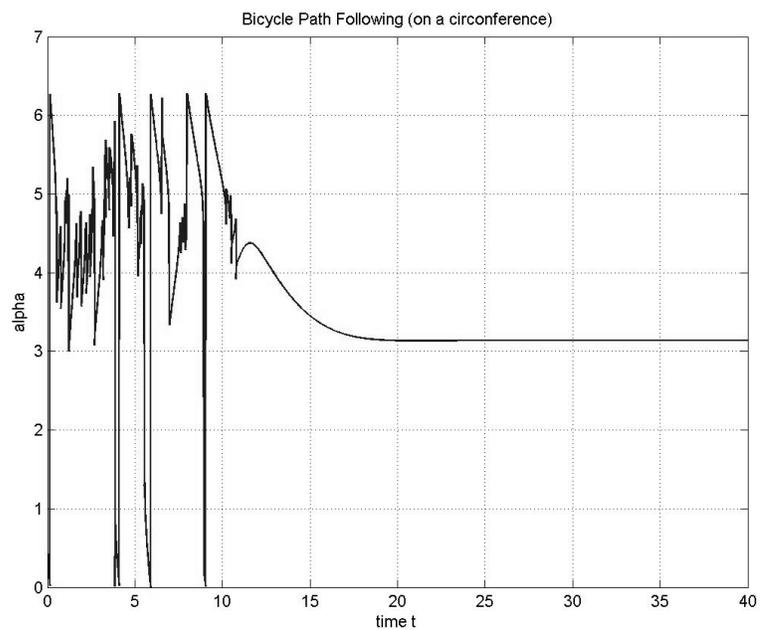
Figura 5.15: Andamento del biciclo nel piano XY (a) e delle variabili ρ (b), α (c), β (d), φ (e) e ω (f).



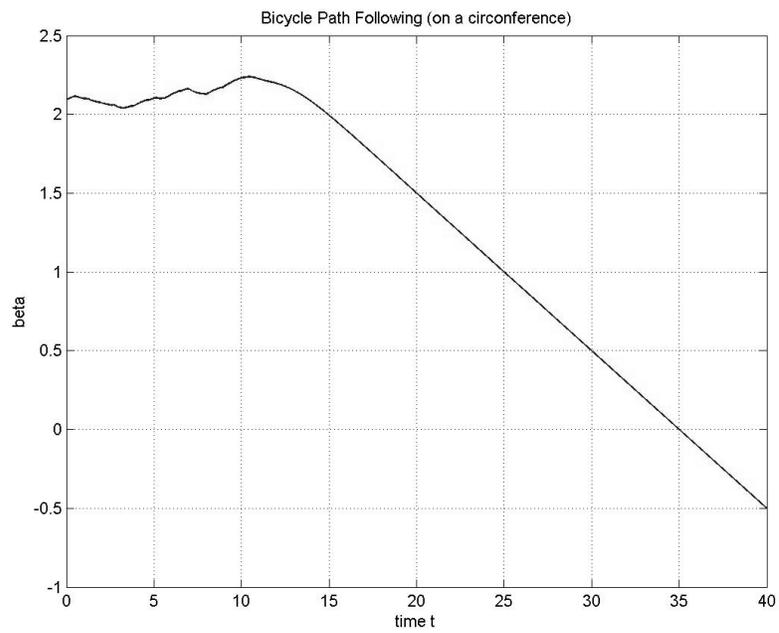
(a)



