



Principi di bioingegneria

Lezione 13

Principi di misure elettroniche

Gabriele Maria Fortunato

gabriele.fortunato@unipi.it



Importanza delle misure elettriche per un ingegnere biomedico

- Un ingegnere deve saper fare le misure
- Un ingegnere biomedico potrebbe trovarsi a progettare dispositivi elettromedicali:
 - Necessità di effettuare misure di base sui prototipi per verificarne il corretto funzionamento
 - Necessità di conoscere le principali grandezze di natura elettrica rilevabili sul corpo umano (bio-impedenze e bio-potenziali) e le problematiche relative alla loro misura

Grandezze elettriche di interesse e loro unità di misura

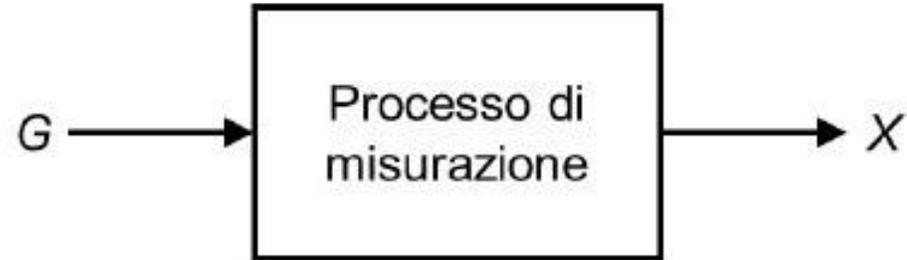
- Differenza di potenziale (o tensione) [volt — V]: V
- Intensità di corrente (o corrente) [ampere — A]: I
- Resistenza [ohm - Ω]: R
- Impedenza [ohm - Ω]: $Z = R + jX$ (R = resistenza; X = reattanza)
- Ammettenza [siemens - S]: $Y = G + jB$ (G = conduttanza; B = suscettanza)
- Capacità [farad — F]: C
- Induttanza [henry - H]: L
- Permettività elettrica [farad/metro — F/m]: ϵ
- Permeabilità magnetica [henry/metro — H/m]: μ
- Intensità di campo elettrico [volt/metro — V/m]: E
- Intensità di campo magnetico [ampere/metro — A/m]: H
- Induzione magnetica [tesla — T]: B

Perchè misuriamo?

- Per passare il tempo....
- Per conoscere la misura di una specifica grandezza o di un fenomeno e sulla base di essa prendere una decisione
 - è essenziale sapere anche il valore dell'incertezza per capire il rischio nel prendere tale decisione
- Per verificare una legge fisica che regola un certo fenomeno

Processo di misurazione ed errore di misura

- MISURA DIRETTA:



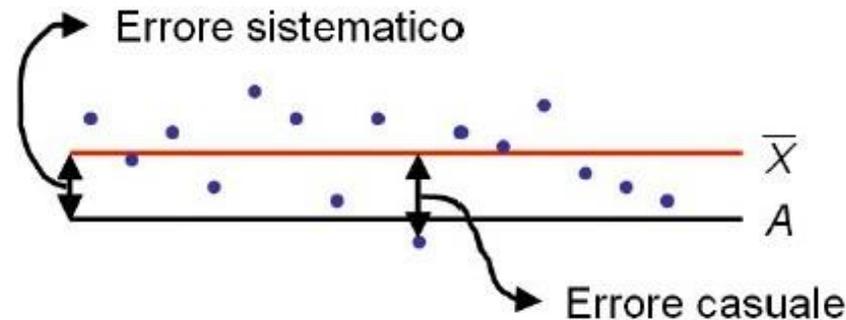
- G: grandezza sotto misura (misurando)
- A: valore “vero” del misurando
- X: lettura strumentale (risultato di misura)
- $E = X - A$: errore assoluto di misura
- $e = \frac{E}{A} \cong \frac{E}{X}$: errore relativo di misura (spesso espresso in %, ppm, ecc...)

