Appunti di
Controllo dei Robot
(Fondamenti di Automatica - IV)

Tratti dal corso tenuto da
Antonio Bicchi

Con la collaborazione di
P. Salaris, G. Grioli, M. Garabini, A. Settimi, A. Fagiolini *et al.*

Versione Provvisoria del 29 Novembre 2024

Contents

1 Introduzione al Controllo dei Robot **7**

2 Controllo Cinematico **9**
2.1 Controllo Cinematico di Bracci Robotici 9
2.1.1 Controllo di Postura 10
2.1.2 Inseguimento di Movimento 14
2.1.3 Uso del Jacobiano Geometrico 15
2.1.4 Tecnica di Inversione a Priorità di Compito 15
2.1.5 Controllo su Traccia 20
2.2 Controllo cinematico di veicoli planari 25
2.2.1 Veicolo vincolato su linea retta 26
2.2.2 Modello di un veicolo di tipo uniciclo 28
2.2.3 Controllo di traccia con un uniciclo 31
2.2.4 Inseguimento di moto con un uniciclo 38
2.2.5 Controllo della postura di un uniciclo 46
2.3 Veicolo planare con vincolo di ruota doppia (biciclo) 51
2.3.1 Inseguimento di traccia con biciclo 54

3 Dynamic Control of Fully Actuated Mechanical Systems **63**
3.1 Dynamic Control of Unconstrained Systems - Articulated Arms 63
3.1.1 Proportional-Derivative Control at the Joints 64
3.1.2 Controllo PD nello spazio operativo 67
3.1.3 Controllo a Coppia Calcolata 68
3.1.4 Controllo a Coppia Calcolata nello Spazio Operativo . 70
3.1.5 Robustezza del Controllo a Coppia Calcolata 72
3.1.6 Controllo a Struttura Variabile 75
3.1.7 Controllo in Backstepping 77
3.1.8 Confronto tra le tecniche di controllo ai giunti. 80
3.2 Constrained Systems with Complete Actuation 80
3.2.1 Modeling 80
3.2.2 Backstepping Control - General Case 82

3.2.3 Backstepping Control of Constrained Lagrangian Systems . . . 84
3.2.4 Modello e controllo dinamico di un uniciclo . . . 84

4 Adaptive and Learning Control 95
4.1 Kinematic Control with Uncertain Geometric Parameters . . . 95
4.1.1 Control with Uncertain Kinematics . . . 95
4.2 Controllo Dinamico con Parametri Inerziali Incerti . . . 99
4.2.1 Controllo a Coppia Calcolata Adattivo . . . 101
4.2.2 Adaptive Backstepping Control . . . 103
4.2.3 Li-Slotine Adaptive Controller . . . 105
4.2.4 Convergenza della stima dei parametri . . . 106
4.2.5 Adaptative Backstepping Control for Dynamic Path Tracking with a Unicycle . . . 107

5 Introduzione ai Sistemi Intrinsecamente Nonlineari 111
5.1 Esistenza e unicità delle soluzioni . . . 112
5.2 Proprietà strutturali e nonlinearità intrinseche. . . . 113
5.2.1 Stabilità . . . 114
5.2.2 Stabilizzabilità . . . 115
5.2.3 Raggiungibilità . . . 116
5.2.4 Osservabilità . . . 117

6 Nonlinear Systems: a Survival Kit 121
6.1 Description of the state space . . . 122
6.1.1 Coordinate changes and tangent spaces . . . 124
6.2 Analysis tools . . . 130
6.2.1 Functions, Vectors and Covectors . . . 130
6.2.2 Operations on Functions, Vectors and Covectors . . . 133
6.2.3 Distributions and Codistributions . . . 135
6.2.4 Operations on Distributions and Codistributions . . . 138
6.2.5 Integrability . . . 140
6.2.6 Integrability of Kinematic Constraints . . . 141

7 Controllability of Nonlinear Systems 147
7.1 Controllability: Definitions and Theorems . . . 150
7.2 System Decomposition in Controllable Form . . . 153
7.3 Local Weak Controllability . . . 155
7.4 From Accessibility to Controllability . . . 156

8 Osservabilità di sistemi non lineari **161**
8.1 Approccio Integrale e Gramiano di Osservabilità 162
8.2 Approccio Analitico e Codistribuzione di Osservablità 167
8.3 Approccio Geometrico Differenziale e Scomposizione di Osservabiiltà 169
8.4 Applicazioni alla identificazione parametrica 173
8.4.1 Simultaneous Localization and Mapping (SLAM) . . . 175

9 Linearizzazione in retroazione **181**
9.1 Introduzione 181
9.2 Linearizzazione per Cambiamento di Variabili 182
9.3 Linearizzazione in Retroazione I/O per sistemi SISO 183
9.3.1 La Zero Dinamica 192
9.3.2 Zero Dinamica nei Sistemi Lineari 197
9.4 Inseguimento di traiettorie 199
9.5 Linearizzazione in Retroazione Ingresso–Stati 202
9.6 Linearizzazione in retroazione MIMO 207
9.6.1 Linearizzazione Ingresso/Stati MIMO 210
9.6.2 Linearizzazione in retroazione dinamica 212

Chapter 1

Introduzione al Controllo dei Robot

La grandissima maggioranza delle macchine a controllo automatico, dei sistemi per l'automazione ed in particolare dei robot, sono caratterizzate da dinamica fortemente nonlineare. Inoltre, per la loro stessa natura riprogrammabile e la capacità di modificare reattivamente i comportamenti programmati in reazione alle interazioni con l'ambiente circostante, un approccio di linearizzazione attorno a traiettorie prestabilite è difficilmente applicabile. Per questi sistemi è quindi opportuno studiare la possibilità di effettuare un controllo che tenga conto integralmente delle caratteristiche nonlineari, per poterle compensare e – laddove possibile – addirittura sfruttare.

Inizieremo questo studio distinguendo due classi di sistemi meccanici, e quindi di robot: quelli "completamente attuati" e quelli "non completamente attuati", o "sotto-attuati".

I sistemi meccanici completamente attuati sono meccanismi in cui ogni grado di libertà è comandato direttamente da un attuatore, e che sono pertanto in grado di raggiungere e mantenere l'equilibrio in una configurazione arbitraria, purché compatibile con i vincoli. Una intuizione diretta del significato di sistema completamente attuato è che un tale sistema resta immobile in una qualsiasi configurazione se gli attuatori sono bloccati (ed i vincoli rispettati). Esempi di sistemi completamente attuati sono un braccio articolato rigido con un attuatore per ogni giunto, o un veicolo planare vincolato a procedere su un binario con un solo motore per la propulsione (e frenatura), o ancora un modello planare di autovettura che abbia un attuatore per la propulsione ed uno per lo sterzo.

Un esempio elementare di sistema sotto-attuato è un carrello spinto da un attuatore su un binario sospeso, che sposti un carico mediante un cavo libero di oscillare: il sistema è controllabile e può essere stabilizzato in alcune

configurazioni, ma non in una arbitraria. Esempi di robot sotto-attuati sono i bracci manipolatori in cui tra motore e asse del giunto vi sia un elemento elastico di cedevolezza non trascurabile (che è a volte un effetto indesiderato del riduttore meccanico usato, e che altre volte è invece inserita volutamente per rendere più adattabile la struttura meccanica). Altro esempio è quello di sistemi per la locomozione, ad esempio su gambe o su piattaforme aerre o subacquee, il cui riferimento di base è flottante e - nel volo o nelle fasi dinamiche della camminata - non può essere stabilzzato se non in particolari configurazioni.

Per quanto riguarda gli obiettivi dello studio, i principali che si incontrano nelle applicazioni robotiche sono tre:

Controllo di Postura (o *Point–to–point control*), in cui è assegnata una particolare postura fissa in cui si desidera che il robot si porti e rimanga ($\xi(t) \to \xi_d$ costante). Esempi: un compito di *pick and place* per un braccio robotico, o di *parcheggio* per un veicolo;

Inseguimento di Movimento (o *Trajectory tracking*), in cui è assegnata una legge di moto di un obiettivo che il sistema deve raggiungere e seguire ($\xi(t) \to \xi_d(t)$). Esempi: compito di eseguire lavorazioni su un oggetto mobile (su nastro trasportatore ad es.) per un braccio, oppure di Adaptive Cruise Control o Platooning per un veicolo;

Controllo su Traccia (o *Path following*), nel quale è assegnata una curva nello spazio, che il sistema deve raggiungere e percorrere, senza che peraltro sia assegnata una legge oraria (ad esempio, la curva Γ_d implictamente definita come luogo delle soluzioni di equazioni algebriche $C(\xi) = 0$: $\xi(t) \to \Gamma_d = \{\xi \| C(\xi) = 0\}$). Esempi: taglio di una forma con un braccio dotato di utensile adatto, o di *Lane Assist* per un veicolo.

In questo e nel prossimo capitolo inizieremo il nostro studio a partire dai sistemi completamente attuati. Passeremo poi a considerare sistemi sotto-attuati, e le tecniche per il loro controllo.

Chapter 2

Controllo Cinematico

Una tecnica di controllo per sistemi meccanici completamente attuati, detta *controllo cinematico* o controllo in velocità, consiste nel considerare un modello semplificato del sistema, in cui si considerano solo le relazioni cinematiche tra le velocità del sistema astraendo dalla dinamica.

Progettata così una legge da assegnare alle velocità del sistema per fare in modo che le configurazioni seguano un andamento desiderato, queste velocità possono poi venire imposte come riferimenti cui far tendere la effettiva velocità del sistema, governata dalla equazione della dinamica Lagrangiana del sistema mediante il controllo delle forze generalizzate mediante gli attuatori. A tale controllo dinamico sarà dedicato un capitolo successivo.

È da sottolineare qui come la composizione dei risultati del controllo sul modello semplificato (cinematico) con quello dinamico non è ovvia, e richiede strumenti analitici adeguati. In questo senso, vedremo che le tecniche fornite dalla teoria della stabilità e dell'invarianza di Lyapunov sono fondamentali. Cercheremo quindi di studiare le tecniche di controllo cinematico in questa ottica.

2.1 Controllo Cinematico di Bracci Robotici

Un esempio di controllo cinematico è quello usato nei metodi di inversione iterativa della cinematica di un manipolatore, che sono richiamati qui rapidamente. Sia $\xi \in \mathbb{R}^m$ una variabile che rappresenta lo configurazione del sistema nello spazio operativo, sia $q \in \mathbb{R}^n$ la configurazione nello spazio delle variabili di giunto, e $\xi = Q(q)$ rappresenti la mappa cinematica diretta.

2.1.1 Controllo di Postura

Consideriamo innanzitutto il problema del controllo di postura, cioè il raggiungimento di una configurazione desiderata nello spazio operativo $\xi_d \in \mathbb{R}^m$. Si desidera trovare la soluzione (o meglio, una delle possibili soluzioni) $q \in \mathbb{R}^n$ del sistema di equazioni nonlineari $Q(q) = \xi_d$. Come ben noto questo problema di cinematica inversa è risolubile in alcuni casi in forma chiusa. Nel caso in cui questo non sia possibile o conveniente, si può procedere ad effettuare un controllo cinematico delle variabili di giunto, che consiste nel pensare alle configurazioni dei giunti come variabili che, inizializzate con un dato valore q_0 che corrisponde ad una diversa postura $\xi_0 = Q(q_0)$, possono essere modificate nel tempo secondo una legge $q(t)$ da stabilire facendo in modo che $\xi(t) = Q(q(t))$ converga a ξ_d. Per guidare tale convergenza, possiamo considerare a nostra disposizione la scelta delle velocità dei giunti, ovvero scegliendo il valore u della variabile di controllo cinematico nella espressione

$$\dot{q} = u.$$

La scelta della legge di controllo, il cui scopo è quello di annullare l'errore di posizionamento $e(t) = \xi_d - \xi(t)$, può essere fatta in retroazione $u = u(e)$. Posta una funzione candidata di Lyapunov di controllo

$$V = \frac{1}{2} e^T e,$$

si ha

$$\dot{V} = -e^T \left(J(q)u \right),$$

dove $J(q) = \frac{\partial Q}{\partial q}$ indica il Jacobiano analitico del manipolatore, per il quale vale $\dot{\xi} = J(q)\dot{q}$. Per avere convergenza dell'errore a zero si desidera avere $\dot{V}$ negativa definita o almeno semidefinita.

Per ottenere ad esempio $\dot{V} = -e^T e$ (che porterebbe ad una convergenza asintotica esponenziale della norma dell'errore come $\|e(t)\| = \exp(-t)\|e(0)\|$), proviamo a imporre $J(q)u = e$. Se la dimensione del compito assegnato è pari al numero di giunti del manipolatore ($m = n$) ed il Jacobiano è invertibile, quindi, la semplice legge di controllo cinematico

$$u = J^{-1}(q)e \tag{2.1}$$

ottiene lo scopo. Come previsto, con questa legge la dinamica dell'errore di inseguimento risulta

$$\dot{e} = -e$$

quindi l'errore decade esponenzialmente a zero.

La convergenza del metodo può essere modulata con la scelta di $u = J^{-1}(q)Ke$, con K una matrice positiva definita da scegliere. Ad esempio, $K = kI$ ottiene velocità di convergenza esponenziale pari a $\sqrt(k)$. In teoria, valori di k arbitrariamente grandi porterebbero a convergenza arbitrariamente veloce, ma la implementazione in forma di algoritmo iterativo trasforma il sistema in uno a tempo discreto, la cui stabilità pone limiti a K.

Questo metodo e le sue varianti, note nella letteratura robotica anche con il nome di CLIK (Closed Loop Inverse Kinematics) non sono altro che versioni specializzate del metodo di Newton-Raphson per trovare le radici di sistemi di equazioni algebriche nonlineari. Nelle implementazioni numeriche, la scelta di k si traduce nella scelta del passo lungo la direzione indicata dalla soluzione $J^{-1}e$, scelta che viene spesso eseguita ottimizzando criteri che tengono conto della velocità di convergenza e della stabilità dell'algoritmo.

Manipolatori ridondanti

Il metodo si generalizza facilmente al caso di manipolatori ridondanti non singolari, in cui il compito ha dimensione inferiore al numero di giunti, $m < n$, ed il Jacobiano $J(q) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ è rettangolare largo a pieno rango righe. Utilizzando una inversa destra $J^R(q)$[1], il controllo cinematico si può scrivere nella forma

$$u = J^R(q)e + N_J(q)\lambda \tag{2.2}$$

dove $N_J(q) \in \mathbb{R}^{n\times n-m}$ è una matrice di base dello spazio nullo di $J(q)$ (ovvero tale per cui $J(q)N_J(q) = 0$, $\forall q$). Qualsiasi scelta di $\lambda \in \mathbb{R}^{n-m}$ porta alla stessa dinamica dell'errore vista sopra, così che λ rimane a disposizione per cercare di soddisfare altri compiti del robot.

Le infinite possibili inverse destre di una matrice a pieno rango righe danno soluzioni con caratteristiche diverse. Si consideri ad esempio il problema di trovare, tra le possibili $u = \dot{q}$ che risolvono $J(q)u = e$ (e quindi ottengono $\dot{V} = -e^Te$), quella che minimizza il costo $1/2\, u^TWu$. Costruendo la lagrangiana di questo problema di minimo vincolato,

$$L = \frac{1}{2}\, u^TWu + \lambda\,(Ju - e)$$

e uguagliando a zero le derivate rispetto a u, λ, si ottiene facilmente

$$u = W^{-1}J^T(JW^{-1}J^T)^{-1}e \stackrel{def}{=} J_W^+e$$

[1]Una inversa destra è una qualsiasi matrice per cui $J(q)J^R(q) = I$. L'esistenza di una inversa destra è garantita se $J(q)$ ha tutte righe indipendenti; in questo caso, se $J(q)$ è rettangolare, esistono infinite inverse destre.

dove la matrice J_W^+ è la particolare inversa destra che coincide (nel caso di J non singolare) con la pseudoinversa di J pesata in W. Per $W = I$ questa si semplifica nella consueta

$$u = J^T(JJ^T)^{-1}e = J^+e. \tag{2.3}$$

Trattamento delle Singolarità

Si noti che con la pseudoinversa J^+ si denota una matrice che è ben definita anche nelle configurazioni in cui J non ha pieno rango righe, quindi anche nelle singolarità dove la formula precedente non sarebbe applicabile[2]. Pertanto usando la pseudoinversa J^+ è possibile scrivere la soluzione nella forma

$$u = J^+(q)e + N_J(q)\lambda \tag{2.4}$$

formalmente valida anche nel caso in cui si incontri una singolarità. Peraltro, nelle vicinanze di una singolarità, la soluzione con pseudoinversa è soggetta a discontinuità e a problemi numerici che provocano soluzioni molto sensibili a piccolissime variazioni dei parametri[3] e questo può generare valori di riferimento della velocità $\dot{q}$ molto elevati, fisicamente irrealizzabili e/o pericolosi.

Un approccio alternativo a quello della (pseudo)inversione del Jacobiano, è quello detto *del gradiente*, o *steepest descent*:

$$u = J^T(q)e, \tag{2.5}$$

che, applicato alla stessa candidata di Lyapunov, risulta in

$$\dot{V} = -e^T J(q)J^T(q)e.$$

Quando $J(q)$ non ha singolarità, $\dot{V}$ è definita negativa e l'errore converge asintoticamente a zero, anche se più lentamente del metodo di Newton-Raphson. Nel caso di singolarità il metodo del gradiente rimane numericamente stabile, anche se si ha che $\dot{V}$ è solo negativa semidefinita. L'analisi

[2] La pseudoinversa di una matrice M è una inversa destra ($MM^+ = I$) se M ha pieno rango righe; è una inversa sinistra ($M^+M = I$) se M ha pieno rango colonne. Pertanto, se M è invertible, $M^+ = M^{-1}$. Nel caso generale, M^+ è definita dalle quattro proprietà di Moore-Penrose: 1) $MM^+M = M$; 2) $M^+MM^+ = M^+$; 3) $(MM^+)^T = MM^+$; 4) $(M^+M)^T = M^+M$. Dato il sistema lineare $y = Mx$, la pseudoinversa di M fornisce il vettore $\bar{x} = M^+y$ di minima norma $\|\bar{x}\|$ tra quelli che minimizzano il residuo $\|y - M\bar{x}\|$. Nel caso generale la pseudoinversa è ottenuta sulla base della decomposizione ai valori singolari di $J = U\Sigma V$ come $J^+ = V^T\Sigma^+U^T$.

[3] ad esempio, si consideri $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & 0 \end{bmatrix}^+ = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/\epsilon \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, per ϵ vicini a zero.

indica che la convergenza può arrestarsi in configurazioni nelle quali si abbia $J^T(q)\left(\xi_d - Q(q)\right) = 0$, cioè quando l'errore giace esattamente nello spazio nullo che si crea nella singolarità del Jacobiano (caso piuttosto raro, e comunque aggirabile con semplici empiriche numeriche).

Un metodo di soluzione che combina i precedenti è quello di Levenberg-Marquardt (o "Damped Least Squares"). Consideriamo ancora l'obiettivo di trovare $u = \dot{q}$ che risolve la $J(q)u = Ke$ cercando anche di minimizzare il costo $1/2\, u^T W u$. Invece che applicare la soluzione esatta del minimo vincolato ottenuta sopra con la tecnica dei moltiplicatori di Lagrange (valida solo nel caso in cui $J(q)$ aveva pieno rango righe), si rilassi il problema cercando di ottenere invece

$$\arg\min_u \left[\frac{1}{2}\left(Ju - Ke\right)^T\left(Ju - Ke\right) + \frac{1}{2}u^T W u\right]. \tag{2.6}$$

Uguagliando a zero la derivata di questo costo composto, il valore che lo minimizza è

$$u = \left(J^T J + W\right)^{-1} J^T K e. \tag{2.7}$$

Se in particolare si sceglie $K = kI_m$ e $W = \mu I_n$, con k e μ scalari positivi, si ha

$$u = k\left(J^T J + \mu I_n\right)^{-1} J^T e.$$

che è equivalente[4] alla

$$u = kJ^T\left(JJ^T + \mu I_m\right)^{-1} e\,.$$

Scegliendo $k = 1 + \mu$, è immediato osservare che per $\mu = 0$ il metodo corrisponde a quello della pseudoinversa per J nonsingolare, mentre per μ grandi corrisponde al metodo del gradiente.

Utilizzando la (2.7), la derivata della funzione di Lyapunov V vale

$$\dot{V} = -ke^T J(q)\left(J^T J + \mu I_n\right)^{-1} J^T e$$

ed è quindi negativa semidefinita (negativa definita se $J(q)$ ha pieno rango righe) per ogni $\mu > 0$ [5]. Il metodo di Levenberg-Marquardt è spesso utilizzato variando il valore di μ ad ogni passo, aumentandolo quando ci si avvicina a una singolarità avvicinandosi al metodo del gradiente per "smorzare" la

[4] Per dimostrare che $\left(J^T J + \mu I\right)^{-1} J^T = J^T\left(JJ^T + \mu I\right)^{-1}$ basta post-moltiplicare l'equazione per la matrice invertibile $(JJ^T + \mu I)$ e sviluppare i prodotti.

[5] gli autovalori di $\left(JJ^T + \mu I\right)$ sono quelli di JJ^T, tutti positivi o nulli, sommati a μ. Quindi la matrice tra parentesi è positiva definita e invertibile, e la $\dot{V}$ si può annullare solo quando $J^T e = 0$

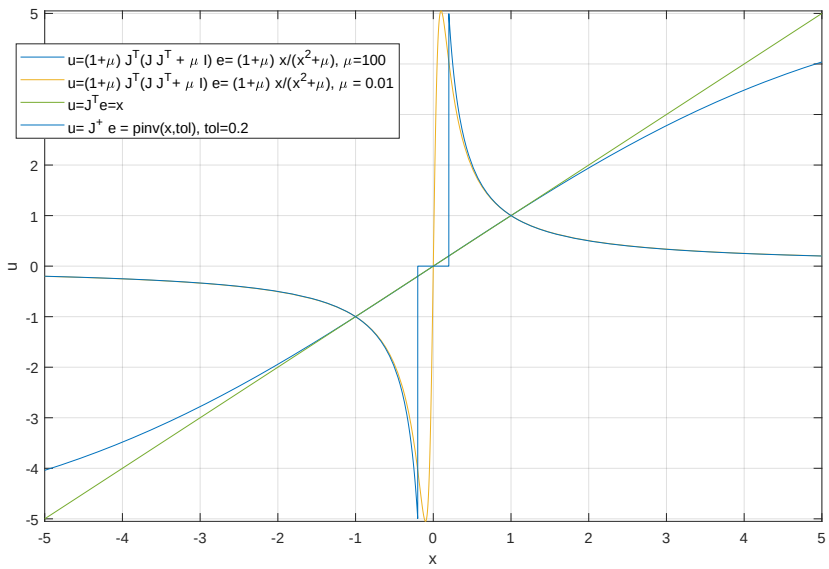


Figure 2.1: Andamento delle diverse soluzioni per $Ju = e$, con $e = 1$ e $J = L\sin(q)$, in vicinanza della singolarità $q = 0$.

soluzione, e dimininuendolo in prossimità della soluzione (lontana dalle singolarità), per velocizzare la convergenza approssimando il metodo di Newton-Raphson [6].

Esempio 1. Per illustrare le differenze tra le diverse soluzioni della cinematica inversa, si consideri il caso scalare $\xi = Q(q) = -L\cos q$, $J = L\sin q \stackrel{def}{=} x$. In fig. 2.1 sono riportati i valori delle diverse soluzioni attorno a $q = 0$. $\diamond$

2.1.2 Inseguimento di Movimento

Consideriamo adesso l'inseguimento di un movimento nello spazio operativo. Assegnata una traiettoria $\xi_d(t)$, per trovare una legge temporale per i giunti $q(t)$ che faccia convergere $Q(q(t))$ a $\xi_d(t)$ si procede in modo del tutto analogo al caso precedente ponendo $\dot{q} = u$ e $V = e^T e$, da cui $\dot{V} = e^T \left(\dot{\xi}_d - J(q)u\right)$.

[6] Gli algoritmi di Levemberg e Marquardt e una loro implementazione efficiente sono descritti in Fletcher, R. (1971). A Modified Marquardt Subroutine for Nonlinear Least Squares. Rpt.AERE-R 6799.

La legge di controllo cinematico con il metodo di Gauss Newton si estende facilmente in questo caso aggiungendo un termine anticipativo in feed–forward, cioè ponendo

$$u = J^{-1}(q)\left(\dot{\xi}_d + e\right). \tag{2.8}$$

Quando si usino altri metodi robusti ai problemi di inversione, quali quello del gradiente o di Levenberg-Marquardt, che in questo caso ha la forma

$$u = J^T\left(JJ^T + \mu I\right)^{-1}\left(\dot{\xi}_d + e\right), \tag{2.9}$$

si ottiene come risultato sono una stabilità pratica, ovvero si può garantire solo che l'errore tende ad un intorno dell'origine, il cui raggio è tanto maggiore quanto più alta è la velocità desiderata $\dot{\xi}$, come si ottiene facilmente dalla analisi della derivata della stessa candidata di Lyapunov $V = e^T e$.

2.1.3 Uso del Jacobiano Geometrico

Nel caso in cui, per evitare le singolarità di rappresentazione, si preferisca usare il Jacobiano geometrico, basterà definire l'errore di orientazione in $SO(3)$ con la formula $R_e = R^T R_d$, da cui estrarre in forma asse-angolo $e_o = r\sin\theta$, con

$$\begin{aligned} \theta &= \arccos \tfrac{\mathrm{Trace}(R_e)-1}{2} \\ r &= \tfrac{1}{2\sin\theta}(R_e - R_e^T)^\vee, \end{aligned}$$

La derivata di questo errore è $\dot{e}_o = L^T\omega_d - L\omega$, dove $\omega = J_o\dot{q}$ è la velocità angolare dell'end-effector, e

$$L = -\frac{1}{2}\left(\hat{n}_d\hat{n} + \hat{s}_d\hat{s} + \hat{a}_d\hat{a}\right),$$

dove $R = [n\, s\, a]$.

La dinamica dell'errore rimane formalmente scritta in maniera analoga, dove si ponga

$$\dot{e} = \begin{bmatrix} \dot{e}_p \\ \dot{e}_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\xi}_{p,d} \\ L^T\omega_d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} J_p \\ LJ_o \end{bmatrix}\dot{q} \stackrel{def}{=} \dot{\xi}_d - J\dot{q},$$

2.1.4 Tecnica di Inversione a Priorità di Compito

Riprendiamo in considerazione il controllo cinematico di postura applicato a robot ridondanti, e si consideri il caso in cui esistano una serie di compiti

$T_1, T_2, \ldots$ che possono essere assegnati al robot, cui corrispondono posture desiderate $\xi_{1,d}, \xi_{2,d}, \ldots$ e Jacobiani $J_1, J_2, \ldots$. Siano inoltre $m_1, m_2, \ldots$ le dimensioni dei compiti assegnati.

Nel caso in cui la somma delle dimensioni dei primi k compiti $\sum_{j=1}^{k} m_j$ sia minore o uguale al numero di giunti n, è possibile risolvere questi compiti allo stesso tempo semplicemente creando il Jacobiano aumentato

$$J_{A,k} = \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ \vdots \\ J_k \end{bmatrix}$$

e applicando a questo le tecniche già viste. Nel caso in cui invece la dimensionalità dei compiti sia superiore ai gradi di libertà, questo è impossibile. È anche possibile che alcuni dei compiti, in certe configurazioni, entrino in competizione tra loro (ovvero le righe dei Jacobiani dei compiti siano linearmente dipendenti) e che quindi il raggiungimento degli obiettivi sia incompatibile. In questi casi è opportuno considerare una soluzione che privilegi la soluzione dei compiti più importanti, e risolva quelli a minor priorità solo nei limiti concessi dai primi (assumiamo qui che l'ordine dei compiti esprima anche l'ordine di importanza degli stessi).