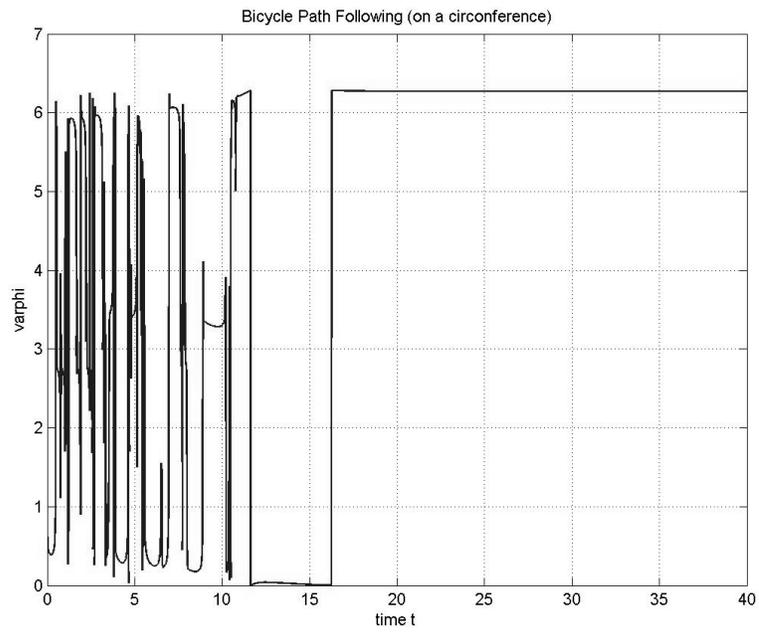
(b)



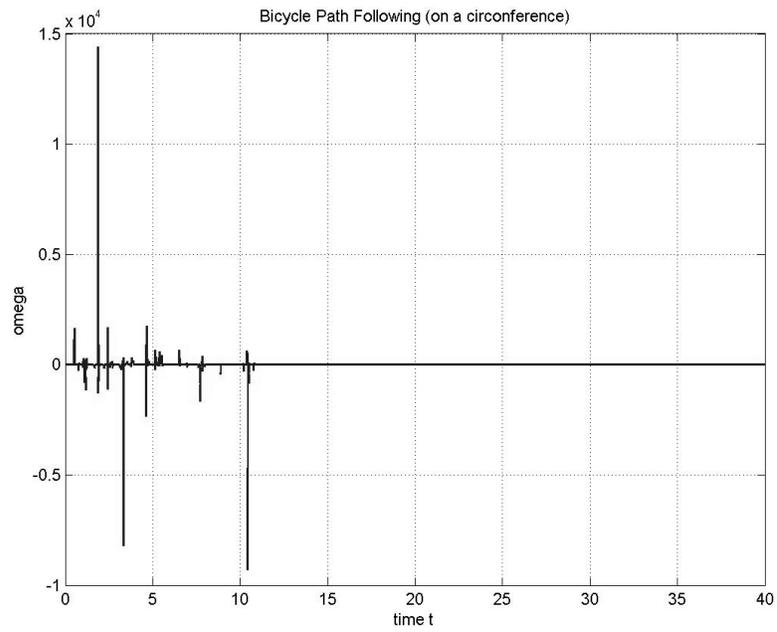
(c)



(d)

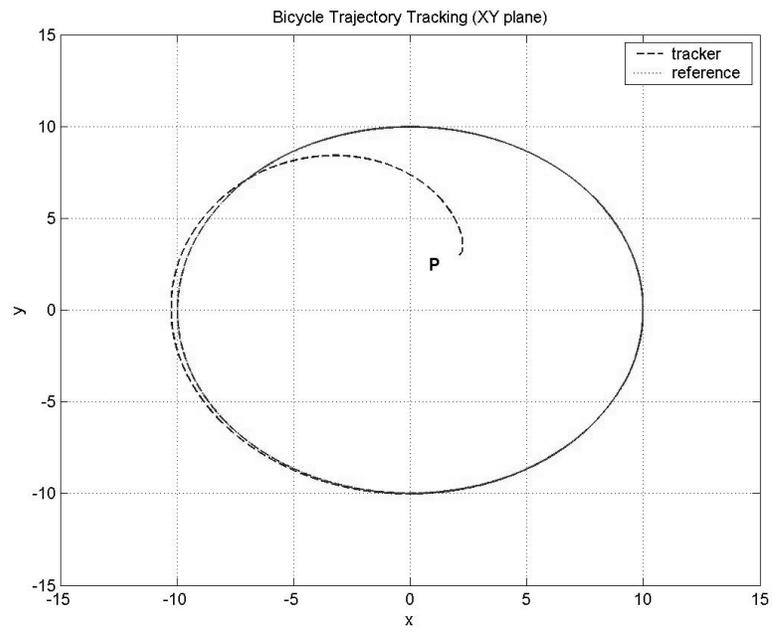


(e)