Contributi di errore (incertezza) in una misurazione

- **Incerteza di definizione**: numero finito di dettagli nella definizione del misurando
- **Grandezze di influenza**: grandezze diverse dal misurando che influenzano la lettura strumentale
- **Rumore**: sempre presente nelle misure elettriche a meno di non trovarsi a una temperatura pari allo 0 assoluto!
- **Risoluzione finita**: gli strumenti sono ormai tutti digitali e “quantizzano” la misura
- **Incerteza strumentale**: dovuta a imperfezioni nello strumento e alla deriva nel tempo delle sue caratteristiche
- **Incerteza di taratura** (campioni di riferimento): il processo di taratura ha una sua incerteza, per esempio quella legata ai campioni ma anche alla ripetibilità delle letture strumentali
- **Effetto di carico**: alterazione del misurando ad opera dello strumento di misura. Se è trascurabile (almeno un ordine di grandezza inferiore) rispetto agli altri contributi si può tralasciare. Altrimenti va corretto (portando un suo contributo di incerteza nella correzione)

Contributi di errore (incertezza) in una misurazione

- Effetti sistematici: danno luogo a errori costanti in una serie di misurazioni ripetute
- Effetti casuali: in una serie di misurazioni ripetute producono errori che variano in maniera non prevedibile.



Effetto dell'errore sistematico e casuale su una serie di misure ripetute.

Modulo massimo dell'errore

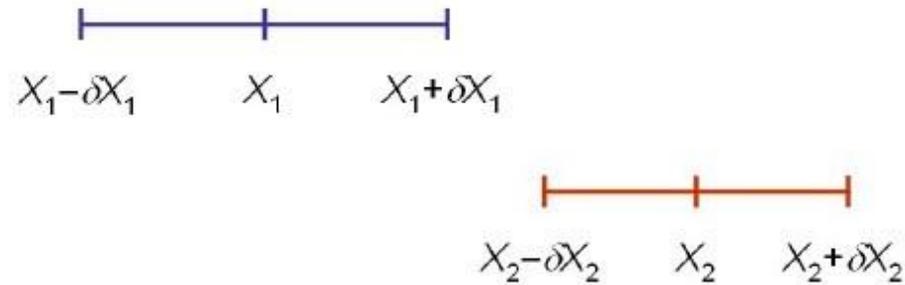
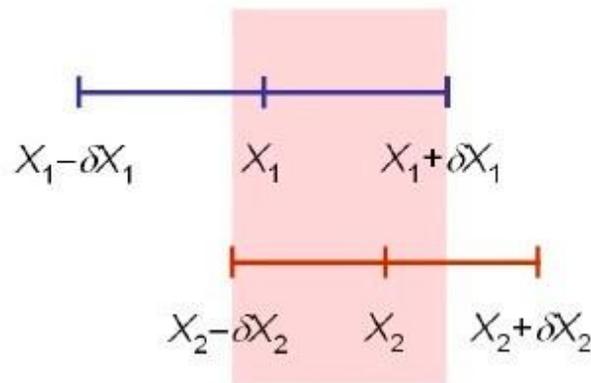
$$|E_X| \leq \delta X.$$



$$G = X \pm \delta X$$

I produttori degli strumenti di misura chiamano questo **accuracy**

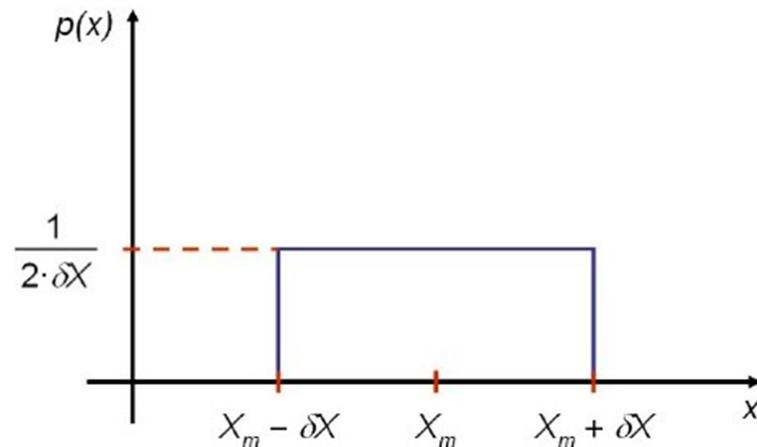
- L'errore massimo ci permette di **prendere una decisione** sulla base del risultato della nostra misura e di confrontare tra di loro due valori misurati riferiti allo stesso misurando, introducendo il **concetto di compatibilità metrologica** tra due risultati di misura.