È conveniente quindi riscrivere la soluzione del caso ridondante sovraparametrizzando lo spazio nullo del Jacobiano di un compito $J(q)$, utilizzando al posto della base N_λ sopra vista una matrice quadrata $P = I - J^+ J \in \mathbb{R}^{n \times n}$ che ha la stessa immagine, e che proietta un qualsiasi vettore di velocità dei giunti v nello spazio nullo del Jacobiano J (ovvero, $JPv = 0$, $\forall v \in \mathbb{R}^n$)[7].

Una soluzione della (2.2) può essere quindi scritta nella forma

$$\dot{q} = u = J^+(q)Ke + P(q)v_q \tag{2.10}$$

dove $v_q \in \mathbb{R}^n$ può essere visto come una velocità dei giunti desiderabile, a cui avvicinarsi purchè la convergenza alla soluzione del compito (misurata da $V = \frac{1}{2}e^T e$) rimanga inalterata. Con semplici passaggi si ha anche

$$\dot{q} = u = v_q + J^+ \left(Ke - Jv_q \right), \tag{2.11}$$

che mostra come la velocità comandata è la più vicina alla v_q tra quelle che soddisfano $J\dot{q} = Ke$.

[7] Il proiettore elementare sulle prime r coordinate di una base n-dimensionale è una matrice $P_0 = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Nel sistema descritto da un cambio di coordinate T, si ha $P = T^{-1} P_0 T$. Ne segue che $PP = P$ e che $P^+ = T^{-1} P_0^+ T = T^{-1} P_0 T = P$.

Consideriamo adesso la applicazione di questo approccio ad una sequenza di compiti a priorità decrescente. Per il primo compito, la derivata di $\dot{V}_1 = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}e_1^T e_1\right) = -e_1^T J_1 u$ è resa almeno negativa semidefinita dalla scelta

$$u = u_1 = J_1^+ K_1 e_1.$$

Questa scelta non garantisce ovviamente nulla sul secondo compito, per cui si aggiunge a questo primo controllo un termine che possa favorirlo senza alterare il primo, ovvero

$$u_2 = u_1 + P_1 w_1 \tag{2.12}$$

per il quale si ha

$$\dot{V}_2 = -e_2^T J_2 u_1 - e_2^T J_2 P_1 w_1.$$

Il primo termine a destra ha segno indefinito. Scegliamo quindi w_1 in modo da cancellarlo e aggiungere termini semidefiniti negativi, almeno per quanto concesso dal vincolo sul primo compito:

$$w_1 = -\left(J_2 P_1\right)^+ \left(J_2 u_1 - K_2 e_2\right)$$

che, sostituita in (2.12), dà

$$\begin{aligned} u_2 &= u_1 - P_1 \left(J_2 P_1\right)^+ \left(J_2 u_1 - K_2 e_2\right) \\ &= u_1 - \left(J_2 P_1\right)^+ \left(J_2 u_1 - K_2 e_2\right) \end{aligned}$$

dove si usa la proprietà $P(MP)^+ = (MP)^+$ che vale per qualsiasi M se P è un proiettore.

Si ottiene quindi

$$\dot{V}_2 = -e_2^T J_2 u_1 + e_2^T J_2 P_1 \left(J_2 P_1\right)^+ J_2 u_1 - e_2^T J_2 P_1 \left(J_2 P_1\right)^+ K_2 e_2.$$

Se il secondo task non è in conflitto con il primo (ovvero, se le righe di J_2 sono linearmente indipendenti da quelle di J_1), si ha che $J_2 P_1$ ha pieno rango righe, quindi $J_2 P_1 \left(J_2 P_1\right)^+ = I$ e infine

$$\dot{V}_2 = -e_2^T K_2 e_2,$$

quindi anche il secondo task va a convergenza.
Per assolvere nella misura possibile al terzo compito, si procede analogamente scegliendo un comando

$$u_3 = u_2 + P_{A,2} w_2.$$

Si noti che, per lasciare inalterata la convergenza dei primi due compiti, il termine aggiuntivo rispetto a u_2 deve essere proiettato nel nullo di entrambi i jacobiani J_1 e J_2, il che si può ottenere usando il proiettore nel nullo del

jacobiano aumentato $J_{A,2}$, cioè $P_{A,2} = I - J_{A,2}^{+} J_{A,2}$. Procedendo come in precedenza, si trova w_3 e quindi

$$u_3 = u_2 + \left(J_3 P_{A,2}\right)^{+} \left(K_3 e_3 - J_3 u_2\right).$$

Iterando la procedura, si ottiene dunque la formula

$$u_k = u_{k-1} + \left(J_k P_{A,k-1}\right)^{+} \left(K_k e_k - J_k u_{k-1}\right),$$

che deve essere inizializzata con $u_0 = 0$.

Sulla base di risultati noti dal calcolo ricorsivo delle pseudoinverse, si ha che anche il calcolo dei proiettori coinvolti in questa formula può essere fatto ricorsivamente, senza costruire il Jacobiano aumentato, avendosi

$$P_{A,k} = P_{A,k-1} - \left(J_k P_{A,k-1}\right)^{+} J_k P_{A,k-1},$$

a sua volta inizializzata ponendo $P_{A,0} = I$.

Con le scelte fatte si ha

$$\dot{V}_k = -e_k^T J_k u_{k-1} - e_k^T J_k P_{A,k-1} (J_k P_{A,k-1})^{+} J_k u_{k-1} - e_k^T J_k (J_k P_{A,k-1})^{+} K_k e_k.$$

Se $J_k P_{A,k-1}$ ha pieno rango righe m_k, si ha ancora

$$\dot{V}_k = -e_k^T K_k e_k,$$

e quindi anche l'errore del k-esimo task converge a zero. La perdita di rango della matrice $J_k P_{A,k-1}$ può avvenire per diversi motivi:

- per perdita di rango del Jacobiano del task J_k. Questo caso è infrequente perché significa che il task stesso è mal posto;

- perché il rango di $P_{A,k-1}$ è minore di m_k. Si noti che il rango di $P_{A,k-1}$ coincide con la nullità del Jacobiano aumentato $J_{A,k-1}$. Questo caso si verificherà certamente quando la dimensione dei task $\sum_{j=1}^{k} m_j$ supera il numero di giunti del braccio;

- nel caso in cui l'immagine del proiettore $P_{A,k-1}$ cade nel nullo del Jacobiano J_k. Questo accade se il k-esimo task è incompatibile con i task precedenti a priorità maggiore (si pensi ad esempio al caso di un Jacobiano J_k con righe già contenute in $J_{A,k-1}$, ovvero che si chiedano al manipolatore task contraddittori).

Nei casi di perdita di rango, non si può ovviamente garantire la convergenza a zero dell'errore del task relativo, ma lo si può monitorare guardando alla $\dot{V}_k$.

Questa tecnica di inversione a priorità di compito, detta anche "stack of tasks", funziona correttamente nei casi in cui le tecniche di inversione non incontrino ostacoli dovuti a singolarità dei Jacobiani aumentati. Quando invece si debbano affrontare queste singolarità con un metodo a minimi quadrati smorzati (ad esempio Levenberg-Marquardt), il metodo non garantisce più che i compiti a minore priorità non inquinino i precedenti. In questo caso, si possono applicare tecniche a priorità invertita, per i quali si rimanda alla letteratura specializzata[8].

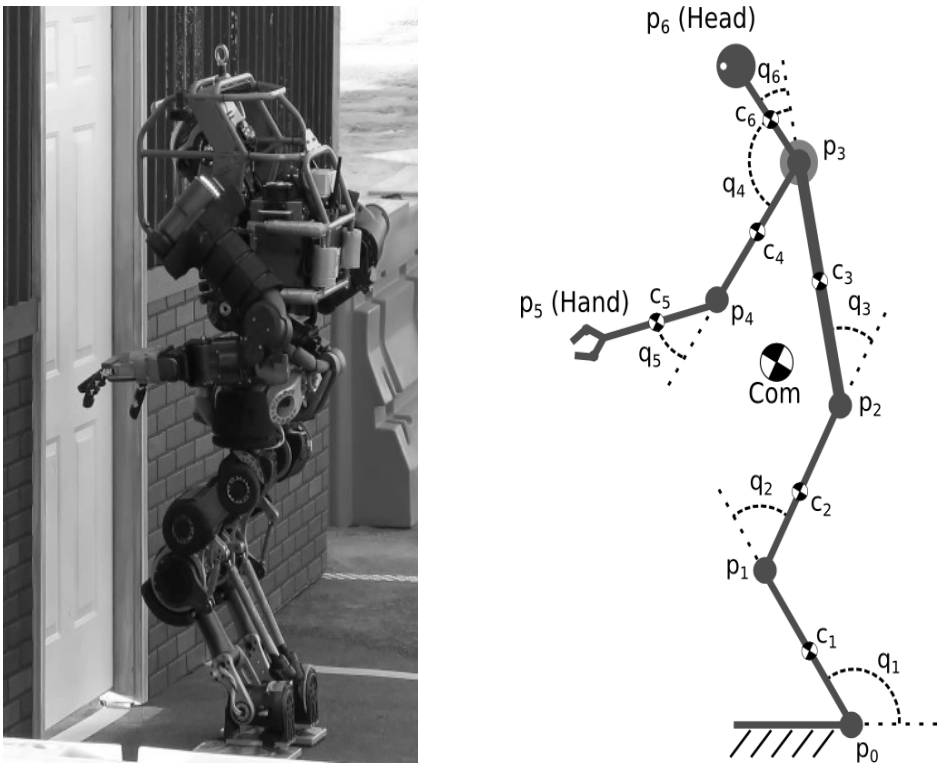


Figure 2.2: A sinistra, il robot umanoide WalkMan, realizzato dall'Istituto Italiano di Tecnologia e dal Centro E. Piaggio della Università di Pisa, mentre apre una porta durante una prova della DARPA Robotics Challenge del 2015. A destra: modello 2D semplificato del robot.

[8] si veda ad esempio F. Flacco and A. De Luca, "A reverse priority approach to multitask control of redundant robots," in Proc. IEEE/RSJ Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems, 2014, pp. 2421–2427.

Esempio 2. Si consideri un robot planare di forma umanoide con 6 giunti come illustrato in fig. 2.1.4. Sia $J_c(q) \in \mathbb{R}^{2\times 6}$ il Jacobiano di postura del suo baricentro. In configurazione non singolare, scelta una posizione per il baricentro che garantisce il bilanciamento, restano quattro gradi di libertà da scegliere con λ. Un compito addizionale potrebbe essere quello di portare la mano in una postura desiderata, inclusa la sua orientazione. Sia $J_h(q) \in \mathbb{R}^{3\times,6}$ il Jacobiano che lega le velocità della mano a quelle di giunti. Il problema del posizionamento della mano in contemporanea al controllo del baricentro può essere risolto in diversi modi. Il più semplice è quello di giustapporre i due jacobiani in uno unico

$$J_{c,h} = \begin{bmatrix} J_c \\ J_h \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{5,6},$$

sul quale applicare le medesime tecniche quando possibile. Questo metodo ha limitazioni in quanto il nuovo Jacobiano potrebbe più facilmente andare in singolarità, e soprattutto perché non si generalizza al caso di ulteriori compiti. Si pensi ad esempio di aggiungere un compito che chiede anche alla testa del robot di avere una certa postura, e sia $J_t \in \mathbb{R}^{3\times 6}$ il Jacobiano associato. Ovviamente, la dimensione del compito complessivo (8) diviene in questo caso superiore ai gradi di libertà disponibili, e non saranno fattibili in generale. Comunque, può essere interessante assegnare priorità ai compiti stessi e adottare delle tecniche che garantiscano i compiti a maggiore priorità, e tendano ad avvicinarsi alla soluzione di quelli a minore priorità senza alterare i primi.

◇

2.1.5 Controllo su Traccia

Si consideri ora il raggiungimento ed il mantenimento di una traccia assegnata. Sia data una curva (cioè una varietà di dimensione uno) nello spazio operativo m-dimensionale, che pensiamo definita implicitamente da $m-1$ equazioni $C(\xi) = 0$, con $C(\xi) \in \mathbb{R}^{m-1}$, $C : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m-1}$. In altri termini, la parte terminale della catena cinematica deve raggiundere questa curva e percorrerla a velocità assegnata: un caso tipico è quello in cui un utensile di taglio, posto nella parte terminale del manipolatore, deve tagliare un certo profilo mantenendo una velocità opportuna, senza peraltro avere una temporizzazione del percorso da rispettare (insistere su una percorrenza a tempi stabiliti di un certo percorso può comportare errori maggiori sul profilo ottenuto, nel caso ad esempio che l'utensile incontri resistenza variabile all'avanzamento dovuta a disomogeneità del materiale da tagliare).

Si consideri dunque la funzione

$$V(\xi) = \frac{C^T(\xi)C(\xi)}{2}\,,$$

che è sempre positiva e si annulla solo sulla traccia, mentre le curve di livello formano un tubo attorno alla traccia. Derivando rispetto al tempo ed utilizzando il modello cinematico $\dot{\xi} = J(q)\dot{q}$ con $\dot{q} = u$, si ottiene (omettendo l'argomento delle funzioni per brevità)

$$\dot{V} = C^T C_\xi J(q) u\,,$$

dove $C_\xi = \frac{\partial C}{\partial \xi}$. Si noti che, essendo C_ξ una matrice $m-1 \times m$, ammette uno spazio nullo di dimensione generica 1, eccetto nelle eventuali singolarità di C_ξ, dove la dimensione potrebbe aumentare.

Sia $S(\xi)$ una base di questo spazio nullo, cioè sia $C_\xi(\xi)S(\xi) = 0, \forall \xi$. La matrice $S(\widehat{\xi})$ calcolata in un punto $\widehat{\xi}$ sulla curva ($C(\widehat{\xi}) = 0$), rappresenta un vettore tangente alla curva in $\widehat{\xi}$. Assumendo ancora per semplicità di avere Jacobiano a pieno rango righe (tralasciando qui i casi di singolarità del manipolatore), potremo quindi scegliere il controllo nella forma

$$u = -J^R(q)C_\xi^T C k \;+\; J^R(q) S \alpha \tag{2.13}$$

con k, α parametri scalari liberi, si ottiene

$$\dot{V} = -C^T C_\xi C_\xi^T C k. \tag{2.14}$$

Per $k > 0$, $\dot{V}$ è quindi semi-definita negativa, il che garantisce la stabilità della varietà $C(\xi) = 0$. Si osservi che la condizione $\dot{V} = 0$ si verifica dove $C_\xi^T C = 0$, ovvero sui punti della curva desiderata ($C = 0$) ma anche nei punti in cui esistesse un kernel di $C_\xi^T \in \mathbb{R}^{m \times m-1}$ in cui si venisse a trovare il vettore C. Per curve regolari (in cui direzioni normali e tangenti sono ben definite), il rango di C_ξ è massimo su tutti i punti della curva stessa, quindi per continuità lo è anche in un intorno: questo permette di concludere che esiste un intorno della curva $C(\xi) = 0$ a partire dal quale il sistema converge asintoticamente verso la curva stessa, e quindi, per il teorema dell'invariante massimo, tale intorno appartiene al bacino di attrazione per la curva. Possono comunque esistere punti dello spazio di stato fuori dalla curva, in cui si ha $\dot{V} = 0$ (si veda l'esempio più avanti).

Con la scelta (2.13), la cinematica diventa

$$\dot{\xi} = -C_\xi^T C k + S\alpha\,.$$

La scelta di α non contribuisce alla stabilizzazione, ma permette di assegnare alla velocità di percorrenza della curva un valore desiderato. Ad esempio scegliendo $\alpha = \frac{v_d}{\|S\|}$ la velocità di percorrenza della curva è pari a $v_d(t)$.

Si può in definitiva affermare che la legge di controllo (2.13) rende $\dot{V}$ semidefinita negativa e quindi la curva stabile ed attrattiva per tutta la regione in cui C_ξ non è singolare.

Esempio 3. Si consideri un manipolatore seriale planare a due gradi di libertà: sia $\xi = (x,\, y)^T$ la posizione dell'end-effector e $q = (q_1,\, q_2)^T$ il vettore delle variabili di giunto. Sia inoltre

$$C = (x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 - R^2 = 0$$

l'equazione della curva (circonferenza centrata in $(x_o,\, y_o)$ e raggio R) sulla quale la parte terminale del manipolatore deve portarsi, e che deve percorrere a velocità $\widehat{v}(t)$ assegnata.

Si consideri quindi

$$V = \frac{C^T C}{2} = \frac{1}{2}((x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 - R^2)^2$$

e, ponendo $\dot{q} = u$, si ha

$$\dot{V} = ((x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 - R^2) \begin{bmatrix} 2(x - x_o) & 2(y - y_o) \end{bmatrix} J(q)\, u\,.$$

Scegliendo

$$u = -kJ^{-1}(q)C_\xi^T((x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 - R^2) + J^{-1}(q)S\alpha$$

dove $C_\xi = [2(x - x_o),\ 2(y - y_o)]$, $k > 0$, e posto (ovunque eccetto che in (x_0, y_0)) $S = [-(y - y_o),\ (x - x_o)]^T$, $\alpha = \frac{\widehat{v}}{\|S\|_2}$ con $\widehat{v} > 0$, si ottiene

$$\dot{V} = -k((x - x_o)^2 + (y - y_o)^2)((x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 - R^2)^2$$

e

$$\dot{\xi} = -kC_\xi^T((x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 - R^2) + \frac{S}{\|S\|_2}\widehat{v}\,. \tag{2.15}$$

In figura 2.3 sono riportate le traiettorie del sistema (2.15) a partire da varie condizioni iniziali. Si noti che, una volta raggiunta la curva $C = (x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 - R^2 = 0$, il sistema (2.15) si riduce a

$$\dot{\xi} = \frac{S}{\|S\|_2}\widehat{v}\,,$$

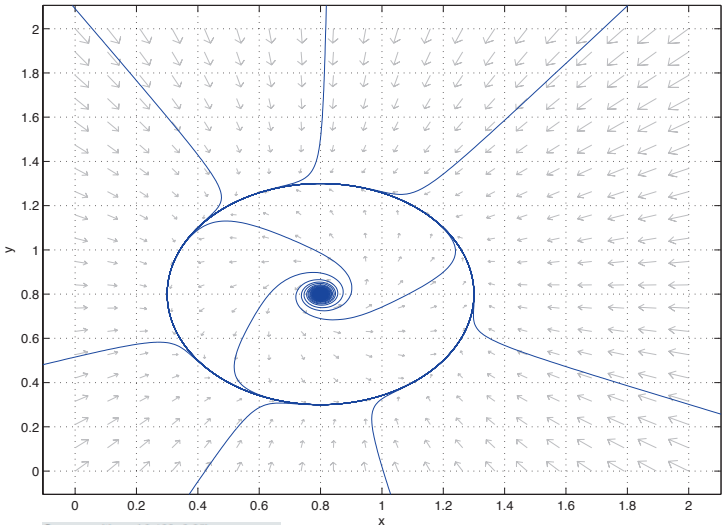


Figure 2.3: Esempio di controllo cinematico di traccia. Traiettorie del sistema controllato nello spazio operativo per differenti condizioni iniziali. Il diagramma è stato ottenuto con lo script open-source `pplane7.m` .

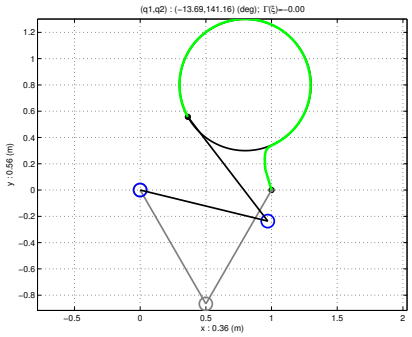
e le velocità della parte terminale del manipolatore sono allineate al vettore tangente alla circonferenza, ovvero a $S(\xi)$, e l'end-effector percorre la curva in senso antiorario con velocità pari a $\widehat{v}(t) = 1$.

Si osservi che $\dot{V} = 0$ solo sulla curva e in corrispondenza del centro ξ_0. La regione di asintotica stabilità della circonferenza contiene quindi tutto lo spazio $\mathbb{R}^2$ ad eccezione al più del centro.

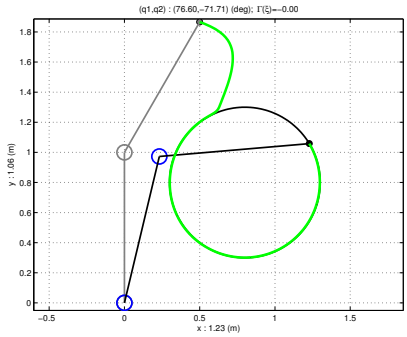
Il comportamento dello schema di controllo nel centro del cerchio ha bisogno di una ulteriore discussione. Infatti, in ξ_o, $C_\xi(\xi_o) = 2 \begin{bmatrix} (x - x_o) & (y - y_o) \end{bmatrix}$ si annulla completamente (ovvero perde rango da 1 a 0). In questo punto di singolarità il kernel di C_ξ ha quindi dimensione due. In quel punto non è possibile definire un controllo del tipo (2.13) che sia continuo con i valori in un suo intorno. Assegnando in modo arbitrario un valore nullo al controllo u nel centro, questo diverrebbe un equilibrio instabile per il sistema (come si verifica facilmente con il metodo indiretto di Lyapunov). Un qualsiasi altro valore renderebbe non invariante questo punto, portando la traiettoria nella RAS e quindi facendo convergere la traiettoria alla curva assegnata.

In figura 2.4 è riportato il risultato di alcune simulazioni ottenute col controllore di traccia descritto.

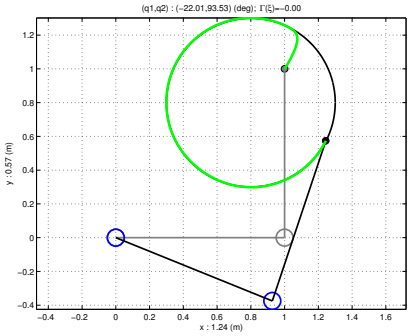
Infine, in figura 2.5 sono riportati i risultati ottenuti per l'inseguimento



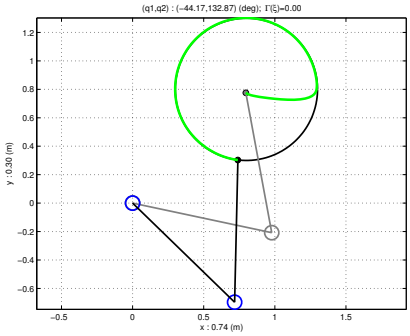
(a) $(q_1(0),\, q_2(0)) = (-\pi/3,\, 2\pi/3)$ e $\xi(0) = (1,\, 0)$.



(b) $(q_1(0),\, q_2(0)) = (\pi/2,\, -\pi/6)$ e $\xi(0) = (0.5,\, 1.866)$.



(c) $(q_1(0),\, q_2(0)) = (0,\, \pi/2)$ e $\xi(0) = (1,\, 1)$.



(d) $(q_1(0),\, q_2(0)) = (-\pi/15,\, 5\pi/8)$ e $\xi(0) = (0.796,\, 0.775)$.

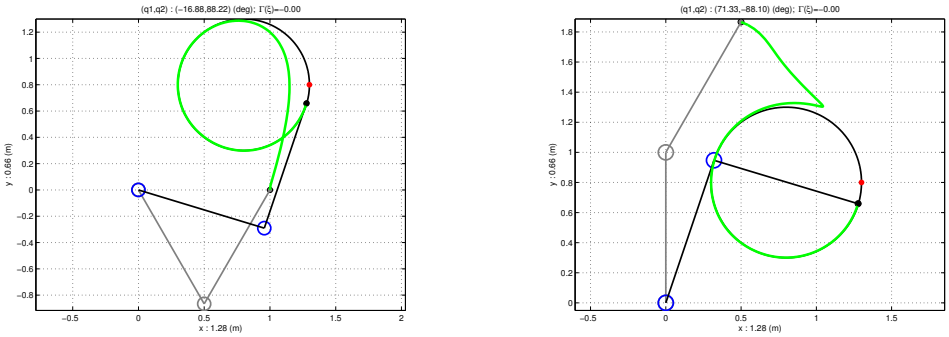
Figure 2.4: Esempio di controllo cinematico di traccia. Contornatura di una traccia circolare con centro in (0.8, 0.8) m e raggio $R = 0.5$ m. La velocità di riferimento è $\widehat{v} = 1$ ed il guadagno di convergenza alla traccia è $k = 50$.

del moto di un punto di riferimento sul cerchio, ovvero ponendo

$$\xi_d(t) = \begin{bmatrix} x_d(t) \\ y_d(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R\cos(\frac{\widehat{v}(t)}{R}\, t) + x_o \\ R\sin(\frac{\widehat{v}(t)}{R}\, t) + y_o \end{bmatrix} . \tag{2.16}$$

Dal confronto di questi risultati con quelli ottenuti a partire dalle stesse condizioni iniziali per il controllo di traccia (figure 2.4(a) e 2.4(b)), si nota che nell'inseguimento di moto la parte terminale del manipolatore può attraversare la circonferenza durante la fase di avvicinamento anche se le condizioni iniziali sono esterne al cerchio. ◇

Esercizio. Con un braccio RRR antropomorfo, eseguire l'insguimento



(a) $(q_1(0), q_2(0)) = (-\pi/3, 2\pi/3)$ e $\xi(0) = (1, 0)$.

(b) $(q_1(0), q_2(0)) = (\pi/2, -\pi/6)$ e $\xi(0) = (0.5, 1.866)$.

Figure 2.5: Esempio Inseguimento Traiettoria con Braccio: Inseguimento con legge (2.1) ($\Lambda = \mathrm{diag}(10, 10)$) del moto di un punto descritto da (2.16). Il punto descrive una traiettoria circolare analoga a quella di fig. 2.4. Si confrontino questi andamenti con quelli di fig. 2.4-a e fig. 2.4-b.

di una traccia formata da una figura geometrica (un cerchio o una curva di Lissajous, ad esempio) giacente su un piano nello spazio di lavoro, verificando il non attraversamento del piano e del contorno. *

2.2 Controllo cinematico di veicoli planari

Considereremo adesso modelli di veicoli che si muovono nel piano, descritti inizialmente in modo puramente cinematico come corpi caratterizzati dalla posizione di un loro punto caratteristico e dall'orientazione di una retta fissa rispetto ad un sistema di coordinate nel piano. Siano queste coordinate indicate da $q = (x, y, \theta)$.

Per alcuni veicoli detti "omnidirezionali", che si muovono sul piano o sostenendosi su cuscinetti d'aria (hovercraft) o usando ruote omnidirezionali di diverso tipo, il moto cinematico è completamente libero e può essere descritto semplicemente da una equazione del tipo $\dot{q} = u$, il che rende il loro controllo cinematico banale.

In molti altri casi, però, i veicoli si muovono su ruote e sono soggetti a vincoli di diversa natura. Considereremo quindi adesso in qualche maggior dettaglio il controllo di veicoli planari soggetti a vincoli cinematici.