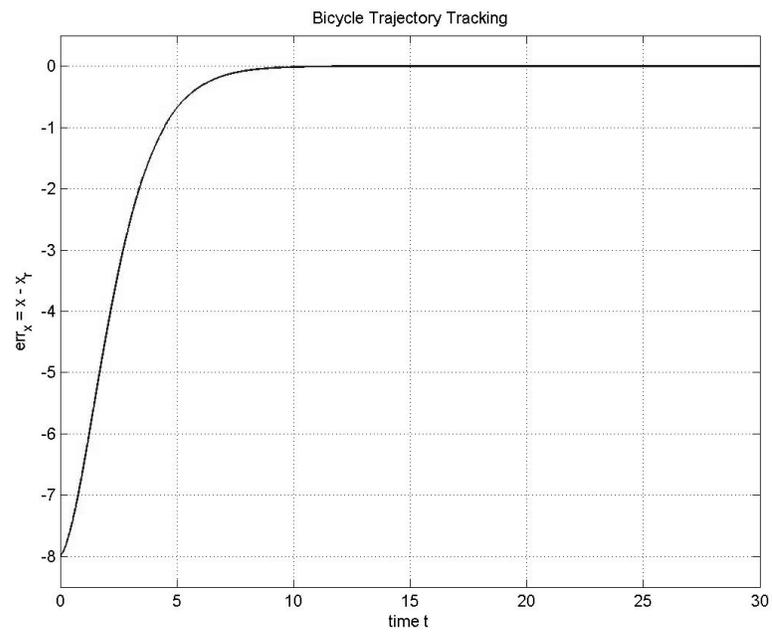


(f)

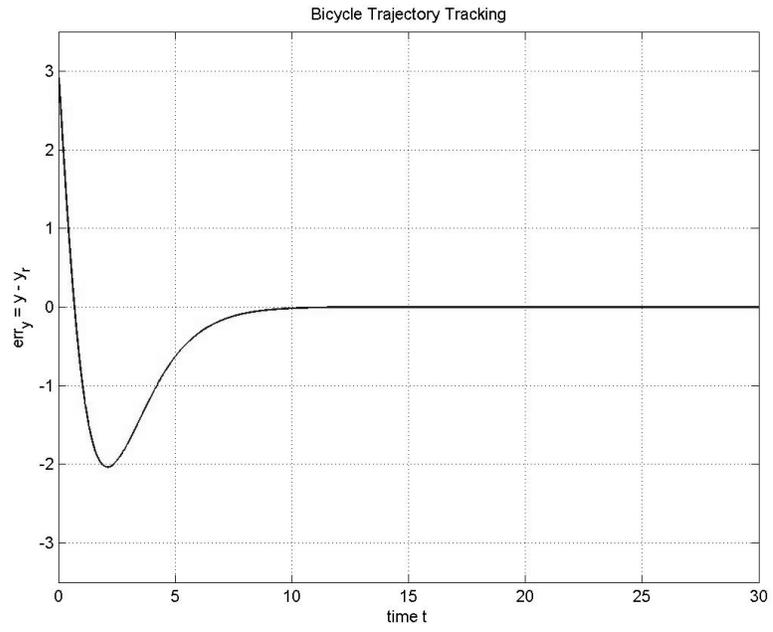
Figura 5.16: Andamento del biciclo nel piano XY (a) e delle variabili ρ (b), α (c), β (d), φ (e) e ω (f).