Incertezza di misura

(definita dalla GUM — Guide to the expression of uncertainty in measurement)

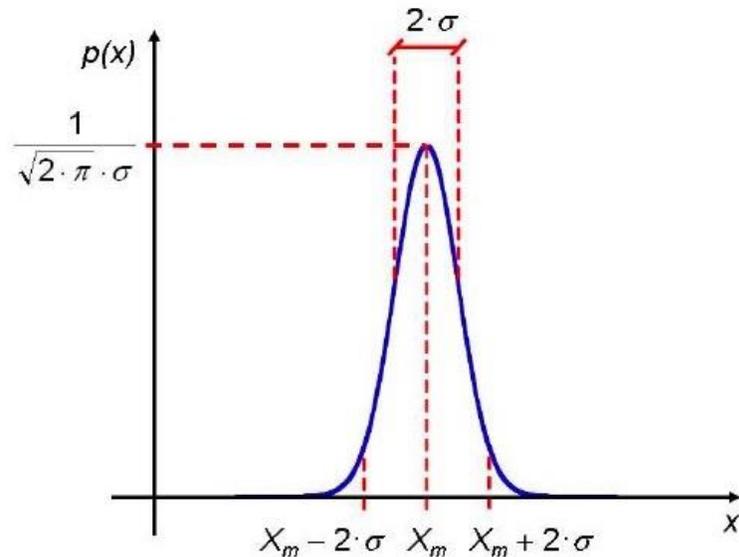
- A causa della presenza dell'errore di misura, non noto e quindi aleatorio, il risultato di una misurazione, ovvero la misura, è una **variabile aleatoria**
- Che distribuzione di probabilità può essere associata a una misura?
- Esempio: misura diretta caratterizzata da effetti sistematici strumentali per i quali disponiamo del dato di “**accuracy**” riportato dal costruttore (o sul certificato di taratura)



- Distribuzione uniforme (o rettangolare)
- $X_m =$ **lettura strumentale** (misura)
- $\delta X =$ **errore massimo** strumentale (accuracy)
- $\sigma = \frac{\delta x}{\sqrt{3}}$ (**deviazione standard**)

Incertezza di misura

- Esempio: misura diretta caratterizzata da effetti casuali che possiamo considerare il risultato della combinazione di diversi fattori aleatori indipendenti (\Rightarrow **teorema del limite centrale**)



- Distribuzione gaussiana (o normale)
- $X_m =$ **lettura strumentale** (misura)
- $\sigma =$ deviazione standard della misura (nota a priori o stimabile dall'osservazione di misure ripetute)
- $\Pr\{X_m - \sigma \leq X \leq X_m + \sigma\} \cong 68\%$
- $\Pr\{X_m - 2\sigma \leq X \leq X_m + 2\sigma\} \cong 95\%$
- $\Pr\{X_m - 3\sigma \leq X \leq X_m + 3\sigma\} \cong 99.7\%$

- Incertezza: parametro che caratterizza la dispersione della misura
- Incertezza tipo (standard): deviazione standard della misura

Valutazione dell'incertezza di misura

- Valutazione di categoria (tipo) A dell'incertezza tipo
 - Si eseguono una serie di N misure (osservazioni) ripetute (X_1, X_2, \dots, X_N)
 - Risultato di misura: media aritmetica