2.2.1 Veicolo vincolato su linea retta

Si consideri un veicolo la cui posizione e orientazione nel piano sono descritte dalle coordinate $q = (x, y, \theta)$, e lo si consideri in moto su una retta fissa. Se la retta del vincolo passa dal punto (x_0, y_0) ed è inclinata dell'angolo θ_b rispetto all'asse delle ascisse, si avranno due equazioni di vincolo geometrico esprimibili come

$$\begin{cases} C_1(q) &= (y - y_0)\cos\theta_b - (x - x_0)\sin\theta_b = 0 \\ C_2(q) &= \theta - \theta_b = 0. \end{cases}$$

Gli stessi vincoli, espressi in termini cinematici, possono essere facilmente ottenuti come

$$\begin{cases} \frac{dC_1(q)}{dt} &= \dot{y}\cos\theta_b - \dot{x}\sin\theta_b = 0 \\ \frac{dC_2(q)}{dt} &= \dot{\theta} = 0 \end{cases},$$

ovvero riscritti in forma lineare nelle velocità (forma Pfaffiana),

$$A(q)\dot{q} = \begin{bmatrix} \sin\theta_b & -\cos\theta_b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = 0\,.$$

Si noti che il rango della matrice dei vincoli cinematici $A(q)$ è costante e pari a due. Le velocità consentite al veicolo sono tutte e solo quelle appartenenti allo spazio nullo di $A(q)$, che è di dimensione unitaria e può essere descritto da una base $S(q)$ nella forma

$$\dot{q} = S(q)\nu = \begin{bmatrix} \cos\theta_b \\ \sin\theta_b \\ 0 \end{bmatrix} \nu\,,$$

dove ν è la quasi velocità lungo il vincolo.

Si consideri ora una ascissa lungo la retta di vincolo $s = \sqrt{(y - y_0)^2 + (x - x_0)^2}$, per la quale vale $(x - x_0) = s\cos\theta_b$, $(y - y_0) = s\sin\theta_b$, da cui

$$\dot{s} = \frac{2(x - x_0)\cos\theta_b + 2(y - y_0)\sin\theta_b}{2s}\nu = \nu.$$

L'inseguimento di moto è molto semplice in questo caso. Se è assegnata una legge oraria desiderata nella forma $s_d(t)$, infatti, il controllo cinematico del tipo $\nu = u$, con

$$u = \dot{s_d} + \Lambda(s_d - s)$$

è in grado di far convergere s a s_d asintoticamente, come mostrato dalla funzione di Lyapunov $V = (s_d - s)^T(s_d - s)$. Il cosiddetto *adaptive cruise control* di un veicolo automobilistico su una corsia autostradale rettilinea è quindi un caso di questo tipo. Il caso di controllo di postura è un caso particolare del precedente, mentre il controllo di traccia è del tutto banale in questo caso.

Esempio 4. Si consideri il caso, simile al precedente, in cui il veicolo si muova su un percorso circolare di centro (x_0, y_0) e raggio R. In corrispondenza al vincolo di posizione e di orientazione si avranno due equazioni di vincolo geometrico esprimibili come

$$\begin{cases} C_1(q) &= (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - R^2 = 0 \\ C_2(q) &= \theta - \arctan\left(\frac{y-y_0}{x-x_0}\right) - \frac{\pi}{2} = 0 \end{cases}$$

In termini cinematici si avrà poi

$$\begin{cases} \frac{dC_1(q)}{dt} &= 2(x - x_0)\dot{x} + 2(y - y_0)\dot{y} = 0 \\ \frac{dC_2(q)}{dt} &= \dot{\theta} + \frac{y-y_0}{R^2}\dot{x} - \frac{x-x_0}{R^2}\dot{y} = 0 \end{cases},$$

ovvero, in forma Pfaffiana,

$$A(q)\dot{q} = \begin{bmatrix} x - x_0 & y - y_0 & 0 \\ y - y_0 & -(x - x_0) & R^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = 0\,,$$

Anche in questo caso il rango di $A(q)$ è due ovunque, e le velocità consentite al veicolo sono descritte da

$$\dot{q} = S(q)\nu = \begin{bmatrix} -(y - y_0) \\ (x - x_0) \\ 1 \end{bmatrix} \nu\,.$$

Considerando ora una ascissa curvilinea lungo il percorso $s = R\arctan\left(\frac{y-y_0}{x-x_0}\right)$, si ha nuovamente

$$\dot{s} = R\frac{(x - x_0)(x - x_0) + (y - y_0)(y - y_0)}{R^2}\nu = R\nu.$$

In modo del tutto analogo al caso precedente, per una assegnata legge oraria nella forma $s_d(t)$, il controllo cinematico

$$\nu = u = R^{-1}\left(\dot{s_d} + \Lambda(s_d - s)\right)$$

fa convergere s a s_d asintoticamente, con funzione di Lyapunov $V = (s_d - s)^T(s_d - s)$. $\diamond$

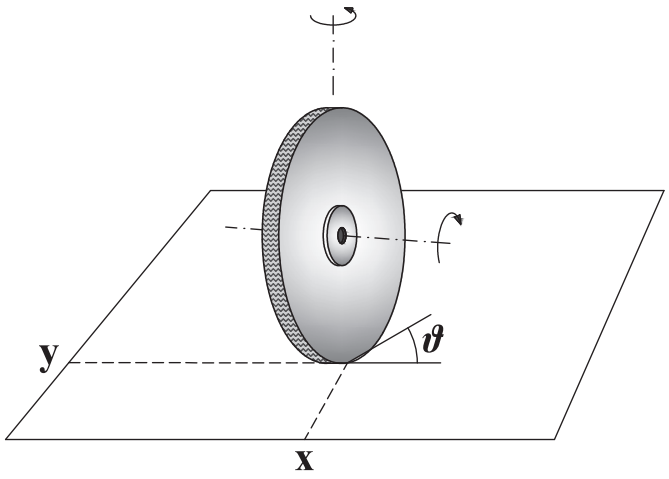


Figure 2.6: Modello di uniciclo planare.

2.2.2 Modello di un veicolo di tipo uniciclo

Consideriamo adesso un elementare modello di veicolo, detto *uniciclo*. La caratteristica principale di un uniciclo è di muoversi nel piano potendo traslare in una direzione fissa rispetto al suo corpo (detta longitudinale) che può essere modifcata nel tempo, mentre gli è impedita la traslazione nella direzione perpendicolare a quella longitudinale, detta trasversale.

Nonostante la sua estrema semplicità, il modello dell'uniciclo è di grande rilevanza in robotica. Esso infatti rappresenta in primissima approssimazione una vasta gamma di veicoli di uso comune, utilizzati principalmente nell'industria come agenti per il trasporto e la movimentazione di merci. Questi veicoli possono essere movimentati da ruote, ma anche molti veicoli su cingoli (che ruotano per strisciamento o *skid steering*), marini o aerei ad ala fissa (che hanno direzioni di moto trasversali negate dagli effetti fluidodinamici dei mezzi in cui si muovono), possono vedere il loro moto cinematico utilmente descritto da questo modello.

Il modello dell'uniciclo prende il nome da un veicolo ideale che si muove nel piano, dotato di una sola ruota con asse parallelo al piano, e libera di ruotare attorno al proprio asse e attorno ad un asse perpendicolare al piano e passante per il punto di contatto sul piano stesso. Si supponga inoltre che il vincolo di attrito al suolo sulla ruota sia ideale e si opponga a qualsiasi traslazione nella direzione parallela all'asse (fig. 2.6). La cinematica di altri

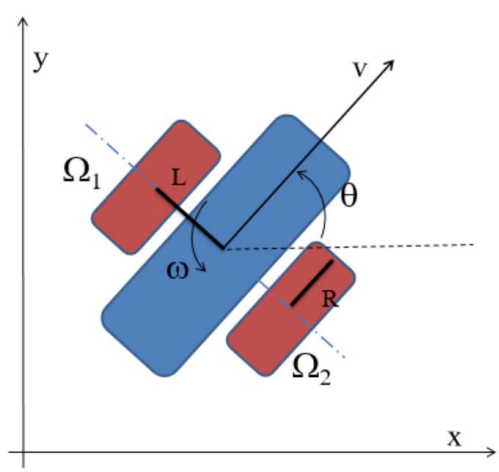


Figure 2.7: Parametri caratteristici di un veicolo a due ruote coassiali.

veicoli soggetti a vincoli sulla velocità trasversale può essere spesso ricondotta facilmente a questo modello.

Esempio 5. Si consideri ad esempio un veicolo terrestre con due ruote coassiali attuate da due motori indipendenti (fig. 2.7). Le due ruote sono pensate come dischi ideali di raggio R che rotolano sul piano con velocità Ω_1 e Ω_2, rispettivamente, mentre il loro centro è a distanza L dal centro del veicolo. Il rotolamento ideale delle ruote impone che la velocità di traslazione del loro centro lungo l'asse delle ruote stesse sia nulla.

Dette ω e v rispettivamente le velocità angolare e longitudinale del veicolo (ovvero la velocità di traslazione del veicolo lungo la perpendicolare all'asse delle ruote), si ha

$$\begin{aligned} \Omega_1 R &= v - \omega L \\ \Omega_2 R &= v + \omega L \end{aligned}$$

ovvero

$$\Omega = A_{vr} t_u$$

dove

$$\Omega \stackrel{def}{=} \begin{bmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \end{bmatrix}; \quad t_u \stackrel{def}{=} \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix}; \quad A_{vr} = \begin{bmatrix} 1/R & -L/R \\ 1/R & L/R \end{bmatrix}.$$

La matrice A_{vr} che mappa le velocità del veicolo su quelle delle ruote è sempre invertibile, per cui possiamo scrivere

$$t_u = A_{vr}^{-1} \Omega \stackrel{def}{=} A_{rv} \Omega$$

con

$$A_{rv} = \begin{bmatrix} R/2 & R/2 \\ -R/2L & R/2L \end{bmatrix}.$$

La relazione tra il vettore delle coppie alle ruote τ_r e il vettore $\tau_u = [f\ m]^T$ delle forza longitudinale e coppia sul veicolo, è ottenuta facilmente per dualità nella forma

$$\tau_u = A_{vr}^T \tau_r.$$

Studiato il moto del veicolo nelle velocità e forze generalizzate, è quindi facile ricondursi alle corrispondenti velocità e coppie da controllare alle ruote. ◇

Torniamo alla descrizione del modello astratto dell'uniciclo. Scegliendo come coordinate nel piano $q = [x, y, \theta]^T$, dove (x, y) indicano la posizione proiettata sul piano del centro del veicolo, e θ l'orientazione della direzione longitudinale rispetto all'asse delle ascisse, il vincolo imposto alla traslazione trasversale del veicolo è espresso nella forma

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \tan\theta\,, \tag{2.17}$$

ovvero, in forma Pfaffiana,

$$A(q)\dot{q} = \begin{bmatrix} \sin\theta & -\cos\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = 0\,. \tag{2.18}$$

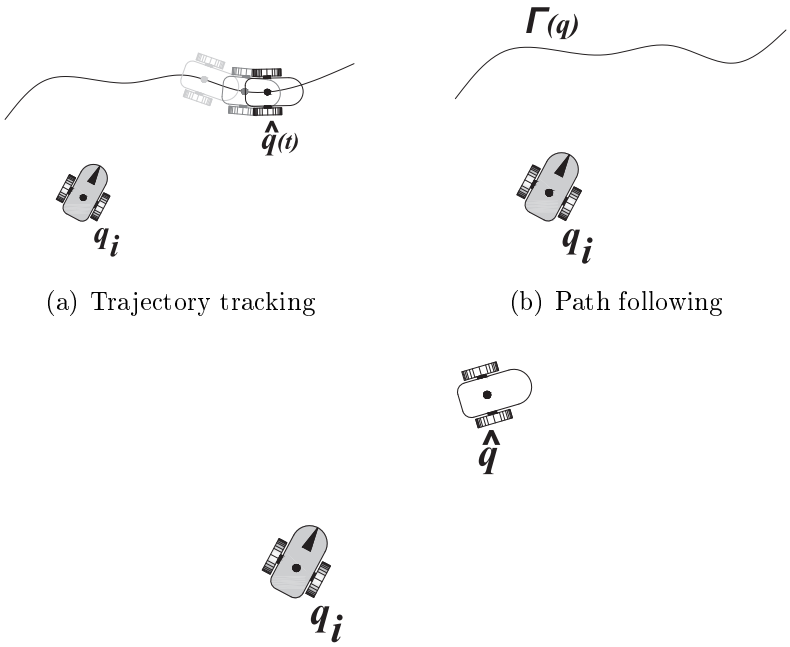
Si noti l'analogia con il primo vincolo definito sul carrello con binario rettilineo: anche in quel caso la direzione lungo la direzione dell'interasse delle ruote era interdetta dalla presenza del binario. In quel caso però tale angolo era costante, mentre adesso è esso stesso una variabile di configurazione.

La matrice dei vincoli cinematici $A(q)$ ha rango uno ovunque, quindi il suo spazio nullo avrà dimensione pari a due. Una base delle velocità compatibili con il vincolo è ad esempio

$$\dot{q} = S(q)\nu = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 \\ \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{bmatrix} \tag{2.19}$$

Dall'equazione (2.19) appare evidente un'interpretazione fisica delle quasi velocità: la prima componente ν_1, corrispondente alla prima colonna di $S(q)$ che è diretta perpendicolarmente all'interasse delle ruote, rappresenta infatti la velocità di avanzamento del veicolo (che indicheremo anche con v), mentre ν_2 corrisponde alla velocità angolare (ω) attorno all'asse verticale passante per (x, y). L'equazione (2.19) può essere quindi riscritta esplicitamente

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \omega. \tag{2.20}$$



(a) Trajectory tracking

(b) Path following

(c) Point–to–point control

Figure 2.8: Problemi di controllo per uniciclo.

È da notare che il vincolo imposto da una singola ruota nel piano non può essere ottenuto per derivazione di un vincolo geometrico. Se così fosse, infatti, questo vincolo ridurrebbe il numero delle configurazioni indipendenti del sistema, il che evidentemente non è possibile visto che il veicolo uniciclo rimane in grado di raggiungere, muovendosi compatibilmente con il vincolo, qualsiasi posizione e orientazione q.

Passiamo adesso a considerare il controllo cinematico del veicolo uniciclo. Considereremo i tre obiettivi di controllo precedentemente descritti, illustrati in fig. 2.8.

2.2.3 Controllo di traccia con un uniciclo

Consideriamo il problema di controllare lungo una traccia il modello di un uniciclo (2.20), dove la velocità $v(t)$ si considererà assegnata (o controllata indipendentemente) e pari a $\bar{v}(t) \neq 0$. L'obiettivo primario è quello di progettare una legge di retroazione per la velocità di rotazione nel piano (detta anche velocità di imbardata o di sterzo nel linguaggio tipico di alcuni veicoli)

$\omega(x, y, \theta)$ (o più generalmente $\omega(x, y, \theta, \bar{v}(t))$) in grado di rendere asintoticamente nulla la distanza tra il veicolo e la traccia (fig. 2.8-b)).

Inizieremo considerando una traccia rettilinea che, senza perdere di generalità, può essere pensata giacere sull'asse orizzontale $y = 0$. Fissata una velocità di avanzamento $\bar{v}(t)$, il modello cinematico del veicolo 2.20 diviene

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{v}(t)\cos\theta \\ \bar{v}(t)\sin\theta \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \omega. \tag{2.21}$$

Il moto desiderato del veicolo, descritto da $\widehat{y}(t) \equiv 0$, implica $\dot{\widehat{y}}(t) \equiv 0$, quindi, dalla seconda equazione (2.21) anche $\widehat{\theta}(t) \equiv k\pi$. Fissiamo come scopo del controllore quello di regolare a zero le due variabili y e θ. In generale non vi sono specifiche sulla traiettoria delle ascisse $\bar{x}(t)$, che dipenderà dalla velocità assegnata $\bar{v}(t)$: questa potrebbe essere in realtà determinata da una legge di retroazione indipendente, tesa ad esempio a mantenere costante la distanza da un veicolo di riferimento che si muove sulla stessa retta.

Controllo mediante linearizzazione approssimata

Consideriamo di nuovo il modello cinematico dell'uniciclo in coordinate cartesiane linearizzato attorno ad un moto nominale di un veicolo che avanza lungo $y = 0$, con velocità $\bar{v}(t)$ e $\bar{\omega}(t) = 0$. Corrispondentemente siano $[\bar{x}(t), \bar{y}(t), \bar{\theta}(t)] = [\bar{x}_0 + \int_0^t \bar{v}(\tau)\, d\tau,\ 0, 0]$. Detto $\widetilde{\xi} = [x - \bar{x}(t),\, y,\, \theta]^T$, $\widetilde{v} = v - \bar{v}(t)$, si ha

$$\dot{\widetilde{\xi}} = A\widetilde{\xi} + B_v\widetilde{v} + B_\omega\omega$$

con

$$A = \left[\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \bar{v}(t) \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|cc} A_1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{A_2}} \\ 0 & & \end{array}\right],$$

e

$$B_v = \left[\begin{array}{c} 1 \\ \hline 0 \\ 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} B_{v,1} \\ \hline 0 \\ 0 \end{array}\right];\ B_\omega = \left[\begin{array}{c} 0 \\ \hline 0 \\ 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 0 \\ \hline B_{\omega,2} \end{array}\right].$$

Il sistema risulta quindi effettivamente scomposto in due sottosistemi indipendenti:

$$\dot{\widetilde{\xi}}_1 = B_{v,1}\widetilde{v}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\widetilde{\xi}}_2 \\ \dot{\widetilde{\xi}}_3 \end{bmatrix} = A_2 \begin{bmatrix} \widetilde{\xi}_2 \\ \widetilde{\xi}_3 \end{bmatrix} + B_{\omega,2}\,\omega$$

Il primo sottosistema rappresenta la dinamica del moto lungo la traccia, e non è di diretto interesse nello studio della dinamica dell'inseguimento della traccia stessa, che invece è rappresentata dal secondo sottosistema. Si può osservare che questo secondo sottosistema è tempo variante nel caso generale (A_2 contiene il termine $\bar{v}(t)$). Nel caso particolare in cui sia $\bar{v}(t) = \bar{v}$ costante, anche questo sottosistema è lineare tempo invariante, completamente raggiungibile dal secondo ingresso, e in forma canonica di controllo. Considereremo questo caso, lasciando alcune considerazioni sul caso a parametri tempo-varianti a più avanti.

La stabilizzazione del secondo sottosistema nell'origine, che è sufficiente a portare il veicolo sulla traccia desiderata, può essere ottenuta semplicemente con una retroazione degli errori in y e θ ponendo

$$\omega = -K_2\,\widetilde{\xi}_2 - K_3\,\widetilde{\xi}_3\,,$$

dove la scelta di $K_2, K_3 > 0$ alloca gli autovalori nel semipiano sinistro. Se in aggiunta si desidera che il veicolo raggiunga il riferimento lungo la traccia, basterà porre ulteriormente $\widetilde{v} = -K_1\widetilde{\xi}_1$, $K_1 > 0$.

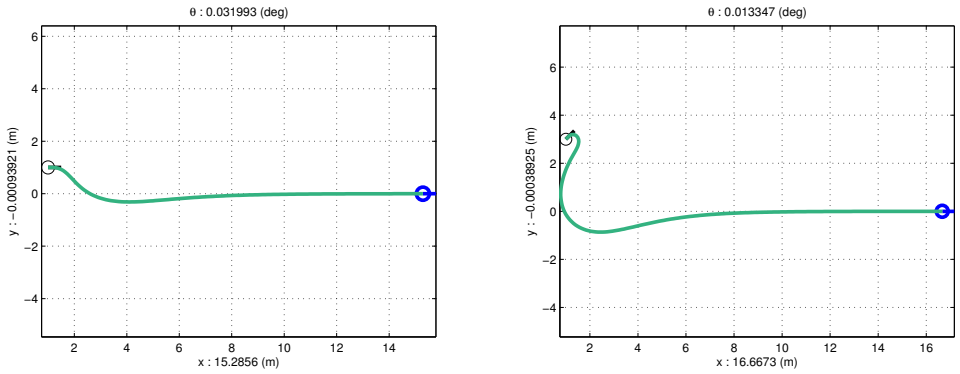
Naturalmente, questo risultato si appoggia sulla ipotesi che lo stato sia noto, e garantisce la convergenza sull'asse x solo per condizioni iniziali sufficientemente piccole. Qualora lo stato non sia completamente noto, si può ricorrere ad un osservatore asintotico che sulla base di alcune uscite permetta di risalire all'intero stato. Ad esempio, scegliendo come uscita la distanza $\widetilde{\xi}_2 = y$ dalla carreggiata sulla quale vogliamo stabilizzare il veicolo, si ottiene la seguente matrice di osservabilità per il sistema linearizzato

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{v} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

da cui $\ker(\mathcal{O}) = \mathrm{Im}([1\ 0\ 0])$. A partire da tale uscita il sistema linearizzato approssimato non è completamente osservabile (lo stato $\widetilde{\xi}_1 = x - \bar{x}$ non è ricostruibile), ma essendo il sottosistema del controllo di traccia osservabile, è possibile utilizzare l'uscita y per ricostruire $\widetilde{\xi}_3 = \theta$ e realizzare quindi il controllo di traccia.

Quando il controllo ottenuto sulla base del modello linearizzato è applicato al vero modello cinematico del veicolo, questo ne risulta asintoticamente stabilizzato sulla traccia (si vedano ad esempio i risultati di alcune simulazioni in fig. 2.9). Ovviamente la convergenza alla traccia è garantita solo per errori iniziali sufficientemente piccoli.

Esercizio. Si valuti analiticamente e numericamente una stima del bacino di attrazione del controllo basato su modello linearizzato. Si ripeta lo



(a) (b)

Figure 2.9: Risultati della simulazione per la stabilizzazione dell'uniciclo sulla retta $y = 0$ mediante controllore basato sul sistema linearizzato approssimato attorno alla traccia di riferimento con $\widehat{v} = 10$ e stato iniziale: (a) $q_0 = [x_0, y_0, \theta_0]^T = [1,\ 1,\ 0]$; (b) $q_0 = [x_0, y_0, \theta_0]^T = [1,\ 3,\ \frac{\pi}{4}]$.

studio per diverse scelte dei parametri del controllore linearizzato.

Esercizio. Si costruisca un controllore con retroazione della sola uscita y (distanza dalla retta). Si verifichi se per condizioni iniziali all'interno di una regione data (ad es. nella forma $|y(0)| \leq y_0$, $|\theta(0)| \leq \theta_0$) si può garantire l'asintotica stabilità e il non superamento nelle evoluzioni di limiti funzionali assegnati (ad es. nella forma $|y(t)| \leq y_M$, $|\theta(t)| \leq \theta_M$, $\forall t$).

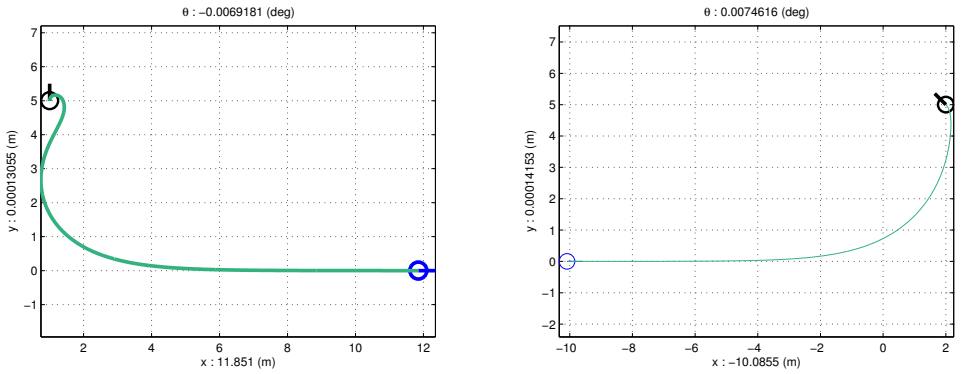
Controllo mediante funzione di Lyapunov

È possibile osservare che in effetti la dinamica delle variabili y e θ non dipende in alcun modo dalla x. Quindi possiamo studiare la seconda e terza equazione di (2.21) come un sottosistema a sé stante, con variabili di stato (y, θ) ed ingresso ω che le deve regolare a zero. Possiamo quindi costruire una funzione candidata di Lyapunov di controllo positiva definita intorno all'origine nello spazio di stato ridotto (y, θ) nella forma

$$V(q) = \frac{1}{2}(y^2 + \theta^2)\,,$$

per la quale si ha

$$\dot{V}(q) = y \sin\theta\, \bar{v}(t) + \theta\, \omega\,.$$



(a) (b)

Figure 2.10: Risultati della simulazione per la stabilizzazione dell'uniciclo sulla retta $y = 0$ mediante funzione di controllo di Lyapunov: (a) stato iniziale $q_0 = [x_0, y_0, \theta_0]^T = [1,\ 5,\ \frac{\pi}{2}]$ e $\widehat{v} = 10$; (b) stato iniziale $q_0 = [x_0, y_0, \theta_0]^T = [2,\ 2,\ \frac{3\pi}{4}]$ e $\widehat{v} = -10$ (marcia indietro). Per tutte le simulazioni la costante di controllo K_θ è stata scelta pari a 20.

Scegliendo come legge di controllo

$$\omega(y, \theta) = -y \frac{\sin\theta}{\theta}\, \bar{v}(t) - K_\theta\, \theta \tag{2.22}$$

con $K_\theta > 0$ costante, si ottiene $\dot{V}(q) = -K_\theta \theta^2$, che è negativa semi-definita. Si noti che la funzione di retroazione $\omega(y, \theta)$ è ben definita e continua ovunque, in particolare anche in $\theta = 0$, dove vale $\omega(y, 0) = -y\, \bar{v}(t)$.

Si ottiene immediatamente che l'insieme $R = \{q | \dot{V}(q) = 0\}$ è dato da $R = \{y, \theta | \theta = 0\}$. Da qui si ricava facilmente che l'unica traiettoria del sistema interamente contenuta in R è caratterizzata da $\dot{\theta} = 0 = \omega = -y\bar{v}(t)$, dalla quale infine si ottiene che, per $\bar{v}(t) \neq 0$, tutte le traiettorie che partono dall'interno di una curva di livello di V convergono al punto di equilibrio $(y, \theta) = (0, 0)$. Inoltre, essendo V radialmente illimitata, è possibile concludere per la globale asintotica stabilità dell'equilibrio.

I risultati di alcune simulazioni sono riportati in fig. 2.10.

Controllo con linearizzazione esatta dall'uscita.