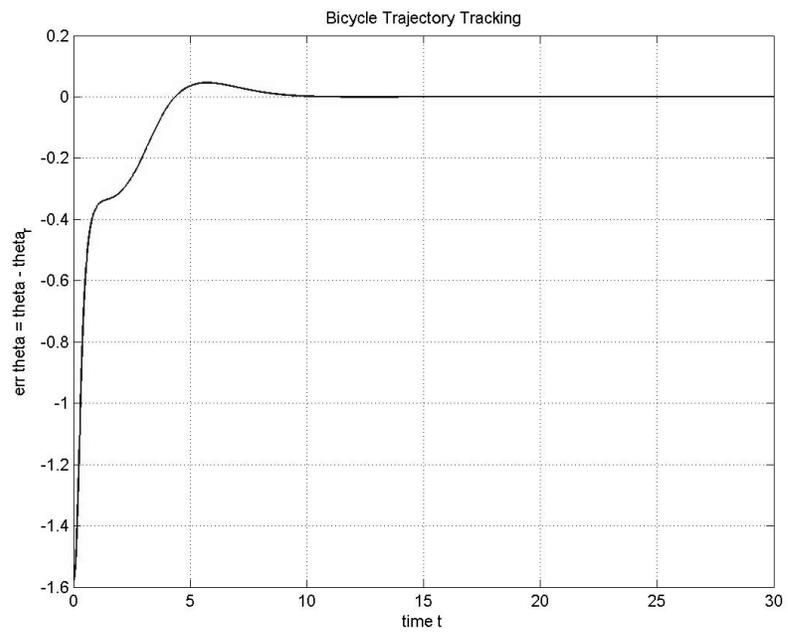
(a)



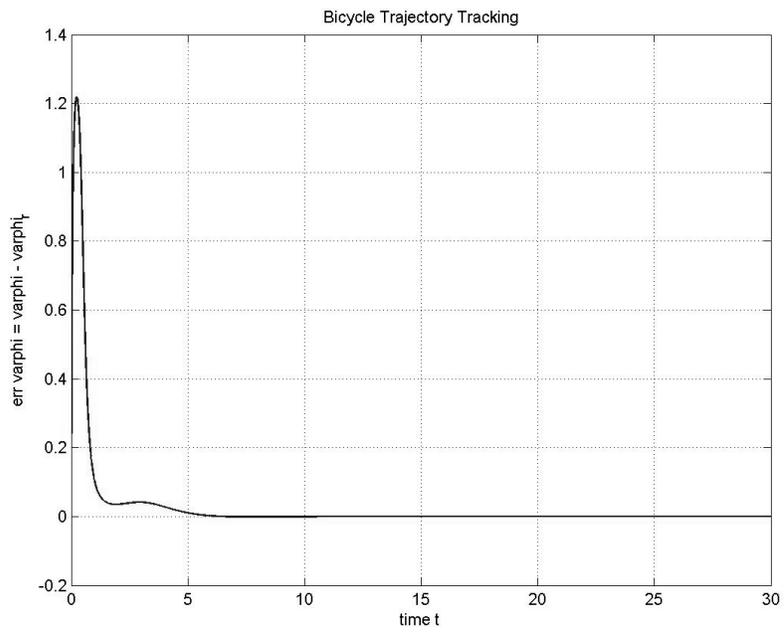
(b)



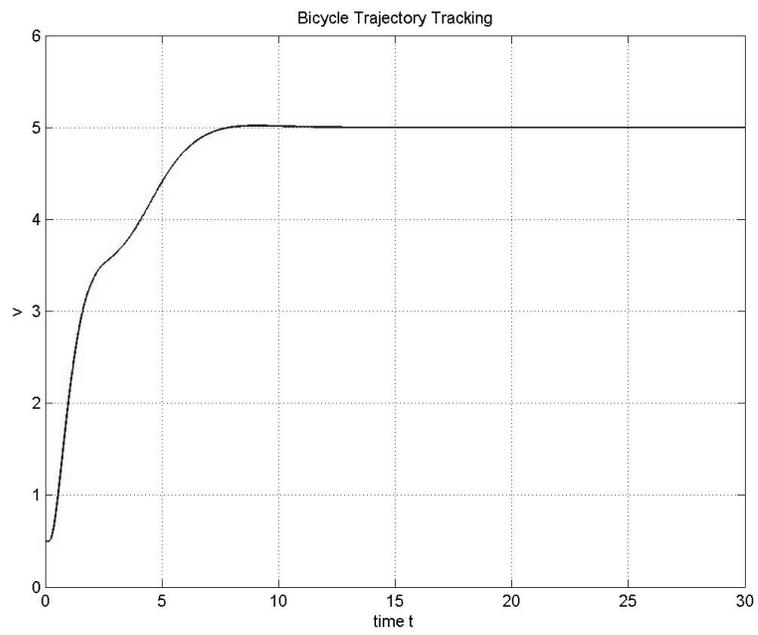
(c)