$$X_m = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i$$

- Incertezza tipo: stima della deviazione standard della media delle N misure

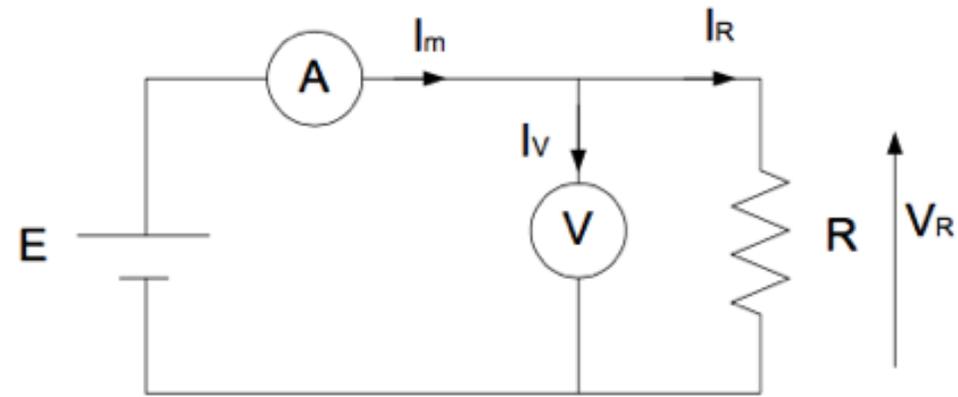
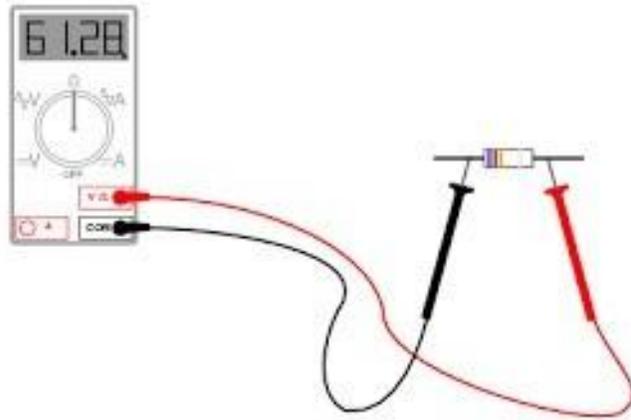
$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (X_i - X_m)^2}$$

- Valutazione di categoria (tipo) B dell'incertezza tipo
 - Si esegue una singola misurazione
 - Incertezza tipo: stima della deviazione standard della misura sulla base di informazioni note
 - Esempio: misura diretta caratterizzata da effetti sistematici strumentali per i quali disponiamo del dato di "accuracy" riportato dal costruttore (o sul certificato di taratura)

$$\sigma = \frac{\partial X}{\sqrt{3}}$$

- Incertezza assoluta: σ
- Incertezza relativa $\sigma / |X|$

Misura indiretta



$$R = \frac{V}{I}$$

Propagazione dell'incertezza di misura per misure indirette

- **Misura indiretta** (supponiamo ci siano 2 sole **grandezze di ingresso**, ma la formula è immediatamente generalizzabile a un numero qualsiasi di grandezze di ingresso):

$$Y = f(X_1, X_2)$$

- L'incertezza tipo della misura Y della **grandezza di uscita** si chiama incertezza composta (U_c)
- Ipotesi: X_1 e X_2 sono variabili aleatorie scorrelate e le rispettive incertezze tipo (u_1, u_2) sono "piccole" (ovvero la **funzione di misura è linearizzabile**)

$$u_c = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial X_1}\right)^2 u_1^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial X_2}\right)^2 u_2^2} \text{ (legge di propagazione dell'incertezza)}$$

- Coefficienti di sensibilità:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial X_i}\right)$$

Propagazione dell'incertezza di misura per misure indirette

- Esempio: somma di due grandezze

$$Y = X_1 + X_2$$

$$u_c = \sqrt{(1)^2 u_1^2 + (1)^2 u_2^2} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$$

$$u_c^2 = u_1^2 + u_2^2 \text{ (somma delle varianze assolute)}$$

- Esempio: differenza di due grandezza

$$Y = X_1 - X_2$$

$$u_c = \sqrt{(1)^2 u_1^2 + (-1)^2 u_2^2} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$$

$$u_c^2 = u_1^2 + u_2^2 \text{ (somma delle varianze assolute)}$$

Propagazione dell'incertezza di misura per misure indirette

- Esempio: prodotto di due grandezze

$$Y = X_1 \cdot X_2$$

$$u_c = \sqrt{(X_2)^2 u_1^2 + (X_1)^2 u_2^2} = \sqrt{X_2^2 u_1^2 + X_1^2 u_2^2}$$

$$u_c^2 = X_2^2 u_1^2 + X_1^2 u_2^2$$

- Consideriamo l'incertezza relativa (al quadrato)

$$\left(\frac{u_c}{|Y|}\right)^2 = \frac{u_c^2}{Y^2} = \frac{X_2^2 u_1^2 + X_1^2 u_2^2}{X_1^2 X_2^2} = \frac{u_1^2}{X_1^2} + \frac{u_2^2}{X_2^2} = \left(\frac{u_1}{X_1}\right)^2 + \left(\frac{u_2}{X_2}\right)^2 \text{ (somma delle varianze relative)}$$