Come già visto, stabilizzare l'uniciclo sull'asse x implica controllare a zero identicamente la variabile di stato y, e questo implica che anche l'orientazione θ raggiungerà un valore costante. Consideriamo quindi come obiettivo diretto del controllo la variabile y, e consideriamone la relazione dinamica con

l'ingresso ω a nostra disposizione (ricordiamo che per ipotesi la velocità è assegnata ma non necessariamente costante, $v = \bar{v}(t)$). Deriviamo in altri termini la y finchè non appare l'ingresso:

$$\begin{aligned}\dot{y} &= \bar{v}(t)\sin\theta \\ \ddot{y} &= \dot{\bar{v}}(t)\sin\theta + \bar{v}(t)\omega\cos\theta.\end{aligned}$$

Troviamo quindi che nella seconda derivata della variabile obiettivo del nostro controllo, appare esplicitamente l'ingresso a nostra disposizione. Nella ipotesi che $\bar{v}(t) \neq 0$ e che $\theta(t) \neq \pm\pi/2$, possiamo porre

$$\omega = \frac{\nu(t) - \dot{\bar{v}}(t)\sin\theta}{\bar{v}(t)\cos\theta}\,, \tag{2.23}$$

ottenendo così la dinamica

$$\ddot{y} = \nu(t).$$

dove $\nu(t)$ rappresenta un nuovo ingresso che ci riserviamo di scegliere. Questa è niente altro che la dinamica lineare di un doppio integratore, che può essere rappresentata dalla funzione di trasferimento $y(s) = \frac{1}{s^2}\nu(s)$ ovvero dalla equazione nello spazio di stato

$$\begin{cases}\dot{\xi}_1 = \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 = \nu\end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{bmatrix}\dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 \\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi_1 \\ \xi_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 \\ 1\end{bmatrix}\nu\,,$$

dove si è posto

$$\begin{bmatrix}\xi_1 \\ \xi_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}y \\ \dot{y}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}y \\ \bar{v}(t)\sin\theta\end{bmatrix}.$$

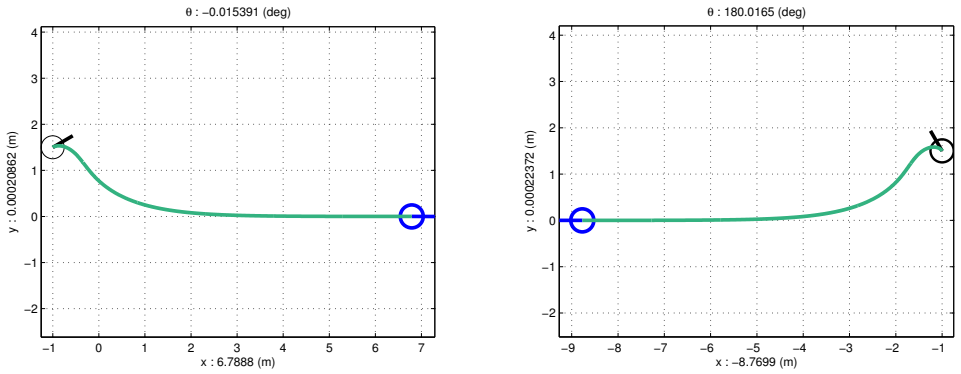
Di fatto la scelta del controllo (2.23) ci permette di eliminare esattamente alcune delle nonlinearità presenti nel sistema, senza aver fatto alcuna approssimazione.

Il sistema lineare così ottenuto può essere poi regolato a zero con estrema facilità dal nuovo ingresso $\nu(t)$ usando una retroazione del tipo $\nu = -k_o\xi_1 - k_1\xi_2$, garantendo quindi che $\xi_1 \to 0$ (ovvero che $y \to 0$) asintoticamente nel modo desiderato, secondo il valore assegnato alle costanti k_o e k_1.

Osserviamo adesso cosa succede della variabile x, che non è rappresentata dalle nuove variabili ξ. La dinamica di x diviene

$$\dot{x} = \bar{v}(t)\cos\theta \;= \bar{v}(t)\cos\left(\arcsin\left({}^{\xi_2}/_{\bar{v}(t)}\right)\right),$$

e rimane quindi fortemente nonlineare e dipendente sia dallo stato ξ che, indirettamente, dal controllo ν.



(a) (b)

Figure 2.11: Risultati della simulazione per la stabilizzazione dell'uniciclo sulla retta $y = 0$ con la tecnica di linearizzazione esatta. Nei due casi le condizioni iniziali sono $x(0) = -1$ e $y(0) = 1.5$ con orientamento iniziale: (a) $\theta(0) = \pi/3$, (b) $\theta(0) = 2\pi/3$. Si noti come il veicolo, pur raggiungendo in entrambi i casi la retta $y = 0$, assume un orientamento finale pari a 0 (a) o π (b), a seconda delle condizioni iniziali.

La scelta fatta per $\nu(t)$ garantisce che $\xi = 0$ per $t \to \infty$. Questo implica che anche $\bar{v}(t) \sin\theta = \xi_2$ tende a zero, e questo, nell'ipotesi $\bar{v}(t) \neq 0$, implica $\theta = 0, \pi$. Si osserva quindi che, a regime su $y \equiv 0$, vale

$$\dot{x} = \begin{cases} \bar{v}(t) \text{ se } \theta = 0 \\ -\bar{v}(t) \text{ se } \theta = \pi\,. \end{cases}$$

Questo significa che il veicolo si muove con velocità $\bar{v}(t)$ nella direzione delle x crescenti o decrescenti, con $\theta = 0$ o $\theta = \pi$, a seconda delle condizioni iniziali. I risultati di alcune simulazioni sono riportati in figura 2.11.

Esercizio. Si progetti un controllore che permetta ad un uniciclo di inseguire una traccia consistente in una retta generica, ovvero in una circonferenza, o ancora in una curva arbitraria nel piano (in quest'ultimo caso, si diano condizioni sufficienti affinché il problema sia risolubile). *Suggerimento:* si consideri il problema di inseguire la retta tangente al punto istantaneamente più vicino al veicolo sulla traccia.

Esercizio. Si consideri il caso in cui il veicolo sia soggetto a disturbi trasversali che rappresentano violazioni del vincolo, come ad esempio una componente di scarroccio su una deriva on l'effetto degli scorrimenti degli

pneumatici su un veicolo terrestre. Si modelli il disturbo nella forma

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \omega + \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{bmatrix} d \tag{2.24}$$

e si consideri la robustezza dei controllori visti nel caso che $d(t)$ sia una funzione assegnata del tempo (ad es. come effetto del vento), oppure sia una funzione dello stato e degli ingressi (ad esempio ponendo $d(q, u) = \alpha v \omega$, con α diversi.

2.2.4 Inseguimento di moto con un uniciclo

Per l'inseguimento di un moto assegnato (figura 2.12), è da considerare il fatto che i vincoli cui è sottoposto l'uniciclo possono rendere impossibile raggiungere e mantenere il veicolo sul punto obiettivo, se questo si muove con legge arbitraria.

Si consideri infatti un moto desiderato generale, descritto da una terna di funzioni assegnate $q_d(t) = (x_d(t), y_d(t), \theta_d(bt))$. Definito l'errore di postura tra il veicolo da controllare e l'obiettivo come $e = [x_d - x, y_d - y, \theta_d - \theta]^T$, il problema è ricondotto a un problema di stabilizzazione nell'origine per e. Notando che l'errore di inseguimento prescinde dalla posizione assoluta dei due veicoli rispetto ad una terna fissa di riferimento $\langle W \rangle$, ma dipende solamente dalla loro posizione relativa, è possibile riferire le variabili errore rispetto ad una terna di riferimento solidale con il veicolo "inseguitore" $\langle I \rangle$ ed allineata con l'asse x nel suo senso di avanzamento, come riportato in figura 2.12. Nelle nuove coordinate, l'errore di postura si scrive

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x_d - x)\cos\theta + (y_d - y)\sin\theta \\ -(x_d - x)\sin\theta + (y_d - y)\cos\theta \\ \theta_d - \theta \end{bmatrix}.$$

Derivando rispetto al tempo queste espressioni, ed esprimendo tutto nelle nuove corrdinate di errore, si ha

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -v + e_2\omega + \cos(\theta_d - e_3)\dot{x}_d + \sin(\theta_d - e_3)\dot{y}_d \\ -e_1\omega - \sin(\theta_d - e_3)\dot{x}_d + \cos(\theta_d - e_3)\dot{y}_d \\ \dot{\theta}_d - \omega \end{bmatrix}, \tag{2.25}$$

dove si sono usate le equazioni del veicolo (2.20). Si consideri ora la possibilità di avere un equilibrio con errore nullo, cioè un inseguimento perfetto con

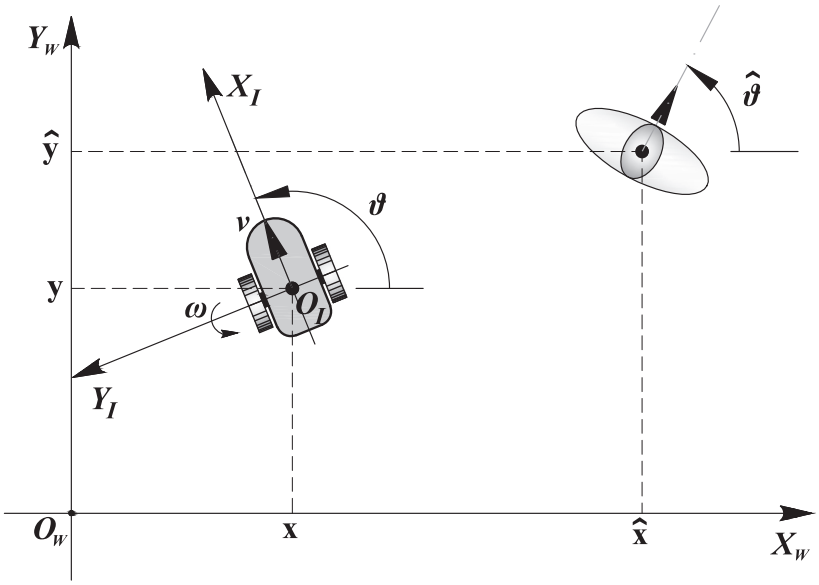


Figure 2.12: Riferimento assoluto $\langle W \rangle$ e riferimento solidale al veicolo inseguitore $\langle I \rangle$.

$e \equiv 0$ e $\dot{e} \equiv 0$. Dalla prima e terza delle (2.25) si ottiene immediatamente che deve essere

$$\begin{array}{rcl} v & = & \dot{x}_d \cos\theta_d + \dot{y}_d \sin\theta_d \\ \omega & = & \dot{\theta}_d \end{array},$$

mentre per soddisfare la seconda equazione delle (2.25) è necessario che sia

$$\dot{x}_d \sin\theta_d - \dot{y}_d \cos\theta_d = \begin{bmatrix} \sin\theta_d & -\cos\theta_d & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_d \\ \dot{y}_d \\ \dot{\theta}_d \end{bmatrix} = 0.$$

Questa condizione esprime un vincolo sul moto del punto da inseguire, che è dello stesso tipo di quello cui è sottoposto il veicolo inseguitore. In altri termini, l'inseguimento esatto da parte di un uniciclo è possibile solo se il punto obiettivo si muove anch'esso come un uniciclo (questa può essere considerata una istanza del cosiddetto "principio del modello interno" nella teoria del servocontrollo).

Se il moto dell'obiettivo da inseguire è generato proprio da un modello di

uniciclo, ovvero se

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_d \\ \dot{y}_d \\ \dot{\theta}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_d \\ \sin\theta_d \\ 0 \end{bmatrix} v_d + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \omega_d,$$

la dinamica dell'errore di inseguimento (2.25) assume la forma semplificata

$$\dot{e} = \begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -v + e_2\omega + v_d \cos e_3 \\ -e_1\omega + v_d \sin e_3 \\ \omega_d - \omega \end{bmatrix}. \tag{2.26}$$

Controllo mediante linearizzazione approssimata

Il sistema (2.26) ha adesso un equilibrio in $e = 0$ corrispondente agli ingressi $v = v_d(t)$ e $\omega = \omega_d(t)$. Definendo le variabili di controllo traslate $u_1 = v - v_d(t)$ e $u_2 = \omega - \omega_d(t)$, il sistema assume la forma $\dot{e} = f(e,t) + g(e)u$, ovvero

$$\dot{e} = \begin{bmatrix} -v_d(t)\,(1 - \cos e_3) + \omega_d(t)\, e_2 \\ v_d(t)\, \sin e_3 - \omega_d(t)\, e_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} e_2 \\ -e_1 \\ -1 \end{bmatrix} u_2\,. \tag{2.27}$$

Per controllare il sistema (2.27) si può procedere a linearizzarne il modello intorno all'equilibrio nell'origine ($e = 0, u = 0$), per poi applicare tecniche di controllo lineare. Il modello linearizzato $\dot{e} = Ae + Bu$ si ottiene facilmente come

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \omega_d(t) + u_2 & -v_d \sin e_3 \\ -\omega_d - u_2 & 0 & v_d \cos e_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\Bigg|_{\substack{e=0 \\ u=0}} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_d(t) & 0 \\ -\omega_d(t) & 0 & v_d(t) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

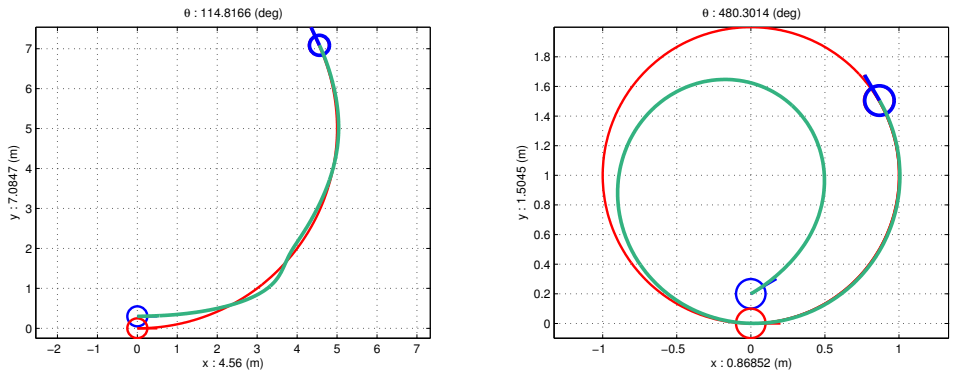
$$B = \begin{bmatrix} -1 & e_2 \\ 0 & -e_1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\Bigg|_{\substack{e=0 \\ u=0}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Il sistema è in generale tempo variante, essendo gli elementi della matrice dinamica A funzioni esplicite del tempo. Il controllo del modello linearizzato si può d'altronde effettuare con metodi elementari solo nell'ipotesi che il

riferimento abbia velocità $v_d(t) = v_d$, $\omega_d(t) = \omega_d$ costanti. In questa ipotesi, il sistema linearizzato ha matrice di raggiungibilità

$$R = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & \omega_d^2 & -\omega_d v_d \\ 0 & 0 & \omega_d & -v_d & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ed è quindi completamente raggiungibile purchè la velocità di avanzamento e/o quella di rotazione dell'obiettivo da inseguire sia diversa da zero. Se questo è il caso, una semplice retroazione degli stati $u = Ke$ permette di allocare gli autovalori di $A + BK$ liberamente nel semipiano sinistro, e quindi puó rendere l'inseguimento asintoticamente stabile. Naturalmente, questo risultato si appoggia sulla ipotesi che sia lo stato (ovvero l'errore di inseguimento) che le velocità dell'obiettivo (da cui dipende la retroazione $K = K(v_d, \omega_d)$) siano note, e garantisce la convergenza sull'obiettivo solo per condizioni iniziali sufficientemente piccole. Ad illustrazione di questa tecnica, in figura 2.13 è riportato il risultato di alcune simulazioni



(a) $e_o = [0.3,\ 0,\ 0]^T$, $v_d = 1$ e $\omega_d = 0.2$ (b) $e_o = [0.2,\ 0,\ \pi/6]^T$, $0v_d = 1$ e $\omega_d = 1$

Figure 2.13: Inseguimento di obiettivi mobili (in rosso) con veicolo di tipo uniciclo (in blu). Il controllore implementato, basato sul modello linearizzato approssimato, è costituito da una semplice retroazione dello stato ($u = Ke$) il quale è stato stimato utilizzando come unica uscita misurata l'errore e_1. Il sistema linearizzato risulta completamente osservabile dalla misura di e_1 purchè la velocità di avanzamento e/o quella di rotazione dell'obiettivo da inseguire sia diversa da zero.

Nel caso più generale di velocità dell'obiettivo non costanti, il problema di stabilizzazione è più complesso. Una tecnica semplice, ma sulle cui caratteristiche di convergenza non è possibile dare garanzie precise, consiste

nell'applicare una versione "estesa" della tecnica di allocazione, calcolando una matrice di retroazione $K(t) = K(v_d(t), \omega_d(t))$ che allochi gli autovalori istantanei di $A(t) + BK(t)$ in una posizione costante nel semipiano sinistro (questo può venir fatto con un algoritmo di allocazione in forma simbolica, ovvero ricalcolando numericamente la retroazione ad intervalli di tempo sufficientemente brevi, in modo simile a come si procede in un filtro di Kalman esteso). Si noti che la procedura di allocazione estesa non è sufficiente a garantire la stabilità nel caso generale: comunque, se le velocità $v_d(t)$ e $\omega_d(t)$ sono limitate e le loro derivate $\dot{v}_d(t)$ e $\dot{\omega}_d(t)$ sono sufficientemente piccole, il teorema di Rosenbrock sulla stabilità dei sistemi lineari lentamente tempo varianti garantisce l'esponenziale stabilità del sistema linearizzato risultante.

Esercizio. Applicare il metodo di inseguimento di traiettoria per un veicolo-obiettivo che si muova con legge tempo variante. Si supponga inoltre di conoscere solo la misura della distanza tra i veicoli e la direzione del veicolo inseguito rispetto all'inseguitore, nel sistema di riferimengto di quest'ultimo, sviluppando (se possibile) un osservatore dello stato.

Controllo mediante funzione di Lyapunov

Torniamo a considerare la dinamica dell'errore di tracking (2.26).

$$\dot{e} = \begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -v + e_2\omega + v_d \cos e_3 \\ -e_1\omega + v_d \sin e_3 \\ \omega_d - \omega \end{bmatrix}.$$

Si scelga come funzione candidata

$$V(e) = \frac{1}{2}(e_1^2 + e_2^2) + K(1 - \cos e_3),$$

con $K > 0$, che è p.d. e globalmente p.s.d., annullandosi solo in $e_3 = 0$ e multipli di 2π. Si noti che l'insieme $\Omega_\ell = \{e | V(e) < \ell\}$ è limitato dalla curva di livello $V(e) = \ell$ chiusa per ogni $\ell < 2K$. Calcolandone la derivata si ha

$$\begin{aligned} \dot{V}(e) &= e_1(v_d \cos e_3 - v + e_2\omega) + e_2(v_d \sin e_3 - e_1\omega) + K \sin e_3(\omega_d - \omega) \\ &= e_1(v_d \cos e_3 - v) + e_2(v_d \sin e_3) + K \sin e_3(\omega_d - \omega) \\ &= e_1(v_d \cos e_3 - v) + \sin e_3 \left(e_2 v_d + K(\omega_d - \omega)\right). \end{aligned}$$

Scegliendo i controlli

$$\begin{cases} v = v_d \cos e_3 - \lambda_1 e_1 \\ \omega = \omega_d - \frac{e_2}{K} v_d - \lambda_2 \sin e_3 \end{cases},$$

con λ_1 e λ_2 guadagni positivi, si ottiene

$$\dot{V} = -\lambda_1 e_1^2 - K\lambda_2 \sin^2 e_3.$$

Nel caso in cui v_d e ω_d siano costanti possiamo usare i teoremi di Lyapunov e dell'insieme invariante massimo per discutere la convergenza. Se il riferimento varia le sue velocità, il sistema (2.26) diviene tempo–variante, e il teorema di Lasalle deve essere usato con maggior cautela, ricorrendo alla versione di Lasalle-Yoshizawa che lo generalizza a sistemi tempo varianti.

In ogni caso, posto $\dot{V}(e) = -W(e)$ negativa semi-definita, e definito l'insieme S in cui si annulla la derivata della funzione di Lyapunov ($S = \{e \in \Omega_{\ell=2K} | W(e) = 0\}$), si ha che $e(t) \to S$ per $t \to \infty$. D'altronde, per $e \in S$ vale $v = v_d$ e $\omega = \omega_d - \frac{e_2}{K} v_d$, da cui la dinamica del sistema diviene

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{e}_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_2\omega_d - \frac{1}{K} e_2^2 v_d \\ 0 \\ -\frac{1}{K} e_2 v_d \end{bmatrix}.$$

Da queste relazioni si ricava che, se almeno una tra le velocità dell'obiettivo da inseguire v_d e ω_d è diversa da zero, l'insieme invariante massimo in S è l'origine, che è quindi un punto di equilibrio asintoticamente stabile per il sistema (2.26), attrattivo per tutti i punti di Ω_{2K}[9].

Ad illustrazione di questa tecnica, fissando $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $K = 10$, e scegliendo come condizione iniziale del veicolo inseguitore il punto $q_0 = [x_0, y_0, \theta_0]^T = [0,\ 20,\ \frac{\pi}{2}]^T$ si ottengono vari risultati a seconda delle velocità del riferimento. Nel primo esempio (fig. 2.14-a) il veicolo di riferimento ha come condizione iniziale $q_d(0) = [-10,\ 0,\ -\frac{\pi}{4}]^T$ e velocità $[v_d, \omega_d]^T = [-10,\ 0]^T$, che definiscono una retta di equazione $y = -x - 10$. Se il veicolo di riferimento ha come condizione iniziale $q_d(0) = [0,\ -10,\ 0]^T$ e velocità $[v_d, \omega_d]^T = [10,\ 1]^T$ (fig. 2.14-b), la sua traiettoria descrive una circonferenza di raggio $R = 10$ nello spazio di stato del veicolo, percorsa a velocità costante. Nel terzo esempio (fig. 2.14-c) il veicolo di riferimento ha come condizione iniziale $q_d(0) = [0,\ -20,\ 0]^T$. Le velocità del riferimento sono stavolta $[v_d, \omega_d]^T = [0,\ 1]^T$ corrispondenti ad una traiettoria di rotazione sul posto. Nel quarto ed ultimo esempio (figura 2.14 in basso a destra) il veicolo di riferimento ha come condizione iniziale $q_d(0) = [0,\ -10,\ 0]^T$ e velocità tempo variante $[v_d, \omega_d]^T = [20\cos(t),\ 10\sin(t)]^T$, le quali descrivono una traiettoria complessa nello spazio di stato.

[9] Il sistema controllato ammette anche altri equilibri in $e_1 = e_2 = 0$ ed $e_3 = \pm\pi$, che sono instabili. La situazione si ripete per i multipli di 2π

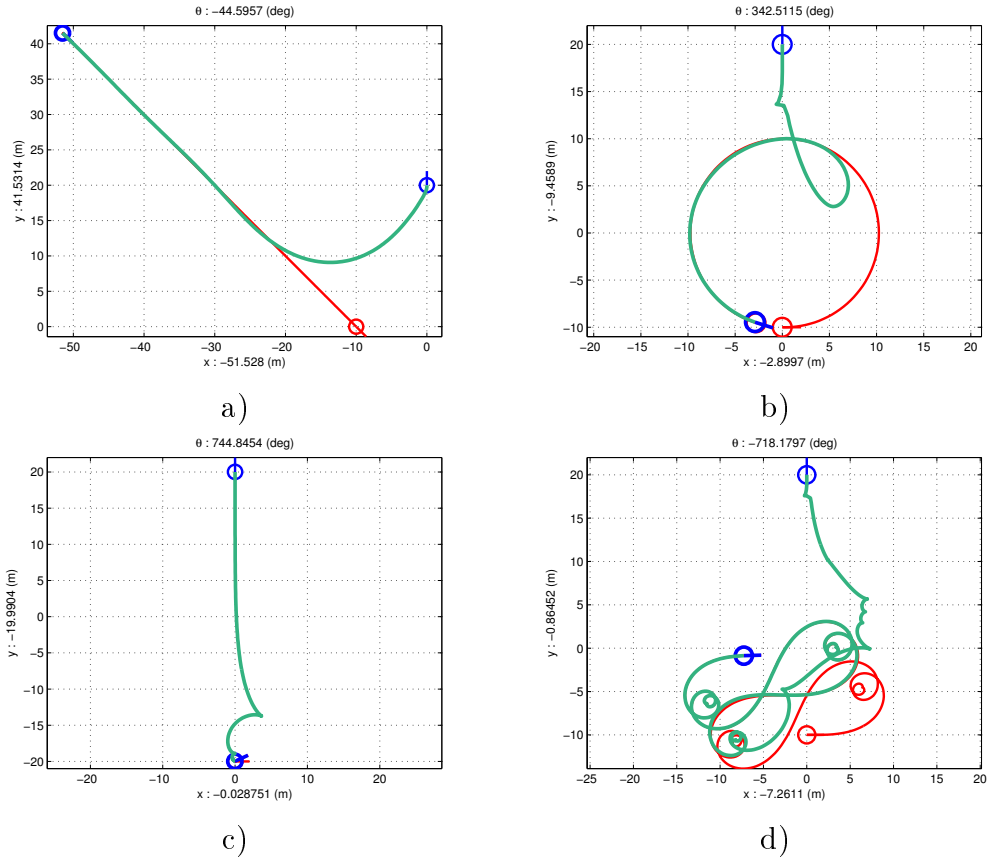


Figure 2.14: Inseguimento di obiettivi mobili con veicolo di tipo uniciclo, con una legge derivata da una funzione di Lyapunov di controllo.

Controllo mediante linearizzazione esatta

Torniamo per comodità a porre il sistema nelle coordinate originali, e consideriamo il problema di far inseguire alle variabili x, y del veicolo il moto $x_d(t), y_d(t)$, mediante l'uso dei due ingressi a disposizione $v(t), \omega(t)$. Derivando una prima volta le variabili da regolare, si ha

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v \cos\theta \\ \dot{y} &= v \sin\theta \end{aligned}$$

In entrambi i casi le derivate prime dipendono esplicitamente dagli ingressi. In effetti, entrambe le derivate sono legate esplicitamente alla velocità lineare v, mentre ω non appare. Questo ci impedisce di trovare immediatamente una espressione del controllo che possa linearizzare esattamente questa dinamica.

La mancata apparizione dell'ingresso ω nella prima derivata in cui appare v indica che il primo ingresso agisce sulle variabili considerate con un certo

ritardo rispetto al secondo. Possiamo allora pensare di non agire direttamente sull'ingresso v, ma indirettamente modificando la sua derivata per mezzo di un nuovo ingresso $\mu(t)$, cioè di porre $\dot{v} = \mu$. Questo di fatto corrisponde a trasformare l'ingresso v in una nuova componente dello stato, adesso a dimensione quattro (ad esempio, $\xi = [x, y, \theta, v]^T$; e a sostituire v come ingresso con la sua derivata μ, così effettivamente ritardando quel canale.

Non essendo più adesso la v un ingresso, possiamo procedere ad una seconda derivazione ottenendo

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= v \cos\theta \\
\ddot{x} &= \dot{v} \cos\theta - v\,\dot{\theta} \sin\theta = \mu \cos\theta - v\,\omega \sin\theta \\
\dot{y} &= v \sin\theta \\
\ddot{y} &= \dot{v} \sin\theta + v\,\dot{\theta} \cos\theta = \mu \sin\theta + v\,\omega \cos\theta\,.
\end{aligned}$$

Si può notare che nelle derivate seconde di entrambe le coordinate x, y appaiono adesso entrambi gli ingressi. Possiamo riscrivere in forma matriciale

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta v \\ \sin\theta & \cos\theta v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ \omega \end{bmatrix} \stackrel{def}{=} E(\xi)u\,.$$

Se $v \neq 0$ la matrice $E(\xi)$ è *non singolare*. Scegliendo gli ingressi μ e ω come

$$\begin{bmatrix} \mu \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta/v & \cos\theta/v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{bmatrix} = E^{-1}(q)\nu\,. \tag{2.28}$$

e sostituendo questo controllo nella dinamica si ottiene

$$\begin{aligned}
\ddot{x} &= \nu_1 \\
\ddot{y} &= \nu_2
\end{aligned}$$

ovvero un sistema lineare e disaccoppiato in due integratori doppi.