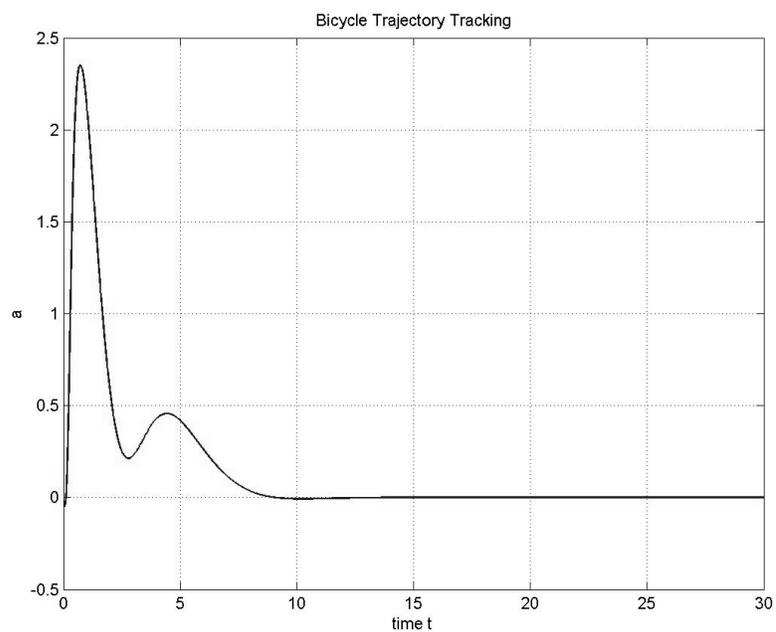
(d)



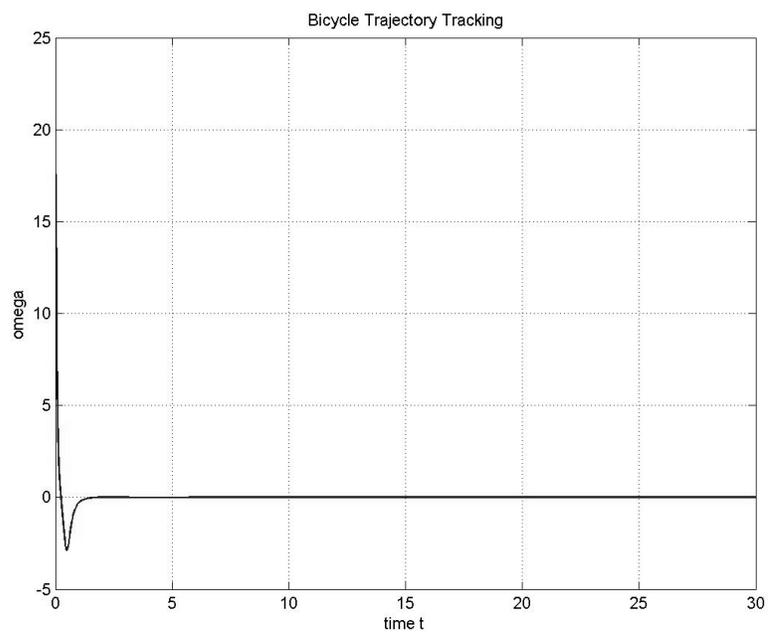
(e)



(f)



(g)



(h)

Figura 5.18: Andamento del biciclo nel piano XY (a), degli errori $e_x = x - x_r$ (b), $e_y = y - y_r$ (c), $e_\theta = \theta - \theta_r$ (d), $e_\varphi = \varphi - \varphi_r$ (e), delle variabili v e a e del controllo ω (h).