Propagazione dell'incertezza di misura per misure indirette

- Esempio: rapporto di due grandezze

$$Y = \frac{X_1}{X_2}$$

$$u_c = \sqrt{\left(\frac{1}{X_2}\right)^2 u_1^2 + \left(-\frac{X_1}{X_2^2}\right)^2 u_2^2} = \sqrt{\frac{u_1^2}{X_2^2} + \frac{X_1^2 u_2^2}{X_2^4}}$$

$$u_c^2 = \frac{u_1^2}{X_2^2} + \frac{X_1^2 u_2^2}{X_2^4}$$

- Consideriamo l'incertezza relativa (al quadrato)

$$\left(\frac{u_c}{|Y|}\right)^2 = \frac{u_c^2}{Y^2} = \frac{X_2^2 u_1^2}{X_1^2 X_2^2} + \frac{X_2^2 X_1^2 u_2^2}{X_1^2 X_2^4} = \frac{u_1^2}{X_1^2} + \frac{u_2^2}{X_2^2} = \left(\frac{u_1}{X_1}\right)^2 + \left(\frac{u_2}{X_2}\right)^2 \text{ (somma delle varianze relative)}$$

Distribuzione di probabilità della misura indiretta

- Abbiamo detto che una misura può essere rappresentata da una variabile aleatoria
- Per la misura diretta abbiamo visto che le due distribuzioni più plausibili sono quella Uniforme (errori sistematici) e Gaussiana (errori casuali)
- Per la misura indiretta? $Y=f(X_1, X_2, \dots)$
- Teorema del limite centrale: se $Y=X_1+X_2+\dots+X_n$ allora Y è una gaussiana.
 - Ma nel nostro caso il numero di misure è piccolo
- Anche nel caso di una misura indiretta è possibile invocare (in maniera forzata) il teorema del limite centrale e ipotizzare (in prima approssimazione) una distribuzione gaussiana

Distribuzione di probabilità della misura indiretta

- Le incertezze tipo (u_i) delle misure delle grandezze di ingresso sono valutate con approccio di categoria A o B
- Categoria A: indicato per caratterizzare gli effetti casuali (che, però, si potrebbero anche valutare con approccio di categoria B se conosciamo o sappiamo valutare per altra via la deviazione standard, senza utilizzare lo stimatore statistico)
- Categoria B: indicato per caratterizzare gli effetti sistematici strumentali a partire dai dati di manuale o dei certificati di taratura (questi effetti, però, si potrebbero anche valutare con approccio di categoria A effettuando misure ripetute con N copie diverse dello stesso strumento...)
- Se sono stati utilizzati entrambi gli approcci per valutare le due componenti (casuale e sistematica strumentale), perché entrambe rilevanti, bisogna combinare le due incertezze per fornire l'incertezza tipo della misura
- I due contributi sono additivi (e indipendenti...) e quindi vale la regola della somma di due grandezze scorrelate:

$$u = \sqrt{u_A^2 + u_B^2}$$

Incertezza estesa di misura e probabilità di copertura

(come definita dalla GUM)

- Incertezza estesa (U): definisce un intervallo intorno al risultato di misura $X_m \pm U$ che contiene una frazione nota p (probabilità di copertura) della distribuzione di probabilità della misura
- Abbiamo una probabilità p che la misura cada nell'intervallo $X_m \pm U$
- L'incertezza estesa consente di prendere decisioni a partire da una misura con un rischio "calcolabile" $U = k_p u$:
 - k_p : fattore di copertura (> 1)
 - Per ricavare k_p bisogna conoscere, oltre a u , anche la distribuzione della misura

Incertezza estesa di misura e probabilità di copertura

- Esempio: misura diretta caratterizzata da effetti sistematici strumentali => distribuzione rettangolare o uniforme

$$U = p\delta X \rightarrow U = p\sqrt{3}\sigma \rightarrow k_p = \sqrt{3}p$$

- Esempio: misura diretta caratterizzata da effetti casuali oppure misura indiretta => distribuzione gaussiana
- $p=95\%$ => $k_p = 2$
- $p = 99.7\%$ => $k_p = 3$
- p arbitrario => valori tabulati