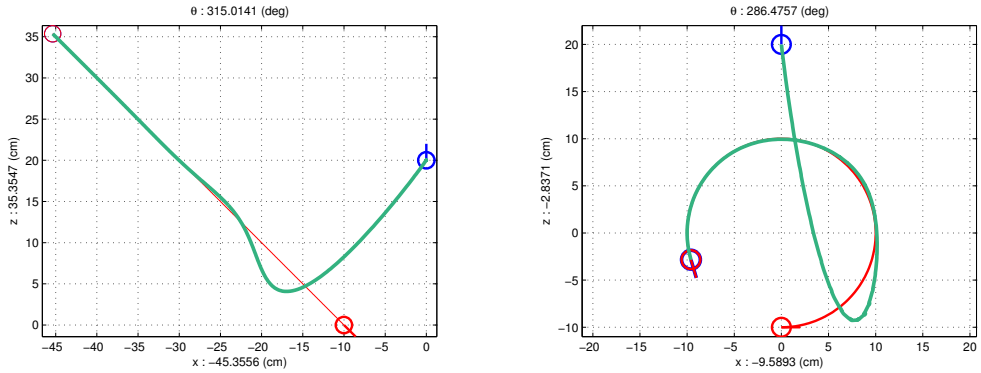
Non rimane che costruire controllori per i nuovi ingressi ν_1, ν_2 in modo da inseguire i riferimenti $x_d(t)$ e $y_d(t)$. Supponendo di conoscere $\dot{x_d}$ e $\ddot{x_d}$, cioè la velocità e accelerazione dell'uniciclo di riferimento lungo l'asse x, possiamo scegliere

$$\nu_1 = \ddot{x_d} + \lambda_v(\dot{x_d} - \dot{x}) + \lambda_0(x_d - x),$$

quindi

$$(\ddot{x} - \ddot{x_d}) + \lambda_v(\dot{x} - \dot{x_d}) + \lambda_p(x - x_d) = 0 \tag{2.29}$$

Scegliendo opportunamente i coefficienti λ_p e λ_v l'errore di inseguimento in x converge quindi esponenzialmente a zero con dinamica assegnata. Analogamente e indipedentemente si procede per y.



a) b)

Figure 2.15: Inseguimento di obiettivi mobili con veicolo di tipo uniciclo controllato da una legge basata sulla linearizzazione esatta del modello .

Ad illustrazione di questa tecnica, scegliendo come condizione iniziale del veicolo inseguitore il punto $q(0) = [x_0, y_0, \theta_0]^T = [0,\ 20,\ \frac{\pi}{2}]^T$ si ottengono vari risultati a seconda delle velocità del riferimento.

Nel primo esempio (fig. 2.15-a) il veicolo di riferimento ha come condizione iniziale $q_d(0) = [-10,\ 0,\ -\frac{\pi}{4}]^T$ e velocità $[v_d, \omega_d]^T = [-10,\ 0]^T$, che definiscono una retta di equazione $y = -x - 10$. Se il veicolo di riferimento ha come condizione iniziale $q_d(0) = [0,\ -10,\ 0]^T$ e velocità $[v_d, \omega_d]^T = [10,\ 1]^T$, la sua traiettoria descrive una circonferenza di raggio $R = 10$ nello spazio di stato del veicolo, percorsa a velocità costante (fig. 2.15-b).

Osservazione: per applicare questo metodo di controllo non è necessario chiedere che il veicolo di riferimento abbia la stessa cinematica dell'inseguitore, ovvero non si usa il modello interno. Ovviamente, nel caso di un riferimento che si muova con moti non eseguibili dall'uniciclo, l'inseguimento non potrà essere asisntoticamente convergente ad errore nullo, ma potrà limitare gli errori.

Esercizio. Applicare i diversi controllori visti per l'inseguimento di moto di un veicolo che non soddisfa il principio del modello interno, e confrontarne le prestazioni.

2.2.5 Controllo della postura di un uniciclo

Dal punto di vista prettamente controllistico, il problema del controllo di postura ("point–to–point motion") è un problema di stabilizzazione di un punto di equilibrio nello spazio di stato del veicolo.

Nel caso dei veicoli soggetti a vincoli anolonomi, questo problema è considerevolmente più difficile di quelli di inseguimento di un moto o di una traccia. Per illustrare questo punto, si consideri che il sistema linearizzato ottenuto nel paragrafo 2.2.4 diviene non completamente raggiungible né stabilizzabile quando il veicolo di riferimento sia immobile $\widehat{v} = \widehat{\omega} = 0$, come accade appunto se si desidera raggiungere una posizione e orientazione costanti. Ciò impone che la stabilizzazione di postura debba usare metodi di controllo intrinsecamente nonlineari.

Anche all'interno dei sistemi nonlineari, la stabilizzazione di un robot mobile in una assegnata postura rappresenta un problema con caratteristiche molto particolari. Si consideri infatti il seguente teorema di carattere molto generale, dovuto a Roger Brockett:

Theorem 1. *Sia dato il sistema $\dot{x} = f(x, u)$, $x \in \mathbb{R}^n$, e sia x_0 uno stato di equilibrio del sistema con ingresso nullo (ossia $f(x_0, 0) = 0$). Condizione necessaria per l'esistenza di una legge di controllo differenziabile con continuità e tempo invariante $u(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ che renda l'equilibrio asintoticamente stabile è che l'immagine della funzione $f(x, u)$ applicata al dominio $\{x \in B_{x_0} \subset \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m\}$ contenga un insieme aperto in $\mathbb{R}^n$ di cui fa parte l'origine (ovvero $f(x, u)$ sia surgettiva localmente in x).*

Per applicare la condizione di Brockett alla cinematica dell'uniciclo dovremmo poter trovare una soluzione in x, y, θ, v, ω, con x, y, θ piccoli, per valori piccoli ma arbitrari del vettore $[a, b, c]^T$ in

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \cos\theta \\ v \sin\theta \\ \omega \end{bmatrix}.$$

Ciò è chiaramente impossibile: basti pensare al caso $a = 0, b \neq 0, \forall c$, che impone $\theta = \pm\pi/2$. Questo esclude che si possa trovare una retroazione tempo invariante e differenziabile con continuità per stabilizzare l'uniciclo su una postura assegnata.

Nonostante l'ostruzione posta dal teorema di Brockett, si consideri il problema di stabilizzare una postura (che senza perdere di generalità supporremo sia l'origine dello spazio di stato (x, y, θ)) per il veicolo di tipo uniciclo. Si introduca un nuovo sistema di coordinate polari definito da

$$\bar{q} = \begin{bmatrix} \rho \\ \phi \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{x^2 + y^2} \\ \arctan(\frac{y}{x}) - \pi \\ \phi - \theta \end{bmatrix} = \Phi(q)\,, \tag{2.30}$$

dove ρ è la distanza del punto di mezzo dell'interasse delle ruote dall'origine, ϕ è l'angolo[10] formato con l'asse delle ascisse dal vettore che unisce il veicolo all'origine, e α è l'angolo tra la direzione di avanzamento del veicolo ed il vettore stesso (figura 2.16).

Si osservi che il cambiamento di variabili è ben definito e biunivoco ovunque nel piano, eccetto che nell'origine. La coordinata ϕ non è infatti definita in $x = y = 0$, mentre all'origine dello spazio (ρ, ϕ, α) corrisponde univocamente l'origine di (x, y, θ).

La trasformazione di coordinate inversa è data da

$$q = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\rho\cos\phi \\ -\rho\sin\phi \\ \phi - \alpha \end{bmatrix} = \Phi^{-1}(\bar{q})\,. \tag{2.31}$$

Per questi cambiamenti di coordinate si ha

$$\Phi_* = \frac{\partial\Phi}{\partial q} = \begin{bmatrix} \frac{x}{\rho} & \frac{y}{\rho} & 0 \\ -\frac{y}{\rho^2} & \frac{x}{\rho^2} & 0 \\ -\frac{y}{\rho^2} & \frac{x}{\rho^2} & -1 \end{bmatrix}; \quad \Phi_*^{-1} = \frac{\partial\Phi^{-1}}{\partial\bar{q}} = \begin{bmatrix} -\cos\phi & \rho\sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & -\rho\cos\phi & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

e $\det\Phi_* = -1/\rho$, $\det\Phi^{-1} = -\rho$. Si osserva ancora che nel punto $\rho = 0$ le funzioni $\Phi(q)$ non definiscono un cambiamento di coordinate lecito, ma possono essere usate ovunque altrove.

Introducendo per convenienza la nuova variabile di controllo $w = v/\rho$ (definita anch'essa ovunque eccetto che nell'origine), il modello cinematico nelle nuove variabili di stato è dato da

$$\begin{bmatrix} \dot{\rho} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x\cos\theta + y\sin\theta}{\rho}\, v \\ \frac{-y\cos\theta + x\sin\theta}{\rho^2}\, v \\ \dot{\phi} - \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\rho\cos\alpha \\ \sin\alpha \\ \sin\alpha \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \omega \tag{2.32}$$

È possibile osservare che il sistema (2.32), ottenuto con un cambiamento non ovunque continuo di coordinate e quindi non perfettamente equivalente al sistema originario, soddisfa adesso la condizione necessaria per la stabilizzabilità.

Si può cercare quindi di stabilizzare il veicolo utilizzando un controllore alla Lyapunov. Si consideri a tal proposito la candidata

$$V(\bar{q}) = \frac{1}{2}(\lambda_1\rho^2 + \lambda_2\phi^2 + \alpha^2)$$

[10] Si dà per inteso che la funzione $\arctan(y/x)$ sia definita su tutti i quadranti del piano cartesiano come atan2 (y, x).

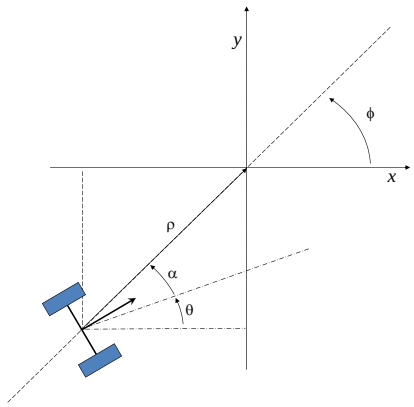


Figure 2.16: Coordinate usate per descrivere la postura dell'uniciclo.

con λ_1 e λ_2 costanti positive di progetto, per la quale si ha

$$\dot{V} = -\lambda_1 \rho^2 \cos\alpha\, w + \lambda_2 \phi \sin\alpha\, w + \alpha \sin\alpha\, w - \alpha\, \omega.$$

Si può porre una legge di controllo

$$\begin{aligned} w &= k_1 \cos\alpha, \quad k_1 > 0 \\ \omega &= k_1 \frac{\sin\alpha}{\alpha} \cos\alpha(\alpha + \lambda_2 \phi) + k_2 \alpha, \quad k_2 > 0, \end{aligned} \tag{2.33}$$

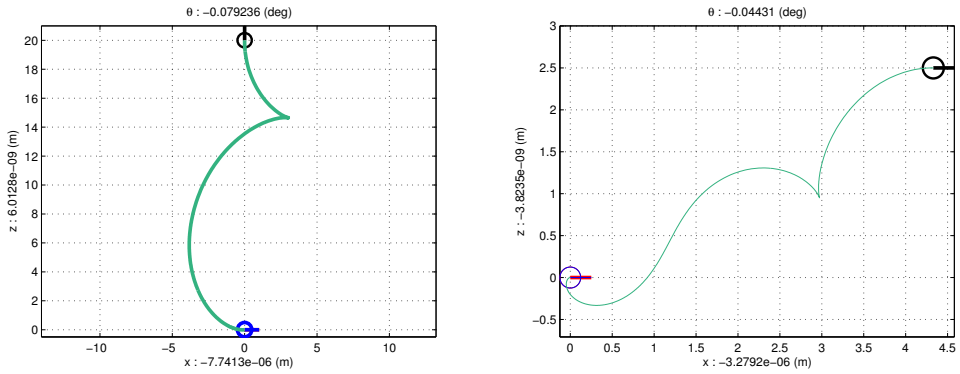
che è ben definita ovunque nelle coordinate $\bar{q}$. Si ottiene quindi

$$\dot{V}(\bar{q}) = -\lambda_1 k_1 \rho^2 \cos^2\alpha - k_2 \alpha^2$$

che è negativa semi-definita. Notando che nell'insieme $R = \{\bar{q} |\ \dot{V}(\bar{q}) = 0\} = \{\bar{q} |\ \rho = 0, \alpha = 0\}$ dalle (2.33) si ha $w = k_1$ (quindi $v = \rho w = 0$) e $\omega = k_1 \lambda_2 \phi$ e, sostituendo nella dinamica (2.32), $\omega = k_1 \lambda_2 \phi = \dot{\alpha} = 0$, quindi l'invariante massimo in R ha $\phi = 0$. Per Krasowsky si ha quindi che l'origine di $\bar{q}$ è asintoticamente stabile. Essendo la candidata $V(\bar{q})$ radialmente illimitata, si può concludere anche per la globale attrattività dell'origine.

I risultati di alcune simulazioni sono riportati in figura 2.17.

In conclusione, si osserva che, nonostante la difficoltà del problema nelle coordinate originali, il progetto e l'analisi della stabilità nelle coordinate $\bar{q}$ è stata svolta con tecniche semplici, e ha prodotto leggi di controllo continue e differenziabili con continuità. Naturalmente, vista la natura discontinua



(a) (b)

Figure 2.17: Risultati della simulazione per il controllo di postura di un uniciclo, a partire dalla posizione iniziale: (a) $(\rho_o, \phi_o, \alpha_o) = (20, 3\pi/2, \pi)$, (b) $(\rho_o, \phi_o, \alpha_o) = (5, 7\pi/6, 7\pi/6)$. Per entrambe le simulazioni, i valori delle costanti di controllo sono: $k_1 = k_2 = 1$ e $\lambda_2 = 0.5$.

delle trasformazioni usate, è necessario porre attenzione al significato e agli effetti reali delle posizioni fatte.

Si osservi inanzitutto che la convergenza di $\bar{q}$ all'origine è asintotica, e che quindi, se $\rho(0) \neq 0$, $\rho(t) \neq 0$ per ogni t finito. Se $\rho(0) = 0$, il controllo (2.33) resta ben definito. Si osservi in particolare che la velocità di traslazione $v = \rho w$ si annulla in queste configurazioni, e che la coordinata ϕ continua a convergere a zero, anche se perde significato fisico in relazione al veicolo originario.

Quando si esprimesse la legge di controllo (2.33) nelle originali coordinate q del veicolo, queste non rimarrebbero continue: in due configurazioni con veicoli in punti (x, y) arbitrariamente vicini (nella metrica naturale di q, $d = \sqrt{x^2 + y^2} + \alpha|\theta|$) ma in quadranti opposti del piano, i valori di α e ϕ, e quindi i controlli (2.33), assumono valori diversi per una differenza finita.

La praticità o meno del controllore proposto dipende dai sensori disponibili. Se le misure effettivamente ottenibili sono quelle delle configurazioni originali q, la discontinuità messa in evidenza rende difficile l'applicazione pratica nelle vicinanze dell'origine, dove il rumore di misura può provocare discontinuità a salto dell'azione di controllo. Se però i sensori a bordo veicoloi rilevano proprio la distanza dall'obiettivo e gli angoli sotto i quali lo si traguarda, il metodo diviene efficace e facilmente applicabile.

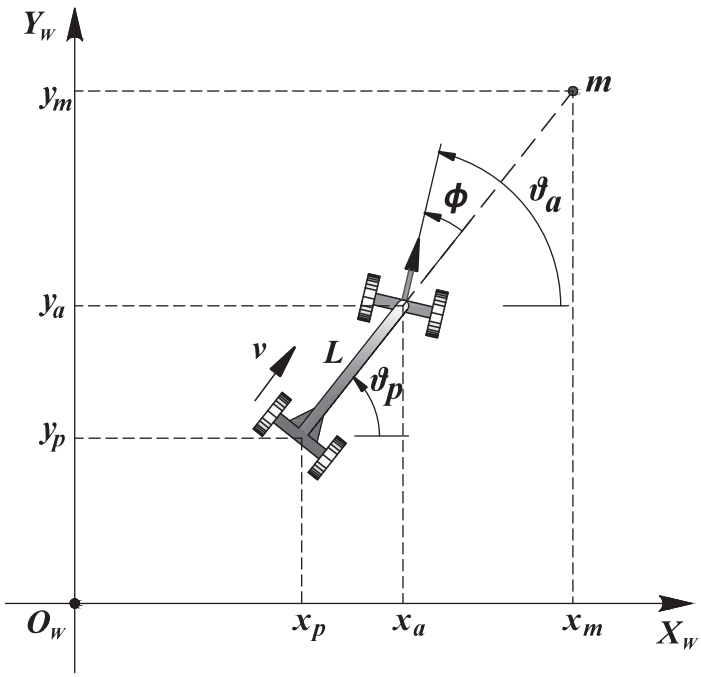


Figure 2.18: Veicolo di tipo "biciclo" equivalente ad un veicolo planare con due ruote.

2.3 Veicolo planare con vincolo di ruota doppia (biciclo)

Un "biciclo" è la schematizzazione di un veicolo planare con due ruote (o due coppie di ruote sullo stesso asse), di cui una, che considereremo come quella anteriore, può ruotare attorno ad un asse perpendicolare al piano e passante per il punto di contatto della ruota stessa sul piano, mentre l'asse della seconda ruota è fissato perpendicolarmente al segmento che unisce i punti di contatto delle ruote. Con riferimento alla figura 2.18, si considerino le coordinate (x_p, y_p) del centro dell'asse posteriore e l'orientazione θ_p del segmento di lunghezza L che unisce i due assi rispetto alle ascisse. Sia inoltre (x_a, y_a) il centro dell'asse anteriore, e θ_a la sua orientazione rispetto alle ascisse. I vincoli di ruota singola propri dei due assi sono scritti da

$$\begin{cases} \Gamma_1(q_p) = \dot{x}_a \sin\theta_a - \dot{y}_a \cos\theta_a = 0 \\ \Gamma_2(q_p) = \dot{x}_p \sin\theta_p - \dot{y}_p \cos\theta_p = 0\,. \end{cases} \tag{2.34}$$

Si noti che tra la posizione del centro dell'uniciclo anteriore e di quello posteriore sussiste un vincolo geometrico dato da

$$\begin{cases} x_a = x_p + L\cos\theta_p \\ y_a = y_p + L\sin\theta_p \end{cases} . \tag{2.35}$$

Quindi, per descrivere il sistema biciclo sono sufficienti solo quattro coordinate Lagrangiane. Per generalità, scegliamo di descrivere il moto del biciclo attraverso la posizione di un punto m qualsiasi sull'asse del veicolo, a distanza $L_m \neq 0$ dal centro dell'asse posteriore, ovvero

$$\begin{cases} x_m = x_p + L_m\cos\theta_p = x_a + (L_m - L)\cos\theta_p \\ y_m = y_p + L_m\sin\theta_p = y_a + (L_m - L)\sin\theta_p \end{cases} \tag{2.36}$$

quindi

$$\begin{cases} \dot{x}_m = \dot{x}_p - L_m\dot{\theta}_p\sin\theta_p = \dot{x}_a - (L_m - L)\dot{\theta}_p\sin\theta_p \\ \dot{y}_m = \dot{y}_p + L_m\dot{\theta}_p\cos\theta_p = \dot{y}_a + (L_m - L)\dot{\theta}_p\cos\theta_p \end{cases} . \tag{2.37}$$

Considerando le coordinate $q_m = [x_m, y_m, \theta_a, \theta_p]^T$, si ha

$$A(q_m)\dot{q}_m = \begin{bmatrix} \sin\theta_a & -\cos\theta_a & 0 & (L_m - L)\cos(\theta_a - \theta_p) \\ \sin\theta_p & -\cos\theta_p & 0 & L_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_m \\ \dot{y}_m \\ \dot{\theta}_a \\ \dot{\theta}_p \end{bmatrix} = 0 . \tag{2.38}$$

La matrice dei vincoli $A(q_m)$ ha rango due ovunque, ed il modello cinematico del veicolo può essere ottenuto da una base del suo kernel nella forma

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_m \\ \dot{y}_m \\ \dot{\theta}_a \\ \dot{\theta}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_a - \theta_p)\cos\theta_p - \frac{L_m}{L}\sin(\theta_a - \theta_p)\sin\theta_p & 0 \\ \cos(\theta_a - \theta_p)\sin\theta_p + \frac{L_m}{L}\sin(\theta_a - \theta_p)\cos\theta_p & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{1}{L}\sin(\theta_a - \theta_p) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{bmatrix} . \tag{2.39}$$

Consideriamo adesso alcuni casi particolari.

Quando il punto m venga scelto sul centro dell'asse anteriore ($L_m = L$), si ottiene

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_a \\ \dot{y}_a \\ \dot{\theta}_a \\ \dot{\theta}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_a & 0 \\ \sin\theta_a & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{1}{L}\sin(\theta_a - \theta_p) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{bmatrix} . \tag{2.40}$$

Osservando le prime tre equazioni, si ha che ν_1 e ν_2 corrispondono rispettivamente alla velocità di avanzamento e di rotazione dell'uniciclo anteriore, mentre la quarta equazione descrive il conseguente moto di rotazione dell'asse posteriore. Questo modello può essere considerato quindi come quello di un uniciclo con rimorchio.

Un modello cinematico di veicolo più simile a quello di una autovettura può essere ottenuto introducendo l'angolo di sterzo $\phi = \theta_a - \theta_p$. Si ottiene in questo caso

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_m \\ \dot{y}_m \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi\cos\theta_p - \frac{L_m}{L}\sin\phi\sin\theta_p & 0 \\ \cos\phi\sin\theta_p + \frac{L_m}{L}\sin\phi\cos\theta_p & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{1}{L}\sin\phi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix}. \tag{2.41}$$

In questo modello il primo parametro di controllo μ_1 rappresenta ancora la velocità di avanzamento del centro dell'asse anteriore. Il secondo parametro $\mu_2 = \dot{\phi}$ rappresenta invece la velocità di sterzata. Si può facilmente verificare che tra le velocità del modello (2.41) e quelle del modello (2.40) sussistono le relazioni $\nu_1 = \mu_1$ e $\mu_2 = \nu_2 - \nu_1\frac{\sin\phi}{L}$. Se il punto m è preso al centro dell'asse posteriore (ovvero $L_m = 0$), si ha il modello spesso detto *biciclo a trazione anteriore*:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_p \\ \dot{y}_p \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi\cos\theta_p & 0 \\ \cos\phi\sin\theta_p & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{1}{L}\sin\phi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix}. \tag{2.42}$$

Si consideri infine, per tutte le configurazioni escluse quelle in cui $\phi = \pm\frac{\pi}{2}$, una diversa base dello stesso kernel:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_p \\ \dot{y}_p \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_p & 0 \\ \sin\theta_p & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{1}{L}\tan\phi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}. \tag{2.43}$$

Con questa scelta, il primo parametro di controllo $\lambda_1 = \mu_1\cos\phi$ corrisponde alla velocità di avanzamento dell'uniciclo posteriore, mentre λ_2 è ancora la velocità angolare di sterzata. Questo modello cinematico (2.43) è detto *biciclo a trazione posteriore*. Esso è valido solo quando l'asse anteriore non è perpendicolare all'asse del veicolo: in tale configurazione il modello può essere utilizzato solo se la velocità di avanzamento dell'asse posteriore λ_1 è nulla.

2.3.1 Inseguimento di traccia con biciclo

Consideriamo il problema di controllare lungo una traccia un biciclo la cui velocità sia assegnata (o controllata indipendentemente). L'obiettivo è quello di progettare una legge di retroazione per la velocità di sterzo in grado di rendere asintoticamente nulla la distanza tra il veicolo e la traccia (fig. 2.8-b)).

Come già in precedenza, consideriamo ancora una traccia rettilinea giacente sull'asse orizzontale $y = 0$. Per qualsiasi velocità di avanzamento $\bar{v}(t)$ assegnata, il moto desiderato del modello cinematico del veicolo (2.41) è descritto da $\bar{y}_m(t) \equiv \bar{\phi}(t) \equiv \bar{\theta}_p \equiv 0$. Scopo del controllore è quindi regolare a zero le tre variabili y_m, θ_p e ϕ. In generale non vi sono specifiche sulla traiettoria $\bar{x}_m(t)$, che dipenderà dalla velocità assegnata $\bar{v}(t)$.

Controllo mediante linearizzazione approssimata

Si consideri il modello linearizzato di (2.41) attorno alla traiettoria di riferimento. Detto $\widetilde{x} = [\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \widetilde{x}_3, \widetilde{x}_4]^T = [x_m - \bar{x}_m,\, y_m,\, \phi,\, \theta_p]^T$ con ingressi $\widetilde{u}_1 = \mu_1 - \bar{v}(t)$ e $\widetilde{u}_2 = \mu_2$, e supponendo di poter misurare la distanza dalla traccia, si ha

$$\begin{aligned} \dot{\widetilde{x}} &= A\widetilde{x} + B\widetilde{u} \\ y &= C\widetilde{x} + D\widetilde{u}\,, \end{aligned}$$

con

$$A = \left[\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \bar{v}\frac{L_m}{L} & \bar{v} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{v}\frac{1}{L} & 0 \end{array}\right], \quad B = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{array}\right],$$

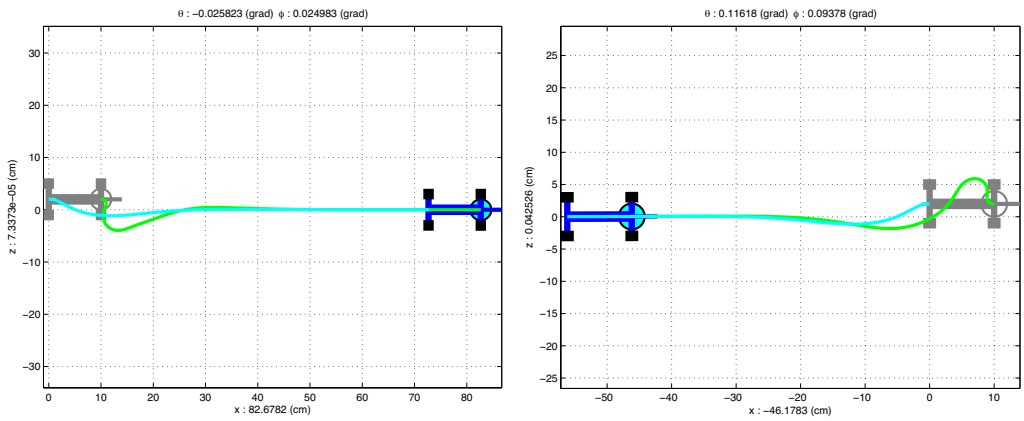
e

$$C = \left[\begin{array}{c|ccc} 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right], \; D = [0]\,.$$

Il sistema è quindi ancora scomposto in due sottosistemi indipendenti di dimensione uno e tre rispettivamente, il primo dei quali è raggiungibile dal primo ingresso.

Per proseguire l'analisi con le tecniche standrad dei sistemi lineari tempo-invarianti, assumiamo $\bar{v}(t) = \text{cost.}$. La matrice di raggiungibilità del secondo sottosistema, che è quello di nostro interesse qui, è data da

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} 0 & \bar{v}\frac{L_m}{L} & \bar{v}^2\frac{1}{L} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{v}\frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix}$$



(a) $\bar{v} = 10$ (b) $\bar{v} = -10$

Figure 2.19: Stabilizzazione mediante linearizzazione approssimata del modello di biciclo a trazione anteriore (2.41) con $L_m = L$ sulla traccia rettilinea $y_m = 0$, da condizione iniziale $q_m = [0\,2\,0\,0]$. A sinistra, moto in avanti con $\bar{v} = 10$; a destra, moto in retromarcia con $\bar{v} = -10$.

quindi è completamente raggiungibile per $\bar{v} \neq 0$. È facile verificare che il secondo sottosistema è anche osservabile dalla uscita, ovvero che la misura della distnza dalla traccia è sufficiente a stimare anche gli angoli ϕ e θ_p del veicolo.

Il sottositema che descrive l'inseguimento della traccia rettilinea è quindi completamente raggiungibile e osservabile, e la stabilizzazione nell'origine può essere ottenuta semplicemente mediante le tecniche di regolazione per sistemi LTI. In figura 2.19 sono riportate due simulazioni corrispondenti a $\bar{v} = 10$ e $\bar{v} = -10$ e per medesime condizioni iniziali.

Controllo mediante funzione di Lyapunov

Per quanto il metodo di linearizzazione approssimata sia semplice e dia buoni risultati, esso può soffrire di una limitato bacino di stabilità. Per aumentarlo, in modo analogo a quanto visto per l'uniciclo, si può considerare l'applicazione di tecniche di controllo alla Lyapunov. Si inizi considerando il modello cinematico del biciclo visto come un uniciclo con rimorchio (2.40),

che è riscritto qui in forma più esplicita

$$\begin{aligned}
\dot{x}_a &= \bar{v}(t)\cos\theta_a \\
\dot{y}_a &= \bar{v}(t)\sin\theta_a \\
\dot{\theta}_a &= \omega_a \\
\dot{\theta}_p &= \frac{\bar{v}(t)}{L}\sin(\theta_a - \theta_p)\,,
\end{aligned} \tag{2.44}$$

dove il controllo ν_2 di (2.40) è rinominato ω_a. Questo ingresso rappresenta la velocità di rotazione dell'uniciclo anteriore, che si può pensare ottenuta agendo sulle velocità delle due ruote anteriori supposte indipendenti[11].

Per realizzare l'inseguimento di traccia sull'asse $y = 0$, si può pensare di applicare la legge di controllo ricavata nel caso dell'uniciclo, ovvero

$$\omega_a(y_a, \theta_a, \bar{v}(t)) = -y_a\bar{v}(t)\frac{\sin\theta_a}{\theta_a} - K\theta_a\,.$$

Così facendo, sia y_a che θ_a tendono a zero asintoticamente a partire da qualsiasi condizione iniziale. Tuttavia si ha

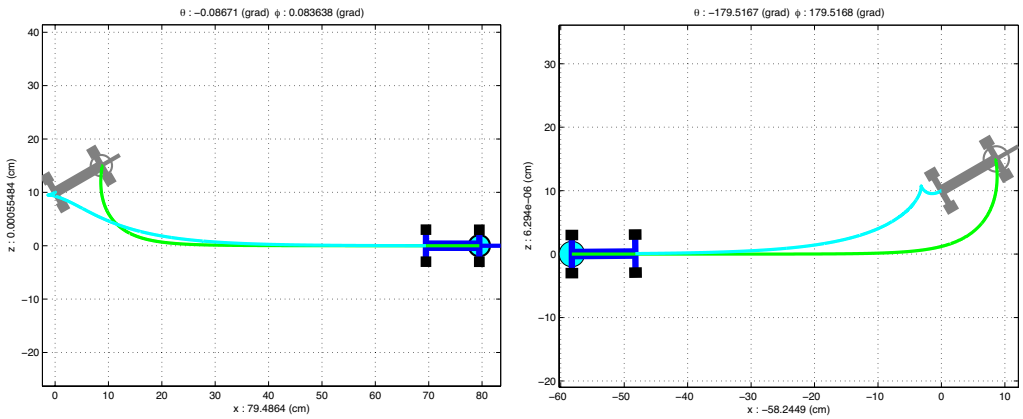
$$\dot{\theta}_p = -\frac{\bar{v}(t)}{L}\sin\theta_p\,.$$

Si può osservare quindi che, quando la velocità di avanzamento è uniformemente positiva ($\bar{v}(t) \geq \bar{v} > 0$) anche θ_p tende (a partire da qualsiasi valore $-\pi < \theta_p < \pi$) all'equilibrio in zero, ovvero il rimorchio tende asintoticamente al valore desiderato. Diversamente, quando il veicolo procede a retromarcia ($\bar{v}(t) \leq -\bar{v} < 0$), si ha che θ_p si allontana da zero, per tendere all'equilibrio in $\theta_p = \pm\pi$. La legge di controllo (2.3.1) è quindi applicabile solo al caso di marcia in avanti del veicolo.

Nel caso in cui l'ingresso di controllo possa essere applicato all'angolo di sterzo $\phi = \theta_a - \theta_p$ invece che direttamente all'angolo dell'asse anteriore θ_a, basterà considerare il modello (2.41) con $L_m = L$ ottenendo

$$\begin{aligned}
\dot{x}_a &= \bar{v}(t)\cos(\theta_p + \phi) \\
\dot{y}_a &= \bar{v}(t)\sin(\theta_p + \phi) \\
\dot{\phi} &= \omega_\phi \\
\dot{\theta}_p &= \frac{\bar{v}(t)}{L}\sin(\phi)\,.
\end{aligned}$$

[11] Se con ω_r e con ω_l si indicano le velocità di rotazione della ruota anteriore destra e sinistra, rispettivamente, b la distanza tra le ruote ed R il loro raggio, si ha che $\omega_a = \frac{(\omega_r - \omega_l)R}{b}$



(a) $\bar{v} = 2$ (b) $\bar{v} = -2$

Figure 2.20: Risultati della simulazione del metodo di stabilizzazione alla Lyapunov del biciclo a trazione anteriore sulla retta $y = 0$. Lunghezza del veicolo $L = 10$, costante di guadagno $K_\omega = 10$, condizioni iniziali $q_0 = [x_{p0}, y_{p0}, \theta_{p0}, \phi_0]^T = [0,\ 10,\ \frac{\pi}{6},\ 0]^T$. Nella figura a sinistra il veicolo procede a marcia avanti, a destra è in retromarcia. Nel secondo caso si osserva la presenza di una cuspide della traiettoria dell'asse posteriore, e una inversione della configurazione del veicolo.

Ponendo quindi

$$\omega_\phi = \omega_a(y_a, \theta_a, \bar{v}(t)) - \frac{\bar{v}(t)}{L} \sin \phi$$

si ottiene lo stesso risultato di stabilizzazione descritto in precedenza. Una simulazione dei risultati di applicazione di questo controllore sono riportati in figura 2.20.

Controllo mediante funzione di Lyapunov con backstepping

Le tecniche del precedente paragrafo permettono la stabilizzazione quasi-globale (eccetto cioè configurazioni iniziali particolari che appartengono ad un sottoinsiema dello spazio di stato a misura nulla) nel caso di marcia avanti, ma non si applica alla retromarcia.

Si consideri adesso il modello cinematico (2.43) di un biciclo con riferimento al posteriore ($L_m = 0$) e trazione posteriore, qui riportato esplicita-

mente:

$$\begin{aligned}\dot{x}_p &= \bar{v}(t)\cos\theta_p \\ \dot{y}_p &= \bar{v}(t)\sin\theta_p \\ \dot{\theta}_p &= \frac{\bar{v}(t)}{L}\tan\phi \\ \dot{\phi} &= \omega_\phi\,.\end{aligned} \tag{2.45}$$

Supponiamo inizialmente di avere diretto accesso alla variabile ϕ, come se fosse essa stessa un ingresso di controllo. Per $-\pi < \phi < \pi$, poniamo

$$\omega_p(\phi) = \frac{\bar{v}(t)}{L}\tan\phi\,,$$

quindi

$$\phi = \arctan\left(\frac{L}{\bar{v}(t)}\omega_p\right)\,.$$

Sostituendo nelle prime tre equazioni di (2.45), si ottiene

$$\begin{aligned}\dot{x}_p &= \bar{v}(t)\cos\theta_p \\ \dot{y}_p &= \bar{v}(t)\sin\theta_p \\ \dot{\theta}_p &= \omega_p\end{aligned} \tag{2.46}$$

In questo modo, le equazioni in (2.46) sono divenute identiche a quelle di un uniciclo. Definita quindi per il sottosistema delle variabili (y_p, θ_p) una candidata di Lyapunov del tipo consueto,

$$V_1 = \frac{1}{2}(y_p^2 + \theta_p^2) \tag{2.47}$$

la cui derivata è

$$\dot{V}_1 = y_p\bar{v}(t)\sin\theta_p + \theta_p\omega_p\,,$$

scegliamo, analogamente a quanto fatto in precedenza,

$$\omega_p(\phi) = \Omega_p(y_p, \theta_p, \bar{v}) = -y_p\bar{v}(t)\frac{\sin\theta_p}{\theta_p} - K_\theta\theta_p\,. \tag{2.48}$$

ottenendo

$$\dot{V}_1 = -K_\theta\theta_p^2 \leq 0\,, \tag{2.49}$$

e quindi, come già visto, la globale asintotica stabilità dell'origine per il sottosistema (y_p, θ_p).

Non avendo però in realtà accesso diretto a ϕ, bensì alla sua derivata $\dot{\phi}$ tramite ω_ϕ, che è il vero controllo per l'angolo di sterzo, non sarà possibile realizzare esattamente il comportamento specificato da (2.48) per ω_p. Possiamo

comunque pensare, facendo per così dire "un passo indietro" nella dinamica di ϕ, di progettare ω_ϕ in maniera tale che ω_p insegua asintoticamente il valore specificato dalla legge (2.48).

Per applicare questa idea, che prende il nome di *backstepping*, si ricorre di nuovo ad una candidata di Lyapunov di controllo:

$$V = V_1 + \frac{1}{2}\left(\omega_p(\phi) - \Omega_p(y_p, \theta_p, \bar{v})\right)^2 ,$$

ottenuta sommando alla funzione di Lyapunov V_1 un termine che si annulla solo se $\omega_p \equiv \Omega_p$, dove Ω_p è dato dalla (2.48). Osservando che, per $\bar{v}(t) \neq 0$, si può scrivere

$$\dot{\omega}_p = \frac{\dot{\bar{v}}}{L}\tan\phi + \frac{\bar{v}}{L}\frac{\omega_\phi}{\cos^2\phi} = \frac{\dot{\bar{v}}(t)}{\bar{v}(t)}\omega_p + \frac{\bar{v}}{L}\left(1 + \frac{L^2}{\bar{v}^2}\omega_p^2\right)\omega_\phi ,$$

la derivata di V è data da

$$\dot{V} = y_p\bar{v}\sin\theta_p + \theta_p\omega_p + (\omega_p - \Omega_p)\left(\frac{\dot{\bar{v}}}{\bar{v}}\omega_p + \frac{\bar{v}}{L}\left(1 + \frac{L^2}{\bar{v}^2}\omega_p^2\right)\omega_\phi - \dot{\Omega}_p\right) . \quad (2.50)$$

Se si pone

$$\omega_\phi = \frac{L}{\bar{v}}\frac{1}{1 + \frac{L^2}{\bar{v}^2}\omega_p^2}\left(\dot{\Omega}_p - \frac{\dot{\bar{v}}}{\bar{v}}\omega_p - \theta_p - (\omega_p - \Omega_p)\right) . \quad (2.51)$$

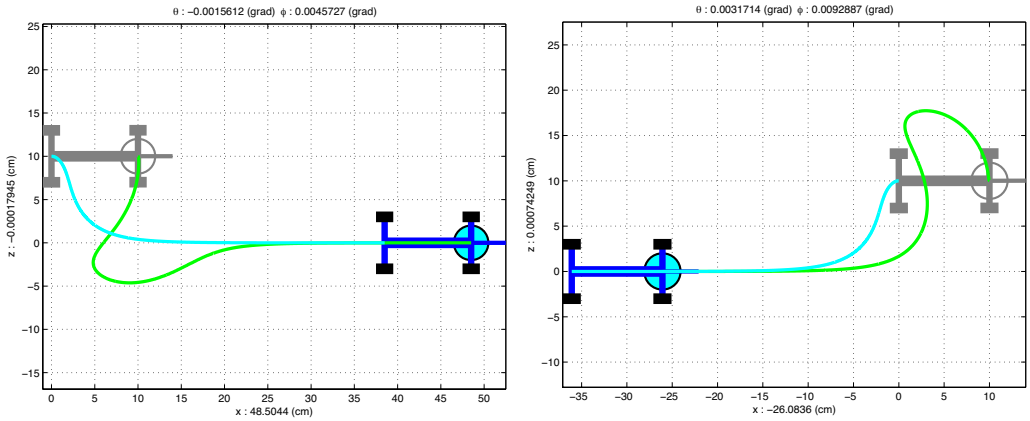
e si sostituisce in (2.50), si ottiene

$$\dot{V} = -K_\theta\theta_p^2 - (\omega_p - \Omega_p)^2 .$$

ovvero la (2.49) con l'aggiunta di un termine non positivo. Le argomentazioni utilizzate per dimostrare la asintotica stabilità dell'equilibrio nel caso dell'uniciclo possono essere qui ripetute in modo del tutto analogo portando alle stesse conclusioni sull'insieme invariante massimo ($\dot{V} = 0 \Rightarrow \theta_p = 0 \wedge \omega_p(\phi) = \Omega_p \Rightarrow \omega_p(\phi) = \Omega_p = 0 \Rightarrow y_p = \phi = 0$) e quindi alla stabilità dell'inseguimento per $\bar{v}$ arbitrario purchè non nullo.

La legge di controllo (2.51) riscritta in funzione delle variabili di stato originarie $q = [x_p,\ y_p,\ \theta_p,\ \phi]$ diviene

$$\omega_\phi = \frac{L}{\bar{v}}\cos^2\phi\left(\dot{\Omega}_p - \frac{\dot{\bar{v}}}{L}\tan\phi - \theta_p - \left(\frac{\bar{v}}{L}\tan\phi - \Omega_p\right)\right) ,$$



(a) $\bar{v} = 2$. (b) $\bar{v} = -2$

Figure 2.21: Risultati della simulazione per la stabilizzazione del biciclo sulla retta $y = 0$ con controllo cinematico in backstepping, a partire da condizioni iniziali $q_a = [0\,, 10,\ 0,\ 0]$, a marcia avanti (sinistra) e retromarcia (destra).

ben definito ovunque ad eccezione che in $\phi = \pm\pi/2$ purchè $\bar{v} \neq 0$, essendo infine

$$\dot{\Omega}_p = -\bar{v}\frac{\sin\theta_p}{\theta_p}\left(\bar{v}\sin\theta_p + y_p\frac{\dot{\bar{v}}}{\bar{v}}\right) - \frac{\bar{v}}{L}\tan\phi\left(K_\theta + y_p\bar{v}\frac{\theta_p\cos\theta_p - \sin\theta_p}{\theta_p^2}\right) .$$

In figura 2.21 sono riportate simulazioni realizzate con questo schema di controllo applicato a partire dalla stessa condizione iniziale per velocità longitudinali costanti di segno opposto. Come si può osservare, l'inseguimento di traccia avviene correttamente sia in marcia avanti che in retromarcia.

Controllo di biciclo su retta con linearizzazione in retroazione

Consideriamo ancora il modello cinematico di biciclo a trazione posteriore (2.45). Assumendo $\bar{v}$ costante, identifichiamo in y_p la variabile che si vuole regolare a zero, e procediamo con le derivazioni successive ponendo

$$\begin{array}{rcl} \xi_1 & = & y_p \\ \xi_2 & = & \dot{y}_p = \sin\theta\bar{v} \\ \xi_3 & = & \ddot{y}_p = \frac{\bar{v}^2}{L}\cos\theta\tan\phi \end{array}$$

fino a quando otteniamo

$$\dot{\xi}_3 \quad = \quad = -\frac{\bar{v}^3}{L^2}\sin\theta\tan^2\phi + \frac{v^2}{L}\cos\theta(1+\tan^2\phi)\omega \ .$$

Da questa relazione scegliamo, per $\theta \neq \pi/2$ e $\theta \neq 3\pi/2$, la retroazione linearizzante

$$\omega = \frac{\frac{\bar{v}^3}{L^2}\sin\theta\tan^2\phi \ + \ \nu}{\frac{v^2}{L}\cos\theta\,(1+\tan^2\phi)}$$

per la quale si ha $\dot{\xi}_3 = \nu$. è a questo punto immediato trovare una nuova reazione, questa volta lineare $\nu = K\xi$ che assegna gli autovalori della dinamica di ξ in modo da renderla asintoticamente stabile nell'origine.

La tre nuove variabili ξ sono indipendenti tra loro e possono essere usate, assieme alla x_p, come nuove coordinate del sistema. La dinamica di x_p nelle nuove coordinate è

$$\dot{x_p} = \cos\theta\bar{v} = \cos\arcsin(\xi_2/\bar{v})\bar{v}.$$

Nel momento in cui ξ ha raggiunto la convergenza a zero, si ha nelle vecchie variabli

$$\begin{array}{lll} \xi_1 = 0 & \Rightarrow & y = 0 \\ \xi_2 = 0 & \Rightarrow & \sin\theta v = 0 \Rightarrow \theta \in \{0,\pi\} \\ \xi_3 = 0 & \Rightarrow & \frac{\bar{v}^2}{L}\cos\theta\tan\phi = 0 \Rightarrow \tan\phi = 0 \Rightarrow \phi \in \{0,\pi\} \end{array}$$

da cui

$$\dot{x_p} = \begin{cases} +\bar{v} & \theta = 0,\pi \in \{0,\pi\} \\ -\bar{v} & \theta = \pi, \phi \in \{0,\pi\} \end{cases}$$

Il biciclo dunque giunge a percorrere l'asse x con $\theta = 0$ opure π e con velocità $\pm\bar{v}$ e l'angolo di sterzo ϕ può convergere a 0 oppure a π, a seconda della condizione iniziale.

Chapter 3

Dynamic Control of Fully Actuated Mechanical Systems

3.1 Dynamic Control of Unconstrained Systems - Articulated Arms

Building upon the previously introduced notion of "complete actuation," we more precisely state that an unconstrained mechanism is completely actuated if every generalized force in the Lagrangian formulation can be associated with the controlled action of an actuator.

Let us first consider the dynamics of a Lagrangian system described by n unconstrained coordinates q, subject to generalized forces τ, expressed as:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau, \tag{3.1}$$

Note that, in general, the generalized forces τ (those performing work on the chosen Lagrangian coordinates q) may not coincide with the forces f actually exerted by the ℓ actuators. However, there will be a relation between them, which we assume to be linear, represented as:

$$\tau = F(q)f.$$

The system is termed *completely actuated* if the matrix $F(q)$ is square ($\ell = n$) and invertible over the entire domain of configurations of interest. It is termed *over-actuated* (or with *redundant actuation*) if $\ell > n$ and the rank of $F(q)$ is n everywhere, while the system is termed *under-actuated* if $\text{rank}(F(q)) < n$. In this chapter, we will focus on completely actuated systems. Systems with redundant actuators can be easily reduced to this case, with the additional

opportunity to optimally choose f for a given τ. Completely actuated constrained systems are addressed in a subsequent section, while under-actuated systems are treated in a later chapter.

3.1.1 Proportional-Derivative Control at the Joints

The first and simplest possible solution for choosing a torque law τ to control the system dynamics (3.1) involves applying standard controllers to the joint variables, considering each independently of the others.

Denoting the desired references to be tracked as $q_d(t) : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}^n$, we define the tracking errors as $e_q(t) = q_d(t) - q(t)$. Let us consider a control law for the i-th coordinate, composed of a term proportional to the error, a term proportional to its derivative, and a feed-forward action:

$$\tau_i = \tau_{ff,i} + K_{p,i} e_{q,i} + K_{v,i} \dot{e}_{q,i},$$

with $K_{p,i} > 0$ and $K_{v,i} > 0$. In compact form:

$$\tau = \tau_{ff} + K_p e_q + K_v \dot{e}_q,$$

where $K_p = \mathsf{diag}\,(K_{p,i})$ and $K_v = \mathsf{diag}\,(K_{v,i})$ are positive definite diagonal matrices. Control laws of this type, called Proportional-Derivative (PD) with compensation, have been used in industrial articulated manipulator controllers since the first examples in the 1960s.

The dynamics of the controlled system, in the state variables $(e_q, \dot{e}_q) \in \mathbb{R}^{2n}$, becomes:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau_{ff} + K_p e_q + K_v \dot{e}_q. \tag{3.2}$$

Here, $q = q_d - e_q$, $\dot{q} = \dot{q}_d - \dot{e}_q$, and so on.

The origin $e_q = 0$, $\dot{e}_q = 0$ is an equilibrium of the system (3.2), corresponding to the motion $q(t) \equiv q_d(t)$ if:

$$M(q_d(t))\ddot{q}_d + C(q_d, \dot{q}_d)\dot{q}_d + G(q_d) = \tau_{ff}.$$

This occurs if $\dot{q}_d = \ddot{q}_d = 0$ and $\tau_{ff} = G(q)$. The first assumption limits the case to posture control, while the second corresponds to assuming perfect compensation of gravitational effects. This last assumption may hold, for example, in the absence of gravitational effects on the joints (as in the case of motions constrained to a horizontal plane) or when an accurate estimate of $G(q)$ is available.

The control law:

$$\tau = G(q) + K_p e_q + K_v \dot{e}_q, \tag{3.3}$$

is known as *PD joint control with gravity compensation.*

Although the control law for each coordinate is independent of the others, strong dynamic couplings make it far from trivial to conclude that PD control can stabilize the system at the desired value $e_q = \dot{e}_q = 0$. To study the stability of the overall system, we use Lyapunov's direct method. Consider the Lyapunov candidate:

$$V(e_q, \dot{e}_q) = \frac{1}{2}\dot{e}_q^T M(q)\dot{e}_q + \frac{1}{2}e_q^T K_p e_q.$$

Observe that, assuming $\dot{q}_d = 0$, the first term in V corresponds to the system's kinetic energy $T = \frac{1}{2}\dot{q}^T M(q)\dot{q} > 0$. The second term takes the form of potential energy associated with a multidimensional elastic element with stiffness K_p elongated by e_q. If K_P is diagonal, this elasticity can be visualized as that of virtual springs at each joint opposing displacements from their reference positions.

By differentiating the Lyapunov candidate $V(t)$ along the system trajectories (3.2), we obtain:

$$\begin{aligned}
\dot{V}(t) &= \dot{q}^T M(q)\ddot{q} + \tfrac{1}{2}\dot{q}^T \dot{M}(q)\dot{q} - e_q^T K_p \dot{q} \\
&= \dot{q}^T \left(\tau - C(q,\dot{q})\dot{q} - G(q)\right) + \tfrac{1}{2}\dot{q}^T \dot{M}(q)\dot{q} - e_q^T K_p \dot{q} \\
&= \dot{q}^T K_p e_q - \dot{q}^T K_v \dot{q} + \tfrac{1}{2}\dot{q}^T \left(\dot{M}(q) - 2C(q,\dot{q})\right)\dot{q} - e_q^T K_p \dot{q} \\
&= -\dot{q}^T K_v \dot{q}.
\end{aligned}$$

Here, the first and last terms cancel each other (being scalars whose equality is evident under transposition), and we use the known property $\frac{1}{2}\dot{q}^T \left(\dot{M} - 2C\right)\dot{q} = 0$, derived from the principle of virtual work.

The resulting $\dot{V}(e_q, \dot{e}_q)$ is negative semi-definite, which permits the conclusion of marginal stability of the equilibrium. However, the analysis can be extended using the invariant set theorem, showing global asymptotic stability of this equilibrium. Let us observe that, since $M(q)$ and K_p are positive definite (the former being an inertia matrix, the latter by design), $V(e_q, \dot{e}_q)$ is radially unbounded, and its level curves $\Omega_\ell = \{(e_q, \dot{e}_q) | V(e_q, \dot{e}_q) = \ell\}$ are closed for any level ℓ. Within these, the set $R = \{(e_q, \dot{e}_q) \in \Omega_\ell | \dot{V}(e_q, \dot{e}_q) = 0\}$, where $V(t)$ does not decrease, is given by $R = \{(e_q, \dot{e}_q) \in \Omega_\ell | \dot{e}_q = 0\}$. In R, therefore (assuming $\dot{q}_d = 0$), we have $\dot{q} \equiv 0$ and $\ddot{q} \equiv 0$. The largest invariant set in R is thus obtained by substitution into system (3.2) (assuming perfect gravity compensation) as $M = \{(e_q, \dot{e}_q) \in R | K_p e_q = 0\}$, so that, since K_p is positive definite, M coincides with the origin $e_q = 0$, $\dot{e}_q = 0$, a point to which any trajectory starting from Ω_ℓ converges, thereby demonstrating the global asymptotic stability of this equilibrium.

Independent PD control at the joints with gravity compensation thus guarantees the asymptotic achievement of constant references q_d, useful, for example, for executing point-to-point trajectories of manipulator arms for "pick and place" operations. However, note that PD controllers do not guarantee the desired value is reached or the system's stability if the above assumptions are not satisfied.

It is also observed that, in posture control with imperfect gravity compensation through a term $\widehat{G}(q)$, the equilibrium would shift to a configuration $\bar{q}$, which can be calculated by solving the equation:

$$G(\bar{q}) - \widehat{G}(\bar{q}) = K_p(q_d - \bar{q}).$$

This equation may not be easy to solve in closed form, but it can always be solved efficiently iteratively using Newton-Raphson or gradient methods, as encountered in inverse kinematics solutions.

An immediate physical intuition for the new equilibrium $\bar{q}$ can be gained when K_p is diagonal: each joint behaves under the effect of uncompensated weight like an elasticity with stiffness constant $K_{p,i}$ and a rest position at $q_{d,i}$. It is easy to see, using the candidate:

$$V(t) = \frac{1}{2}\dot{e}_q^T M(q)\dot{e}_q + \frac{1}{2}(\bar{q} - q)^T K_p(\bar{q} - q),$$

that this new equilibrium is itself asymptotically stable.

3.1.2 Controllo PD nello spazio operativo

Una semplice modifica del controllore appena descritto permette di ottenere un simile comportamento direttamente espresso nello spazio operativo del robot, ovvero nelle variabili $\xi = Q(q)$. Definendo l'errore $e_\xi = \xi_d - \xi$ ed assumendo $\dot{\xi}_d = 0$, la legge di controllo

$$\tau = J^T(q)K_\xi e_\xi - K_v\dot{q} + \tau_{ff}, \tag{3.4}$$

dove $J(q) = \frac{\partial Q}{\partial q}$ è il Jacobiano analitico, rende asintoticamente stabile la postura desiderata ξ_d se $\tau_{ff} = G(q)$. Per dimostrarlo basta considerare la candidata di Lyapunov

$$V(e_\xi, \dot{e}_\xi) = \frac{1}{2}e_\xi^T K_\xi e_\xi + \frac{1}{2}\dot{q}^T M(q)\dot{q}$$

e la sua derivata

$$\begin{aligned}
\dot{V}(t) &= -e_\xi^T K_\xi J\dot{q} + \dot{q}^T M(q)\ddot{q} + \tfrac{1}{2}\dot{q}^T \dot{M}(q)\dot{q} \\
&= -\dot{q}^T J^T K_\xi e_\xi + \dot{q}^T \left(\tau - C(q,\dot{q})\dot{q} - G(q)\right) + \tfrac{1}{2}\dot{q}^T \dot{M}(q)\dot{q} \\
&= -\dot{q}^T K_v \dot{q}.
\end{aligned}$$

Da qui è possibile derivare la asintotica stabilità dell'equilibrio nella posizione desiderata con argomenti analoghi a quelli usati nella sezione precedente per il controllo PD nello spazio dei giunti.