Compatibilità metrologica delle misure

- Si definisce compatibilità metrologica delle misure quella proprietà di un insieme di risultati di misurazioni di un determinato misurando per cui il valore assoluto della differenza di una qualsiasi coppia di misure dell'insieme è minore di un multiplo prestabilito dell'incertezza tipo associata a tale differenza (che rappresenta quindi, per definizione, un'incertezza estesa).
- un esempio pratico: due misurazioni (X_{1m} , X_{2m}) di una grandezza G che supponiamo essere caratterizzate entrambe da una distribuzione gaussiana con incertezze tipo pari, rispettivamente, a σ_1 e σ_2 .
- Consideriamo la differenza delle due misure. Il risultato dovrebbe essere ancora una variabile aleatoria con:
 - $X_d = X_{1m} - X_{2m}$; $\sigma_d = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$
 - $\Pr\{|X_d| \leq 2 \cdot \sigma_d\} = 95\%$

Regole per la scrittura dei risultati di una misurazione

- La scrittura corretta con la quale riportare il risultato della misurazione sarà:

$$G = (X \pm \delta X) \text{ u.d.m.}$$

$$G = (X \pm U) \text{ u.d.m.}$$

- dove X è il valore numerico della grandezza, “u.d.m.” sta a rappresentare il simbolo dell’unità di misura appropriata e le due forme fanno riferimento, rispettivamente, al caso di errore massimo (δX) o di incertezza estesa (U).

Numero di cifre significative

- Il numero di **cifre significative** è pari al numero di cifre complessive presenti nell'espressione numerica, contate a partire dalla prima cifra diversa da zero procedendo da sinistra verso destra.
- l'incertezza va espressa con, al più, **due cifre significative** (stesso discorso vale per l'errore massimo).
- la **misura** va riportata in maniera coerente rispetto all'incertezza, ovvero la misura va riportata con lo stesso numero di **cifre dopo la virgola** dell'incertezza.
 - se esprimessimo la misura con più cifre dopo la virgola dell'incertezza, staremmo aggiungendo delle informazioni prive di significato, in quanto completamente coperte dall'incertezza stessa.
 - se la misura avesse meno cifre dopo la virgola dell'incertezza, l'errore dovuto all'arrotondamento della misura sarebbe di entità tale da influire sull'incertezza riportata!
 - usare una sola cifra significativa per l'incertezza.

Regola generale

- Riportare l'incertezza con due cifre significative, a parte i casi in cui la seconda cifra significativa porti a un numero complessivo di cifre dopo la virgola superiori rispetto a quelle stimabili con la misura e sia quindi più adeguato usare una sola cifra significativa per l'incertezza.
- L'incertezza va sempre arrotondata per eccesso.
- La misura va sempre arrotondata al più vicino.

Esempio pratico 1

- Supponiamo di avere misurato, con tecnica volt-amperometrica, il valore R di resistenza di un resistore e di avere ottenuto una misura pari a $10,06125 \text{ k}\Omega$ con un'incertezza estesa, con probabilità di copertura del 95%, di $0,16116 \text{ k}\Omega$.
- Come prima cosa, approssimiamo l'incertezza a due cifre significative, ottenendo $0,17 \text{ k}\Omega$
- A questo punto l'incertezza è espressa con due cifre dopo la virgola e quindi arrotondiamo allo stesso modo anche la misura, ottenendo $10,06 \text{ k}\Omega$
- Esprimiamo dunque il risultato come: **$R = (10,06 \pm 0,17) \text{ k}\Omega$** .

Esempio pratico 2

- Supponiamo di avere misurato, con un multimetro digitale, il valore V di tensione continua erogata a vuoto da un alimentatore stabilizzato e di avere ottenuto una misura pari a 1,497 V con una incertezza di caso peggiore di 0,008485 V.
- Come prima cosa, approssimiamo l'incertezza a due cifre significative, ottenendo 0,0085 V.
- A questo punto, però, ci rendiamo conto che l'incertezza è espressa con quattro cifre dopo la virgola, mentre la misura siamo riusciti a effettuarla apprezzando solo fino alla terza cifra dopo la virgola.
- Converrà, quindi, esprimere l'incertezza con una sola cifra significativa, ottenendo 0,009 V.
- A questo punto la misura non necessita di alcun arrotondamento (se avessimo scelto di usare due cifre significative per l'incertezza avremmo dovuto aggiungere, in modo arbitrario, uno 0 in coda alla misura).
- Esprimiamo dunque il risultato come: $V = (1,497 \pm 0,009) \text{ V}$.