È interessante vedere esplicitamente l'effetto della applicazione di azioni esterne applicate al manipolatore. Per semplicità, ci riferiremo al caso in cui queste azioni siano unicamente forze F_e, e ci limiteremo a studiarne l'effetto sugli spostamenti traslazionali dell'end-effector (tralasciando eventuali coppie e le rotazioni indotte). In questo caso, il Jacobiano analitico e quello geometrico coincidono.

Supponendo perfettamente compensata la gravità, l'equilibrio del sistema si sposta nella soluzione di

$$J^T(\bar{q})F_e = J^T(\bar{q})K_\xi \bar{e}_\xi,$$

dove $\bar{e}_\xi(q_d - \bar{q})$. In configurazioni nonsingolari del braccio, quindi, si ha

$$F_e = K_\xi \bar{e}_\xi$$

quindi il manipolatore si comporta come un insieme di molle lineari che si oppongono al carico esterno con punto di riposo q_d. Se J^T ha uno spazio nullo, le forze esterne che giacciono in tali direzioni sono invece assorbite direttamente dalla struttura del robot, e non generano alcuna deformazione delle "molle" virtuali introdotte dalla componente proporzionale del controllore PD.

3.1.3 Controllo a Coppia Calcolata

Si desidera adesso affrontare il problema di controllare il sistema (3.1) lungo traiettorie desiderate $q_d(t)$ di tipo più generale, come richiesto in molte applicazioni di robotica avanzata in cui il braccio non deve semplicemente posizionarsi (come nelle sezione 3.1.1), ma deve seguire percorsi prestabiliti con accuratezza geometrica e temporale.

A tale fine, è utile riconsiderare l'equazione di regime del sistema lungo un moto nominale, la cui soluzione soddisfi esattamente la specifica $q(t) \equiv q_d(t)$. Dal principio del modello interno, infatti, per ottenere inseguimento perfetto di una traiettoria desiderata il controllo deve contenere il modello del sistema dinamico, usato per calcolare una azione in avanti (feedforward), complementato da un'azione di feedback che ne renda stabile il moto. Una possibile scelta per il controllo che segue queste indicazioni è data da

$$\tau(q, \dot{q}, e_q, \dot{e}_q) = M(q)\ddot{q}_d + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) + K'_p e_q + K'_v \dot{e}_q, \qquad (3.5)$$

dove K'_v e K'_p sono matrici positive definite. È facile verificare che, nel caso di inizializzazione sulla traiettoria esatta ($e_q(0) = \dot{e}_q(0) = 0$, ovvero $q(0) = q_d(0)$ e $\dot{q}(0) = \dot{q}_d(0)$), il controllo τ vale esattamente

$$\tau(q, \dot{q}, e_q, \dot{e}_q)\big|_{q \equiv q_d} = M(q_d)\ddot{q}_d + C(q_d, \dot{q}_d)\dot{q}_d + G(q_d),$$

che soddisfa il modello (3.1).

Ricordiamo qui che stiamo usando l'ipotesi di completa attuazione del sistema, che ci garantisce che, qualunque sia il valore di τ ottenuto della (3.5), sarà possibile comandare agli attuatori una opportuna azione f tale per cui $F(q)f = \tau$. In un sistema non completamente attuato, in cui $F(q)$ non ha pieno rango, questo non sarebbe possibile (si pensi ad esempio al caso in cui alcune forze generalizzate non sono collegate ad attuatori, per cui le corrispondenti componenti di τ devono essere nulle).

Si noti inoltre che, per la sintesi della legge di controllo (3.5), si assume di avere a disposizione il valore misurato di $q(t)$ e $\dot{q}(t)$, nonché di essere in grado di calcolare un modello esatto per la dinamica, cioè di poter valutare le funzioni $M(\cdot)$, $C(\cdot, \cdot)$ e $G(\cdot)$ in modo che esse corrispondano ai valori fisici del sistema (di tali ipotesi discuteremo la portata più avanti).

Sostituendo la (3.5) nella (3.1), e scegliendo per comodità di porre $K'_p = M(q)K_p$, $K'_v = M(q)K_v$, si ha

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = M(q)\left(\ddot{q}_d + K_v\dot{e}_q + K_p e_q\right) + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q)$$

da cui immediatamente

$$\begin{aligned} M(q)\ddot{q} &= M(q)\left(\ddot{q}_d + K_v\dot{e} + K_p e\right) && (3.6) \\ M(q)\left(\ddot{e}_q + K_v\dot{e}_q + K_p e_q\right) &= 0. && (3.7) \end{aligned}$$

Per l'invertibilità della matrice dinamica $M(q)$ si ottiene

$$\ddot{e}_q + K_v\dot{e}_q + K_p e_q = 0 \tag{3.8}$$

che rappresenta la dinamica dell'errore di inseguimento, che risulta lineare. Se le matrici K_p, K_v sono diagonali, si hanno in effetti tanti sistemi del secondo ordine quanti giunti, ognuno disaccoppiato ed indipendente. La scelta di elementi diagonali $K_{p,i}$ e $K_{v,i}$ positivi garantisce la asintotica stabilità dell'equilibrio $e_q = \dot{e}_q = 0$, e determina il comportamento dinamico dell'inseguimento secondo le classiche regole del piazzamento dei poli.

In definitiva il controllo proposto, che viene detto "a coppia calcolata" (o "computed torque"), mostra come la perfetta conoscenza del modello dinamico di un manipolatore ne consenta la linearizzazione perfetta garantendo

l'allocazione arbitraria dei poli del sistema a ciclo chiuso e il completo discaaoppiamento delle dinamiche delle diverse coordinate q. È quindi garantita la possibilità di ottenere inseguimenti di traiettorie di posizione dei giunti con errore a regime nullo e tempi di convergenza arbitrariamente veloci.

3.1.4 Controllo a Coppia Calcolata nello Spazio Operativo

In certi casi, è desiderabile determinare direttamente la coppia di controllo τ che garantisce l'inseguimento asintotico di una posizione cartesiana e angolare ξ_d da parte della posizione ξ dell'end-effector di un manipolatore, senza passare preliminarmente dalla inversione cinematica $q_d(t) = Q^{-1}(\xi_d(t))$.

Per ottenere questo, è possibile applicare il metodo a coppia calcolata direttamente nello spazio operativo: a tal fine, è necessario determinare preliminarmente l'equazione della dinamica del manipolatore nello stesso spazio.

Si consideri per semplicità il caso in cui il manipolatore in questione abbia un numero di giunti pari alla dimensione dello spazio operativo e che durante il moto non si incontrino singolarità. In tal modo, partendo dall'espressione della cinematica differenziale

$$\dot{\xi} = J(q)\dot{q}$$

e della sua derivata

$$\ddot{\xi} = J(q)\ddot{q} + \dot{J}(q)\dot{q}$$

si ha

$$\ddot{q} = J^{-1}(q)\left(\ddot{\xi} - \dot{J}(q)\dot{q}\right). \tag{3.9}$$

Sostituendo la (3.9) nella equazione dinamica del manipolatore nelle coordinate di giunto q, si ottiene

$$M(q)J^{-1}(q)\left(\ddot{\xi} - \dot{J}(q)\dot{q}\right) + h(q,\dot{q}) = \tau \tag{3.10}$$

dove $h(q,\dot{q}) = C(q,\dot{q})\dot{q} + G(q)$. Premoltiplicando i termini della eq. (3.10) per $J^{-T}(q)$, si ottiene l'equazione della dinamica del manipolatore nello spazio operativo

$$J^{-T}MJ^{-1}\left(\ddot{\xi} - \dot{J}\dot{q}\right) + J^{-T}h(q,\dot{q}) = J^{-T}\tau$$

ovvero

$$M_\xi\ddot{\xi} + h_\xi = F, \tag{3.11}$$

dove $M_\xi = \left(J(q)M^{-1}(q)J^T(q)\right)^{-1}$ viene detta *matrice dinamica nello spazio operativo* del manipolatore, e $h_\xi = J^{-T}(q)h(q,\dot{q}) - M_\xi(q)\dot{J}(q)\dot{q}$ indica i termini dovuti a forze apparenti e potenziali nelle coordinate dello spazio operativo. Utilizzando il legame tra le coppie ai giunti τ e le equivalenti forze generalizzate F che agiscono sull'end-effector, si è posto

$$J^{-T}(q)\tau = F$$

ad indicare la forza generalizzata esterna equivalente alla azione delle coppie sui giunti. Introducendo l'errore di posizione $e_\xi = \xi_d - \xi$, il controllo a forza calcolata nello spazio operativo è dunque

$$F_{cf} = M_\xi \left(\ddot{\xi}_d + K_v\dot{e}_\xi + K_p e_\xi\right) + h_\xi(\xi,\dot{\xi}),$$

che sostituita nella (3.11) porta a

$$M_\xi(q)\left(\ddot{e}_\xi + K_v\dot{e}_\xi + K_p e_\xi\right) = 0,$$

da cui, essendo M_ξ definita positiva (ricordiamo l'ipotesi di assenza di singolarità), la dinamica dell'errore di inseguimento e_ξ è lineare e asintoticamente stabile se K_v, K_p sono matrici opportunamente progettate. Ovviamente, il controllo applicato agli attuatori sui giunti è infine calcolato come

$$\tau = J^T(q)F_{cf}.$$

È interessante osservare il comportamento del sistema così controllato quando la traiettoria desiderata sia una postura ξ_d fissa o lentamente variabile, e sul braccio agisca una forza esterna F_{ext} applicata nello spazio operativo, ad esempio per interazione dell'end-effector con l'ambiente:

$$M_\xi\ddot{e}_\xi + K'_v\dot{e}_\xi + K'_p e_\xi = F_{ext},$$

con M_ξ costante, $K'_p = M_\xi K_p$ e $K'_v = M_\xi K_v$. La trasformata di Laplace di questo modello,

$$e_\xi(s) = \left(M_\xi s^2 + K'_v s + K'_p\right)^{-1} F_{ext}(s),$$

illustra come il comportamento del robot così controllato, e sottoposto a disturbi esterni applicati all'end-effector, è quello di un sistema masse-molle-smorzatori, costante elastica $K_{P,i}$ e smorzamento $K_{v,i}$, con posizione di riposo la postura desiderata $\xi_d(t)$. La scelta di opportuni valori dei parametri del controllore quindi permette di controllare l'impedenza apparente del manipolatore quando interagisce con l'ambiente attraverso il suo end-effector. Questa è la base del cosiddetto *controllo di impedenza*, che permette al braccio robotico di esibire cmportamenti con maggiore o minor rigidezza e smorzamento nelle interazioni fisiche.

3.1.5 Robustezza del Controllo a Coppia Calcolata

I risultati apparentemente molto buoni del controllo progettato nella sezione precedente sono stati ottenuti nelle ipotesi poco realistiche di disporre di un modello perfetto del sistema da controllare. Esaminiamo adesso il caso in cui questa ipotesi non sia verificata, o perché i parametri inerziali e geometrici del sistema non sono noti, o anche semplicemente perchè il calcolo accurato del modello dinamico in ogni configurazione sul processore di controllo richiede più tempo di quanto disponibile per l'applicazione in tempo reale, e vi si rinunci.

Supponiamo dunque di applicare una legge di controllo che, approssimando quella a coppia calcolata nominale (3.5), sia descritta da

$$\tau = \widehat{M}(q)\left(\ddot{q}_d + K_v\dot{e}_q + K_p e_q\right) + \widehat{C}(q,\dot{q})\dot{q} + \widehat{G}(q) \tag{3.12}$$

dove $\widehat{M}(q)$, $\widehat{C}(q,\dot{q})$ e $\widehat{G}(q)$ rappresentano i modelli approssimati usati per le matrici dinamica, di Coriolis e del vettore delle coppie gravitazionali del manipolatore. Sostituendo la (3.12) nella (3.1), e compiendo passaggi analoghi ai precedenti, si ottiene

$$\widehat{M}(q)\left(\ddot{e}_q + K_v\dot{e}_q + K_p e_q\right) = \widetilde{M}(q)\ddot{q} + \widetilde{C}(q,\dot{q})\dot{q} + \widetilde{G}(q).$$

avendo introdotto le matrici di errore di modello

$$\begin{cases} \widetilde{M}(q) = M(q) - \widehat{M}(q), \\ \widetilde{C}(q,\dot{q}) = C(q,\dot{q}) - \widehat{C}(q,\dot{q}), \\ \widetilde{G}(q) = G(q) - \widehat{G}(q). \end{cases}$$

Se la matrice di inerzia stimata è invertibile si può poi scrivere

$$\ddot{e}_q + K_v\dot{e}_q + K_p e_q = \eta \tag{3.13}$$

dove si è posto

$$\eta = \widehat{M}(q)^{-1}(\widetilde{M}(q)\ddot{q} + \widetilde{C}(q,\dot{q})\dot{q} + \widetilde{G}(q))$$

Nel sistema (3.13) la dinamica dell'errore, che è quella vista in (3.8), risulta però adesso eccitata dal termine di disturbo η. Considerando η come fosse un disturbo esterno, si potrebbe scrivere in termini di trasformate di Laplace

$$e_q(s) = (Is^2 + K_v s + K_p)^{-1}\eta(s).$$

Per una scelta opportuna dei guadagni K_p e K_v che renda il sistema (3.8) asintoticamente stabile, il sistema perturbato (3.13) è "Bounded Input Bounded

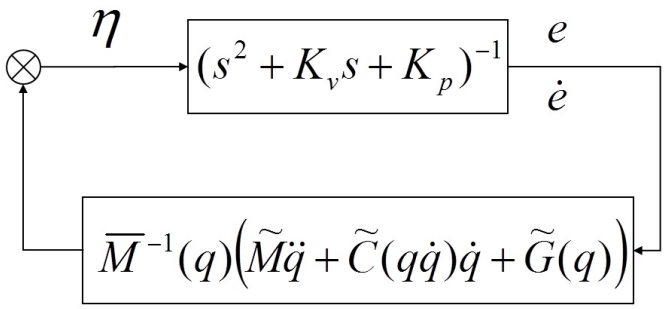


Figure 3.1: Sistema Lagrangiano controllato col metodo di coppia calcolata con modello imperfetto.

Output" (BIBO) stabile, quindi per ogni $\eta(t)$ limitato in norma, la corrispondente risposta $e_q(t)$, nonché la sua derivata, sono anch'esse limitate in norma[1] Di conseguenza, per qualche $\beta_1 > 0$ e $\beta_2 > 0$, si potrà scrivere

$$\begin{array}{rcl} \|e_q(t)\|_\infty & \leq & \beta_1 \|\eta(t)\|_\infty \\ \|\dot{e}_q(t)\|_\infty & \leq & \beta_2 \|\eta(t)\|_\infty \end{array} \tag{3.14}$$

Considerando che $q(t) = q_d(t) - e_q(t)$, si osserva però che il termine di disturbo $\eta(\cdot)$ è esso stesso funzione dell'errore e della sua derivata. La (3.13) può quindi essere vista come la connessione in anello di due sistemi (si veda fig. 3.1). Nulla si può dire riguardo la stabilità del sistema connesso se non si entra nel dettaglio delle particolari stime utilizzate, e degli errori conseguenti.

È utile notare che la dipendenza di η dalla accelerazione $\ddot{q}$ può essere in effetti rimossa quando ci si metta nelle coordinate di errore $(e_q, \dot{e}_q)$. Sostituendo la (3.12) nella (3.1), e ponendo per comodità $\bar{\tau} = \left(\ddot{q}_d + K_v \dot{e}_q + K_p e_q\right)$, si ha

$$\begin{array}{rcl} \ddot{q} & = & M^{-1}\widehat{M}\bar{\tau} - M^{-1}\left(\widetilde{C}\dot{q} + \widetilde{G}\right) + \bar{\tau} - \bar{\tau} \\ & = & \left(M^{-1}\widehat{M} - I\right)\bar{\tau} - M^{-1}\left(\widetilde{C}\dot{q} + \widetilde{G}\right) + \bar{\tau} \end{array}$$

e osservando dalla (3.13) che $\eta = \ddot{e} + K_v \dot{e}_q + K_p e_q = \bar{\tau} - \ddot{q}$, si ottiene

$$\eta(q, \dot{q}, \ddot{q}_d) = \bar{\tau} - \ddot{q} = \left(I - M^{-1}\widehat{M}\right)\left(\ddot{q}_d + K_v \dot{e}_q + K_p e_q\right) + M^{-1}\left(\widetilde{C}\dot{q} + \widetilde{G}(q)\right) \tag{3.15}$$

[1] Ci riferiamo qui alla norma infinito di funzione $\|f(t)\|_\infty = \sup_{0 \leq t \leq \infty} |f(t)|$.

ovvero, con facili sostituzioni, $\eta = \eta(e_q, \dot{e}_q, q_d, \dot{q}_d, \ddot{q}_d)$. Dalla (3.15), si può osservare che, per ogni data funzione da inseguire $q_d(t)$, il disturbo η dipende da funzioni degli errori nelle diverse coordinate $e_{q,i}$, delle loro derivate $\dot{e}_{q,i}$, e da termini di tipo $\dot{e}_{q,i}\dot{e}_{q,j}$ che combinano tali derivate. Si può dimostrare che queste funzioni sono limitabili[2], e, per opportuni valori $\alpha_i > 0$, $i = 1, 2 \ldots 4$, si potrà scrivere

$$\|\eta\|_\infty \leq \alpha_1 + \alpha_2\|e_q\|_\infty + \alpha_3\|\dot{e}_q\|_\infty + \alpha_4\|\dot{e}_q\|_\infty^2. \tag{3.16}$$

È naturale attendersi che i coefficienti α_i siano tanto più grandi quanto maggiori sono gli errori di modello, e quanto maggiori sono i riferimenti $q_d(t)$, le loro velocità $\dot{q}_d(t)$ ed accelerazioni $\ddot{q}_d(t)$.

Combinando le due disequazioni (3.14) con la (3.16), si ottiene

$$\begin{cases} \|e_q\|_\infty \leq \beta_1\alpha_1 + \beta_1\alpha_2\|e_q\|_\infty + \beta_1\alpha_3\|\dot{e}_q\|_\infty + \beta_1\alpha_4\|\dot{e}_q\|_\infty^2, \\ \|\dot{e}_q\|_\infty \leq \beta_2\alpha_1 + \beta_2\alpha_2\|e\|_\infty + \beta_2\alpha_3\|\dot{e}_q\|_\infty + \beta_2\alpha_4\|\dot{e}_q\|_\infty^2. \end{cases} \tag{3.17}$$

A seconda dei valori numerici ottenuti per i guadagni α_i, β_i, le (3.17) rappresentano due regioni ammissibili nel primo quadrante del piano $(\|e_q\|_\infty, \|\dot{e}_q\|_\infty)$. Queste due regioni, i cui bordi sono parabole a concavità opposte, possono a seconda dei casi intersecarsi o meno, come illustrato in fig.3.2. Essendo le due norme per definizione positive, solo il primo quadrante è di interesse. Si possono dare due casi qualitativamente diversi. Per errori di modello sufficientemente piccoli e/o traiettorie desiderate sufficientemente lente, le regioni ammissibili si intersecano, lasciando una regione ammissibile compatta contigua all'origine (a sinistra in fig. 3.2): in questo caso, l'applicazione della coppia calcolata con modello imperfetto dà luogo ad inseguimento approssimato con errore non nullo, ma comunque limitato. Se le condizioni sono tali da non avere intersezione tra le due parabole (vedi fig. 3.2 a destra), non può essere invece garantita una evoluzione limitata dell'errore di posizione, ed il sistema può risultare quindi instabile.

Esempio 1. Il controllo proporzionale derivativo può essere visto come una approssimazione molto rudimentale di uno schema a coppia calcolata, in cui si ponga $\widehat{M} = I$, $\widehat{C} = 0$, e $\widehat{G} = G$ nel caso di perfetta compensazione di gravità. Questo controllo è robusto anche alle forti approssimazioni della dinamica purché le traiettorie desiderate siano costanti. ◇

[2]Questa proprietà discende dalla presenza di funzioni limitate nelle espressioni delle matrici dinamiche, e dal fatto che la matrice di inerzia $M(q)$ è sempre invertibile con inversa composta da funzioni limitate

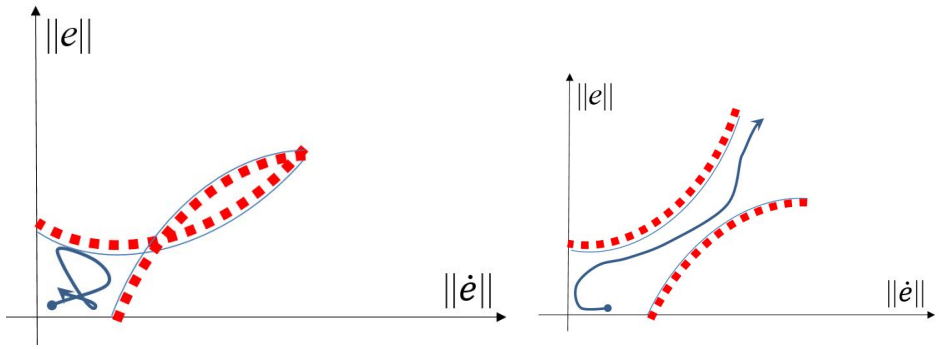


Figure 3.2: Descrizione qualitativa delle possibili evoluzioni delle norme dell'errore di inseguimento e della sua derivata $\|e\|, \|\dot{e}\|$.

3.1.6 Controllo a Struttura Variabile

Si consideri una semplice modifica del controllo a coppia calcolata con parametri non ideali ottenuta semplicemente aggiungendo ai termini proporzionale e derivativo un termine "correttivo" $\Delta(t)$, ovvero

$$\tau = \widehat{M}(q)\left(\ddot{q}_d + K_v\dot{e}_q + K_p e_q + \Delta(t)\right) + \widehat{C}(q,\dot{q})\dot{q} + \widehat{G}(q). \tag{3.18}$$

Sostituendo la (3.18) nella (3.1) si ottiene

$$\ddot{e}_q + K_v\dot{e}_q + K_p e_q = \eta(t) - \Delta(t) \tag{3.19}$$

Si supponga adesso di saper valutare, per una certa traiettoria di riferimento $q_d(t)$, per certi scostamenti iniziali $e_q(0), \dot{e}_q(0)$ e per certi errori massimi nei parametri stimati (ovvero per tutto un insieme di tali condizioni), una maggiorazione in norma della perturbazione $\eta(t)$, ovvero una funzione scalare

$$\rho(t) \geq \|\eta(e_q(t), q_d(t))\|, \ \forall t.$$

La norma qui usata è la norma due del vettore $\eta(t)$, ovvero $\|\eta(t)\| = \sqrt{\eta(t)^T\eta(t)}$, al variare di t. Naturalmente, è da aspettarsi che questa maggiorazione sia tanto più elevata quanto più grandi sono gli errori relativi di modello $M(q)^{-1}\widetilde{M}(q)$, $M(q)^{-1}\widetilde{C}(q,\dot{q})$ e $M(q)^{-1}\widetilde{G}(q)$. Inoltre, essa sarà tanto maggiore quanto più i riferimenti $q_d(t)$ sono veloci ed accelerati. Infine, la maggiorazione dovrà essere tanto più alta quanto più grande può divenire l'errore $e_q(t)$, il che dipende dall'errore iniziale, ma anche dal termine stesso $\eta(t) - \Delta(t)$ che ne eccita la dinamica (3.19). Si osservi che la scelta di $\Delta(t)$ è ancora da farsi: si può supporre peraltro che valga

$$\|\eta(t)\| \leq \gamma\|\Delta(t)\| + \delta, \tag{3.20}$$

per qualche valore $\gamma > 0$, $\delta > 0$. La scelta di modelli sufficientemente accurati e riferimenti sufficientemente lenti dà luogo a valori di γ e δ piccoli a piacimento. Si consideri adesso lo stato $x = (e_q, \dot{e}_q)^T$ in dimensione $2n$ del sistema (3.19), e la corrispondente equazione di stato

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -K_p & -K_v \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix} \big(\eta(t) - \Delta(t)\big)\,,$$

che riscriviamo in forma compatta introducendo le matrici A_d e B_d

$$\dot{x} = A_d x + B_d \big(\eta(t) - \Delta(t)\big)\,. \tag{3.21}$$

Se la scelta fatta per i guadagni proporzionali e derivativi è stabilizzante (come ovvio), il sistema non eccitato $\dot{x} = A_d x$, è asintoticamente stabile. Data quindi una qualsiasi matrice $Q \in R^{2n\times 2n}$ simmetrica e positiva definita, la soluzione $P \in R^{2n\times 2n}$ dell'equazione di Lyapunov

$$A_d^T P + P A_d = -Q$$

è simmetrica e positiva definita, e la funzione $V(t) = x^T P x$ è di Lyapunov per il sistema libero, avendosi per quel sistema $\dot{V} = -x^T Q x < 0$. Considerando adesso la stessa funzione $V(x)$ come candidata per il sistema perturbato (3.21), si ottiene

$$\dot{V}(t) = -x^T Q x + 2x^T P B_d \big(\eta(t) - \Delta(t)\big)\,, \tag{3.22}$$

In questa funzione, il termine $2x^T P B_d \big(\eta(t) - \Delta(t)\big)$ può avere segno qualsiasi, e non è più quindi garantita essere negativa definita. Applicando una tecnica di progetto "alla Lyapunov", si può applicare un $\Delta(t)$ tale per cui si possa ottenere $\dot{V}(t) < 0$. Per far ciò, definito il termine $w(t) = B_d^T P x(t)$, si consideri il prodotto scalare $w(t)^T(\eta(t) - \Delta(t))$. Il caso peggiore si ha quando $\eta(t)$ è allineato a $w(t)$, quando si ha $w(t)^T\eta(t) = \|w(t)\|\|\eta(t)\|$ massimamente positivo. Per dominare questo effetto e rendere $w^T(\eta - \Delta)$ negativo, si può scegliere di porre

$$\Delta(t) = \begin{cases} \rho(t)\dfrac{w(t)}{\|w(t)\|}\,, & \text{se} \quad \|w(t)\| \neq 0\,, \\ 0\,, & \text{se} \quad \|w(t)\| = 0\,, \end{cases} \tag{3.23}$$

che implica $\|\Delta(t)\| = \rho(t)$ per $\|w(t)\| \neq 0$. Dalla (3.23), e per la maggiorazione $\rho(t) \geq \|\eta(t)\|$, si ha quindi

$$\begin{cases} w(t)^T(\eta(t) - \Delta(t)) \leq -\|w(t)\|(\rho(t) - \|\eta(t)\|) < 0\,, & \|w(t)\| \neq 0 \\ w(t)^T(\eta(t) - \Delta(t)) = 0\,, & \|w(t)\| = 0 \end{cases} \tag{3.24}$$

Da notare che per la funzione maggiorante, a causa della (3.20), deve valere

$$\rho(t) \geq \gamma\|\Delta\| + \delta = \gamma\rho(t) + \delta$$

che può essere verificata da

$$\rho(t) \geq \frac{\delta}{1-\gamma} > 0.$$

Perché la soluzione abbia senso deve essere $\rho > 0$, quindi è necessario che sia $\gamma < 1$, che può essere garantito da traiettorie sufficiententemente lente e/o da modelli sufficientemente accurati.