Esempio pratico 3

- Supponiamo di avere misurato, con un oscilloscopio digitale, la frequenza f di un segnale periodico di tensione e di avere ottenuto una misura pari a 125368,4 Hz, con un'incertezza di caso peggiore di 109,32 Hz.
- Ci rendiamo subito conto che, lavorando in Hz, non è possibile scrivere l'incertezza con due cifre significative. Infatti saremmo costretti a riportare un valore di 110 Hz che, per quanto detto prima, ha in realtà tre cifre significative (infatti lo 0 in coda è, a rigore, significativo). Dobbiamo, pertanto, passare a esprimere il tutto in kHz.
- Otterremo quindi, per l'incertezza espressa a due cifre significative, il valore di 0,11 kHz, mentre la misura, espressa con lo stesso numero di cifre dopo la virgola dell'incertezza, diventerà 125,37 kHz.
- Il risultato sarà dunque espresso come: $f = (125,37 \pm 0,11) \text{ kHz}$.

Esempio di calcolo di incertezza per una misura indiretta

- Supponiamo di voler misurare indirettamente la resistenza di un resistore a partire dalle misure della differenza di potenziale ai capi del resistore stesso e della corrente che lo attraversa.
- Vogliamo corredare il risultato della misurazione di incertezza estesa con probabilità di copertura del 95%.
- Le due misure dirette di tensione e corrente portano alle seguenti letture strumentali: $V = 0.868 \text{ V}$; $I = 18.59 \text{ mA}$
- A questo punto possiamo ricavare il valore della resistenza incognita:

$$R = \frac{V}{I} = \frac{0.868 \text{ V}}{18.59 \text{ mA}} = \frac{0.868 \text{ V}}{18.59 \text{ mA}} \cong 0.04669177 \text{ k}\Omega = 46.69177 \Omega$$

Esempio di calcolo di incertezza per una misura indiretta

- Supponiamo di aver riscontrato che l'unico contributo di incertezza è quello legato agli effetti sistematici strumentali. Ricaviamo quindi gli errori massimi delle due misure dirette sulla base delle specifiche di "accuracy" (approccio di categoria B):

$$\delta V = 0.00534 \text{ V} \quad ; \quad \delta I = 0.1959 \text{ mA}$$

- Poiché, in assenza di altre informazioni, ipotizziamo che i risultati delle misurazioni dirette siano a distribuzione uniforme, a partire dagli errori massimi appena valutati si ha per le incertezze tipo di tensione e corrente:

$$u_V = \frac{\delta V}{\sqrt{3}} \quad ; \quad u_I = \frac{\delta I}{\sqrt{3}}$$

- Per calcolare l'incertezza composta della misura indiretta di resistenza ipotizziamo che le misure di tensione e corrente siano scorrelate (e che le rispettive incertezze siano "piccole") e sfruttiamo la legge di propagazione dell'incertezza (nel caso particolare di rapporto):

$$\left(\frac{u_R}{R}\right)^2 = \left(\frac{u_V}{V}\right)^2 + \left(\frac{u_I}{I}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad u_R = R \sqrt{\left(\frac{u_V}{V}\right)^2 + \left(\frac{u_I}{I}\right)^2} = R \sqrt{\frac{1}{3} \left[\left(\frac{\delta V}{V}\right)^2 + \left(\frac{\delta I}{I}\right)^2 \right]}$$

Esempio di calcolo di incertezza per una misura indiretta

- Si ottiene pertanto

$$u_R = 46.69177 \Omega \sqrt{\frac{1}{3} \left[\left(\frac{0.00534 \text{ V}}{0.868 \text{ V}} \right)^2 + \left(\frac{0.1959 \text{ mA}}{18.59 \text{ mA}} \right)^2 \right]} \cong 0.328943 \Omega$$

- Applicando “forzatamente” il teorema del limite centrale possiamo ipotizzare che la misura indiretta di R sia caratterizzata da distribuzione gaussiana.
- L'incertezza estesa con livello di confidenza del 95%, per una misura caratterizzata da distribuzione gaussiana, corrisponde alla scelta di un fattore di copertura $K_p = 2$. Pertanto, dobbiamo moltiplicare l'incertezza composta per 2:

$$U_R = k_p u_R = 2 \cdot 0.328943 \Omega = 0.657886 \Omega$$

- Possiamo infine procedere alla scrittura del risultato:

$$R = (46.69 \pm 0.66) \Omega$$