Si noti che la legge di controllo $\Delta(t)$ trovata in (3.24) è di tipo discontinuo. Nel caso particolare di una sola coordinata, cioè con $\Delta \in R^1$, $\Delta = \rho\frac{w}{\|w\|}$ è la funzione segno $\text{sign}(w) = \frac{w}{|w|} = \pm 1$. Il controllo corrispondente è detto *tutto-niente*, o *bang-bang*, o ancora *a relay*). Nel caso generale, invece, la funzione di controllo trovata è proporzionale alla derivata di un cono $C = \sqrt{w(t)^T w(t)} \in R^n$, che è discontinua nel vertice del cono stesso.

Come conseguenza della natura discontinua del termine additivo Δ, possono insorgere fenomeni di *chattering* (ovvero oscillazioni sostenute ad alta frequenza del valore del controllo) nelle vicinanze della singolarità $w(t) = 0$, con conseguente innesco di vibrazioni, eccessiva usura degli attuatori etc. Per evitare il chattering, si può introdurre una correzione del tipo

$$\Delta = \rho(t)\frac{w(t)}{\sqrt{w(t)^T w(t) + \epsilon}}, \tag{3.25}$$

con $\epsilon > 0$ valore piccolo scelto empiricamente. In questo modo, si sostituisce alla discontinuità una zona di transizione (detta *boundary layer*) in cui la funzione di controllo è analitica. Questo rilassamento implica un comportamento più liscio del sistema, anche se la convergenza alla traiettoria desiderata non può più essere garantita, ed è sostituita da una garanzia di *Uniform Ultimate Boundedness, UUB*, ovvero limitatezza del valore di errore a regime.

3.1.7 Controllo in Backstepping

Il controllo a coppia calcolata (3.5) permette di inseguire una traiettoria nello spazio dei giunti $q_d(t)$, che può essere ottenuta a partire da una traiettoria desiderata nello spazio operativo $\xi_d(t)$ attraverso un metodo di inversione cinematica come discusso in precedenza. I due sistemi sono collegati in serie e restano separati, così che gli errori del primo possono sommarsi a quelli del secondo.

Consideriamo adesso uno schema di controllo che parte dai metodi visti per la soluzione cinematica e li sfrutta per chiudere un anello globale intorno al sistema.

Se $e_\xi = \xi_d - \xi$ è l'errore di inseguimento della traiettoria desiderata, il sistema complessivo può essere descritto dalle due equazioni

$$\begin{aligned} \dot{e}_\xi &= \dot{\xi}_d - J(q)\dot{q} && (3.26) \\ \ddot{q} &= M^{-1}(q)(\tau - C(q,\dot{q})\dot{q} - G(q)). && (3.27) \end{aligned}$$

Si può osservare che queste equazioni appaiono in una forma particolare, dove la prima equazione rappresenta un modello puramente cinematico di robot, e il secondo contiene tutte le dinamiche. Seguiremo qui un approccio che tende a dividere il problema del controllo in due fasi: prima controlla l'equazione cinematica usando le velocitá come input nominali, quindi escogita un controllore che fa tracciare le velocitá reali ingressi nominali. Questo approccio è noto come controllo "backstepping ".

Per il controllo della parte cinematica usiamo uno dei metodi visti in precedenza. Supponiamo di poter utilizzare il metodo di Newton-Raphson e scegliamo per le velocità la legge di riferimento (che indicheremo con $\dot{q}_r$)

$$\dot{q}_r = J^+(\dot{\xi}_d + \Lambda e_\xi) \tag{3.28}$$

con Λ una matrice di guadagni simmetrica e positiva definita. Come si ricorderà, questa legge fa sì che per la funzione $V(e) = \frac{1}{2}e_\xi^T e_\xi$ si abbia $\dot{V} = -e_\xi^T \Lambda e_\xi$.

Considereremo $\dot{q}_r$ come la velocità di riferimento cui la vera velocità del sistema, $\dot{q}$, deve essere fatta convergere dal vero ingresso al sistema, che sono le coppie τ.

Introduciamo per convenienza una nuova variabile

$$s = \dot{q}_r - \dot{q}$$

Nelle coordinate (e_ξ, s), poniamo una candidata di Lyapunov

$$W(e_\xi, s, t) = V(e_\xi) + \frac{1}{2}s^T M(q)s,$$

che è costituita dalla somma della funzione di Lyapunov del controllo cinematico, sommata ad un termine quadratico nell'errore di velocità rispetto al riferimento.

Calcolando la derivata di questa candidata si ha

$$\begin{aligned} \dot{W} &= e_\xi^T \dot{e}_\xi + s^T M \dot{s} + \tfrac{1}{2}s^T \dot{M} s \\ &= e_\xi^T \dot{e}_\xi + s^T (M\ddot{q}_r - M\ddot{q}) + \tfrac{1}{2}s^T \dot{M} s \\ &= e_\xi^T \dot{e}_\xi + s^T (M\ddot{q}_r + C\dot{q} + G - \tau) + \tfrac{1}{2}s^T \dot{M} s. \end{aligned}$$

Sommando e sottraendo a destra il termine $s^T C s$, che può essere riscritto sia come $\frac{1}{2}\, s^T(2C)s$ che come $s^T(C\dot{q}_r - C\dot{q})$, abbiamo

$$\dot{W} \;=\; e_\xi^T \dot{e}_\xi + s^T\left(M\ddot{q}_r + C\dot{q}_r + G - \tau\right) + \tfrac{1}{2} s^T(\dot{M} - 2C)s.$$

Assumendo che la matrice $C(q,\dot{q})$ sia scritta nella forma di Christoffel, sappiamo che la matrice $\dot{M} - 2C$ è antisimmetrica, quindi l'ultimo termine a destra è nullo per qualsiasi s. Scegliamo quindi

$$\tau = M\ddot{q}_r + C\dot{q}_r + G + K_d s + \bar{\tau} \tag{3.29}$$

in modo che

$$\dot{W} = e_\xi^T \dot{e}_\xi - s^T K_d s - s^T \bar{\tau}.$$

Scrivendo

$$s = \dot{q}_r - \dot{q} = J^+\left(\dot{\xi}_d + \Lambda e_\xi\right) - J^+\dot{\xi} = J^+\left(\dot{e}_\xi + \Lambda e_\xi\right),$$

si ha

$$\dot{W} = e_\xi^T \dot{e} - s^T K_d s - (\dot{e}_\xi + \Lambda e_\xi)^T J^{+T}\bar{\tau}.$$

Infine, scegliendo $\bar{\tau} = J^T e_\xi$, si ha

$$\dot{W} = -s^T K_d s - e_\xi^T \Lambda e_\xi.$$

Possiamo quindi applicare il teorema di Lyapunov. Il sistema dinamico (3.26), (3.27), nelle nuove coordinate (e_ξ, s), é tempo variante per l'effetto di $\xi_d(t)$ su $q = Q^{-1}(\xi_d(t) - e_\xi)$. Altrettanto vale per la candidata di Lyapunov in cui appare $M(q)$.

Possiamo peraltro verificare facilmente che, per motivi fisici, la norma della matrice di inerzia é limitata $\left(\max_q \|M(q)\| \le \beta_M\right)$, e altrettanto vale per la sua inversa $\left(\max_q \|M(q)^{-1}\| \le {}^1/_{\beta_m}\right)$. Per la norma 2, β_M e β_m sono una limitazione superiore e inferiore, rispettivamente, del massimo e minimo valore singolare di $M(q)$. Si puó scrivere quindi

$$\frac{1}{2}\|e_\xi\|^2 + \frac{1}{2}\beta_m^2\|s\|^2 \le W(e,s,t) \le \frac{1}{2}\|e_\xi\|^2 + \frac{1}{2}\beta_M^2\|s\|^2,\ \forall t, \forall e, s$$

dove le due funzioni che delimitano la $W(e_\xi, s, t)$ sono di classe $\mathcal{K}_\infty$.[3] Dalla (3.1.7) si ha poi che $\dot{W}$ é tempo-invariante e globalmente negativa definita nelle coordinate (e_ξ, s).

In conclusione, dal teorema di Lyapunov per sistemi tempo-varianti si ha che la legge di controllo in backstepping

$$\tau = M\ddot{q}_r + C\dot{q}_r + G(q) + K_d s + J^T e_\xi \tag{3.30}$$

rende l'origine $(e_\xi, s) = 0$ asintoticamente stabile, e quindi che ξ converge a $\xi_d(t)$.

[3] una funzione $\alpha : [0,\infty) \mapsto \mathbb{R}$ si dice di classe $\mathcal{K}_\infty$ se é strettamente crescente, se $\alpha(0) = 0$ e $\lim_{r\to\infty} \alpha(r) = \infty$.

3.1.8 Confronto tra le tecniche di controllo ai giunti.

Mentre il controllo PD e quello a struttura variabile hanno differenze ovvie, la differenza tra i metodi CT e BS vale la pena di essere discussa brevemente.

Per l'inseguimento di un riferimento di traiettoria dato all'end-effector, il metodo CT usa le uscite del metodo di inversione cinematica prescelto come riferimento per il controllo della dinamico. Il metodo BS permette invece di inglobare la soluzione di cinematica inversa e dinamica nello stesso anello di controllo globale.

Anche se la loro derivazione è molto diversa (il che sarà importante in vista di successive modifiche per adattare queste tecniche al caso di modelli incerti) i due metodi hanno comunque alcune similarità. Scrivendo la legge di controllo BS a livello di giunti (cioè considerando $e_q = (q_d - q)$ al posto di e_ξ e ponendo quindi $J = I$), ed esprimendo tutto in $(e_q, \dot{e}_q)$ usando le $\dot{q}_r = \dot{q}_d + \Lambda e_q$ e $\dot{q}_d = \dot{e}_q + \dot{q}$, si ha

$$\begin{aligned}
\tau_{BS,q} &= M\ddot{q}_r + C\dot{q}_r + G(q) + K_d s + e_q \\
&= M\ddot{q}_d + M\Lambda\dot{e}_q + C\dot{q} + C\dot{e}_q + C\Lambda e_q + G + K_d\dot{e}_q + K_d\Lambda e_q + e_q \\
&= M\ddot{q}_d + C\dot{q} + G + (M\Lambda + K_d + C)\,\dot{e}_q + \big((C + K_d)\,\Lambda + I\big)\,e_q.
\end{aligned}$$

Confrontando questa con la legge CT,

$$\tau_{CT} = M\ddot{q}_d + C\dot{q} + G + MK_v\dot{e}_q + MK_p e_q,$$

si osserva che, affinché le leggi di controllo coincidessero, si dovrebbe avere

$$\begin{aligned}
K_v &= \Lambda + M^{-1}\,(K_d + C) \\
K_p &= M^{-1}\,\big((K_d + C)\,\Lambda + I\big)\,.
\end{aligned}$$

Quindi, un controllore Computed Torque che coincidesse con il controllore BackStepping ai giunti dovrebbe avere matrici di guadagno funzioni dello stato.

3.2 Constrained Systems with Complete Actuation

3.2.1 Modeling

Consider a system described by n Lagrangian coordinates q, with kinetic energy $T(q) = \frac{1}{2}\dot{q}^T M(q)\dot{q}$ and gravitational potential energy $U(q)$, $\frac{\partial U}{\partial q} = G(q)$ as in (3.1), now subject to m independent kinematic constraints in the form

$A(q)\dot{q} = 0$. From the theory of Lagrangian systems, the dynamics can be written as

$$\tau = M(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + G(q) + A^T(q)\lambda \tag{3.31}$$

with τ generalized forces and λ a vector of Lagrange multipliers.

Adjoining this equation with the derivative of the constraint equations $A(q)\ddot{q} + \dot{A}(q)\dot{q} = 0$, and rearranging in matrix form, one obtains

$$\begin{bmatrix} M(q) & A(q)^T \\ A(q) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -h(q,\dot{q}) + \tau \\ -\dot{A}(q)\dot{q} \end{bmatrix}$$

The matrix in the left-hand term is invertible if the constraints (the rows of $A(q)$) are independent, hence both the accelerations $\ddot{q}$ and the Lagrange multipliers λ can be calculated at any instant knowing the state of the system $(q,\dot{q})$ and generalized torques τ. The Lagrange multipliers have the physical meaning of the reaction forces that are developed to prevent violations of the constraints

When the explicit calculation of the vincular reactions is not needed, the dynamics of constrained Lagrangian systems can also be derived in a more compact form using the method of quasi-velocities. Letting $S(q) \in \mathbb{R}^{n\times n-m}$ denote a basis for the kernel of $A(q)$, the kinematic system is described by

$$\dot{q} = S(q)\nu, \tag{3.32}$$

where $\nu \in \mathbb{R}^{n-m}$ is the quasi-velocity vector corresponding to the $n-m$ residual degrees-of-freedom of the system. By derivation we get

$$\ddot{q} = S(q)\dot{\nu} + \dot{S}(q)\nu, \tag{3.33}$$

with $\dot{S}_{i,j}(q) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n-m} \frac{\partial S_{i,j}(q)}{\partial q_k} S_{k,\ell}(q)\nu_\ell$. Substituting (3.32) and (3.33) in the dynamics, and premultiplying the equation by $S^T(q)$, we have

$$S^T M S\dot{\nu} + S^T\left(CS + M\dot{S}\right)\nu + S^T G = S^T\tau$$

where the fact that $S^T A^T = 0$ is used.

The vector $\tau_c = S^T\tau$ collects the $n-m$ components of the projection of generalized forces on the constraint. The system is said to be **completely actuated** if the actuator forces f effectively acting on the system are biunivocally related to such projections, i.e. if there exists an invertible map $F(q)$ such that $\tau_c = F(q)f$.

For notational convenience, let $M_c(q) \stackrel{def}{=} S^T M S$, $C_c(q,\nu) \stackrel{def}{=} S^T(CS + M\dot{S})$, and $G_c(q) = S^T G$. The overall constrained system can then be written in the form

$$\begin{aligned} \dot{q} &= S\nu \\ \dot{\nu} &= -M_c^{-1}\left(C_c\nu + G_c\right) + M_c^{-1}\tau_c. \end{aligned} \tag{3.34}$$

3.2.2 Backstepping Control - General Case

Although application of a computed torque method to the constrained dynamics (3.34) woudl be straightforward, the lack of integration between the reference generation step (via a kinematic controller) and the dynamic control has even morfe sever implicatins on overall convergence to zero error in the case of constrained systems than those discussed before. It will be hence important to consider an integrated controller design, such as offered by the backsteppiung method. On the other hand, the straightforward application of the backstepping method as seen in the case of unconstrained systems is not directly applicable, and it is useful to consider a more general approach.

Consider a system whose state x can be partitioned so that the dynamics can be written as

$$\begin{array}{rcl} \dot{x}_1 & = & f(x_1) + g(x_1)x_2 \\ \dot{x}_2 & = & h(x_1, x_2) + \ell(x_1, x_2)u \end{array} \tag{3.35}$$

with $x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$, $x_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$, $u \in \mathbb{R}^{n_2}$. Assume the origin is an equilibrium, and that $\ell(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$ is invertible for all x_1, x_2.

The backstepping method assumes that a controller design exists for the "higher level" system

$$\dot{x}_1 = f(x_1) + g(x_1)u' \tag{3.36}$$

in the form of a stabilizing feedback law $u' = \Gamma(x_1)$, and that a Lyapunov function $V(x_1)$ is available such that (omitting the argument of functions, and letting $V_{x_1} = \frac{\partial V}{\partial x_1}$)

$$\dot{V}(x_1) = V_{x_1}(f + g\Gamma)$$

is negative semi-definite (or negative definite).

In the backstepping method, the control for (3.35) is computed so that the state x_2 tends to track the value of $u' = \Gamma(x_1)$. This can be obtained using the control Lyapunov function

$$W(x) = V + \frac{1}{2}(\Gamma - x_2)^T P(x)(\Gamma - x_2),$$

where $P(x) \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$ is a positive definite "design" matrix (i.e. a matrix whose choice is at the controller designer's disposal). Letting $v = h(x_1, x_2) + \ell(x_1, x_2)\, u$ and $\dot{\Gamma}(x_1) = \Gamma_{x_1}(f + g\, x_2)$, we compute

$$\begin{array}{rcl} \dot{W}(x) & = & V_{x_1}(f + g\, x_2) + (\Gamma - x_2)^T P\left(\dot{\Gamma} - v\right) + \\ & & + \frac{1}{2}(\Gamma - x_2)^T \dot{P}(\Gamma - x_2). \end{array}$$

Let us then choose

$$v = \dot{\Gamma} + P^{-1}\left(\frac{1}{2}\dot{P}(\Gamma - x_2) + K(\Gamma - x_2)\right) + \bar{v}$$

(with K a positive definite design matrix) so that we get

$$\dot{W} = V_{x_1}\,(f + g\,x_2) - (\Gamma - x_2)^T\,P\bar{v} - (\Gamma - x_2)^T K(\Gamma - x_2).$$

Summing and subtracting a term $V_{x_1} g\Gamma$ on the right we have

$$\dot{W} = V_{x_1}\,(f + g\Gamma) - V_{x_1} g\,(\Gamma - x_2) - (\Gamma - x_2)^T\,P\bar{v} - (\Gamma - x_2)^T K(\Gamma - x_2),$$

so that, by setting $\bar{v} = -P^{-1}\,g^T\,V_{x_1}^T$, we have

$$\dot{W} = \dot{V} - (\Gamma - x_2)^T K(\Gamma - x_2),$$

which is negative semi-definite (or definite, if so is $\dot{V}(x_1)$) in the origin. We have thus shown that the overall control law

$$u = \ell(x)^{-1}\left(v(x) - h(x)\right), \tag{3.37}$$

with

$$v = \dot{\Gamma} + P^{-1}\left(\frac{1}{2}\dot{P}\,(\Gamma - x_2) + K\,(\Gamma - x_2) - g^T V_{x_1}^T\right)$$

stabilizes (asymptotically) the origin of system (3.35).

A few remarks are in order.

- The control of an uncostrained lagrangian system (e.g. a robot arm)

$$\begin{aligned} \dot{e}_q &= \dot{q}_d - \dot{q} && (3.38)\\ \ddot{q} &= -M^{-1}(q)\left(C(q,\dot{q})\dot{q} + G(q)\right) + M(q)^{-1}\tau, && (3.39) \end{aligned}$$

  with $e_q = q_d - q$ the joint space error, can be regarded as an instance of the general backstepping method, by setting $x_1 = e_q$, $f(x_1) = \dot{q}_d$, $g(x_1) = -I$, $x_2 = \dot{q}$, $h(x) = -M^{-1}(q)\left(C(q,\dot{q})\dot{q} + G(q)\right)$, $\ell(x) = M^{-1}(q)$, $u = \tau$, $\Gamma(x_1) = \dot{q}_d + \Lambda e_q = \dot{q}_r$. If we choose $P = M(q)$, we obtain exactly the controller already found in (3.30).

- A state-dependent P is not strictly required for the application of the general backstepping. In the previous example of a robot arm, with similar notation but choosing a constant P, we get (omitting arguments of functions)

$$\begin{aligned} u &= M\left(v + M^{-1}\left(C\dot{q} + G\right)\right) && (3.40)\\ v &= \ddot{q}_d + \Lambda\dot{e}_q + P^{-1}\left(K\dot{e}_q + K\Lambda e_q + K_e e_q\right) && (3.41) \end{aligned}$$

  Hence, we have

$$\tau = u = M\left(\ddot{q}_d + (\Lambda + P^{-1}K)\dot{e}_q + P^{-1}(K\Lambda + K_e)e_q\right) + C\dot{q} + G\,. \tag{3.42}$$

3.2.3 Backstepping Control of Constrained Lagrangian Systems

The general form of the backstepping technique can be directly applied to synthesize a controller for the constrained system described by equation (3.34).

If a law $\nu = \Gamma(q)$ is designed for the kinematic level, such that $\dot{q} = S(q)\Gamma(q)$ is stabilized, and a Lyapunov function $V(q)$ is available with $\dot{V}(q) = V_q S\Gamma$ negative semi-definite, then

$$W(q,\nu) = V(q) + \frac{1}{2}(\nu - \Gamma)^T P(\nu - \Gamma)$$

is a Lyapunov control function for the overall system (3.34).

The usual backstepping control derivations indeed yield

$$\tau_c(q,\nu) = C_c\nu + G_c + M_c\left(\dot{\Gamma} - \frac{1}{2}P^{-1}\dot{P}(\nu - \Gamma) - P^{-1}K(\nu - \Gamma) - P^{-1}S^T V_q^T\right) \tag{3.43}$$

for which

$$\dot{W} = \dot{V} - (\nu - \Gamma)^T K(\nu - \Gamma),$$

which is in turn negative semi-definite (actually negative definite if such was $\dot{V}$).

3.2.4 Modello e controllo dinamico di un uniciclo

Modello dinamico di un uniciclo

Sia m la massa del veicolo e I_z il momento di inerzia rispetto all'asse perpendicolare al piano di moto. Facendo riferimento alla notazione usata in precedenza (fig. 2.6), le coordinate generalizzate sul piano sono $q = [x, y, \theta]^T$. Supponendo che il moto si svolga su un piano orizzontale, l'energia potenziale del sistema è costante. L'energie cinetica è data da $T = \frac{1}{2}\dot{q}^T M(q)\dot{q}$, dove

$$M = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & J \end{bmatrix}.$$

La matrice della forma Pfaffiana $A(q)$ e la sua derivata per il vincolo cinematico (2.18) sono date da

$$A(q) = \begin{bmatrix} \sin\theta & -\cos\theta & 0 \end{bmatrix}; \quad \dot{A}(q) = \begin{bmatrix} \dot{\theta}\cos\theta & \dot{\theta}\sin\theta \end{bmatrix}.$$

Con semplici calcoli si trova che i termini delle forze apparenti e gravitazionali sono nulli. L'espressione della dinamica di un veicolo con vincolo di uniciclo è quindi

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 & \sin\theta \\ 0 & m & 0 & -\cos\theta \\ 0 & 0 & I_z & 0 \\ \sin\theta & -\cos\theta & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_\theta \\ -\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta - \dot{y}\dot{\theta}\sin\theta \end{bmatrix}. \quad (3.44)$$

Risolvendo questa equazione mediante inversione della matrice a primo termine si ottiene

$$\begin{cases} \ddot{x} = \dfrac{\cos\theta}{m}(\tau_x\cos\theta + \tau_y\sin\theta) - \dot{\theta}\sin\theta(\dot{x}\cos\theta + \dot{y}\sin\theta) \\ \ddot{y} = \dfrac{\sin\theta}{m}(\tau_x\cos\theta + \tau_y\sin\theta) + \dot{\theta}\cos\theta(\dot{x}\cos\theta + \dot{y}\sin\theta) \\ \ddot{\theta} = \dfrac{\tau_\theta}{I_z} \\ \lambda = \tau_x\sin\theta - \tau_y\cos\theta + m\dot{\theta}(\dot{x}\cos\theta + \dot{y}\sin\theta) \end{cases}. \quad (3.45)$$

Si osserva qui che il termine $(\tau_x\cos\theta + \tau_y\sin\theta) \stackrel{def}{=} \tau_v$ corrisponde alla somma delle proiezioni delle forze generalizzate τ_x e τ_y lungo la direzione longitudinale del veicolo.

Scegliendo invece di descrivere il sistema vincolato usando il metodo delle quasi velocità, la base $S(q)$ dello spazio nullo di $A(q)$ e la sua derivata sono

$$S(q) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 \\ \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \dot{S}(q) = \begin{bmatrix} -\dot{\theta}\sin\theta & 0 \\ \dot{\theta}\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Proiettando la dinamica del sistema lungo il vincolo, si ha

$$S(q)^T M(q) S(q)^T \dot{\nu} + S(q)^T M(q) \dot{S}(q) \dot{\nu} = S(q)^T \tau.$$

Si ottiene facilmente

$$\begin{aligned} M_c(q) &= S(q)^T M(q) S(q) = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I_z \end{bmatrix} \\ h_c(q,\dot{q},\nu) &= S(q)^T M(q) \dot{S}(q) = 0 \\ \tau_c &= S(q)^T \tau = \begin{bmatrix} \tau_x\cos\theta + \tau_y\sin\theta \\ \tau_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_v \\ \tau_\theta \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.46)$$

e quindi

$$\begin{array}{l} \dot{\nu}_1 = \frac{1}{m}(\tau_x \cos\theta + \tau_y \sin\theta) = \frac{1}{m}\tau_v \\ \dot{\nu}_2 = \frac{\tau_\theta}{I_z}\,. \end{array} \tag{3.47}$$

In definitiva il modello dinamico complessivo dell'uniciclo è dato da

$$\begin{cases} \dot{x} = v\cos\theta \\ \dot{y} = v\sin\theta \\ \dot{\theta} = \omega \\ \dot{v} = \dfrac{1}{m}\tau_v \\ \dot{\omega} = \dfrac{1}{I_z}\tau_\theta\,. \end{cases} \tag{3.48}$$

Inseguimento di traccia con un uniciclo

Si consideri nuovamente il problema di stabilizzare un veicolo di tipo uniciclo su di un percorso assegnato, considerandolo adesso come sistema dinamico (3.48). Nella sezione 2.2.3 è stata determinata una legge di controllo che stabilizzava i modello cinematico del veicolo sull'asse delle ascisse $y = 0$, che richiamiamo qui per comodità. Considerando il modello cinematico dell'uniciclo (5.1) con velocità di avanzamento $v = \widehat{v}(t)$ dell'uniciclo assegnata, la legge è stata ottenuta usando (nello spazio di stato ridotto (y, θ)) la candidata di Lyapunov

$$V(q) = \frac{1}{2}(y^2 + \theta^2) \tag{3.49}$$

e la sua derivata

$$\dot{V}(q) = y\widehat{v}(t)\sin\theta + \theta u'\,, \tag{3.50}$$

quindi ponendo

$$u' = \Gamma_\omega(\theta, y) = -\widehat{v}(t)y\frac{\sin\theta}{\theta} - K_\theta\theta \tag{3.51}$$

per la quale si aveva

$$\dot{V}(q) = -K_\theta\theta^2 \tag{3.52}$$

che risulta s.n.d.. Attraverso il teorema di Lasalle si poteva dimostrare la asintotica stabilità del moto desiderato.

Per la stabilizzazione del modello dinamico con backstepping, si definisce unaa candidata di Lyapunov estesa allo spazio di stato (y, θ, ω) come

$$W(q, \omega) = V(q) + \frac{1}{2}(\omega - \Gamma_\omega)^2\,, \tag{3.53}$$

dove Γ_ω rappresenta la legge di stabilizzazione nel caso cinematico (riportata in (3.51)).

Derivando rispetto al tempo si ottiene

$$\dot{W}(q,\omega) = y\widehat{v}(t)\sin\theta + \theta\omega + (\omega - \Gamma_\omega)(\frac{\tau_\theta}{I_z} - \dot{\Gamma}_\omega)\,. \tag{3.54}$$

Sommando e sottraendo a destra $\theta\Gamma_\omega$, possiamo riscrivere

$$\dot{W}(q,\omega) = \dot{V}(q) + \theta(\omega - \Gamma_\omega) + (\omega - \Gamma_\omega)\left(\frac{\tau_\theta}{I_z} - \dot{\Gamma}_\omega\right)\,. \tag{3.55}$$

Scegliamo quindi

$$\tau_\theta = I_z(\dot{\Gamma}_\omega - K_b(\omega - \Gamma_\omega) - \theta \tag{3.56}$$

con $K_b > 0$ costante di backstepping, in modo da ottenere

$$\dot{W}(q,\omega) = -K_\theta\theta^2 - K_b(\omega - \Gamma_\omega)^2,$$

ovvero la (3.52) con l'aggiunta del termine di backstepping che risulta n.d..

A illustrazione di questo risultato, si riporta in fig. 3.3 l'andamento del veicolo con controllo cinematico direttamente su ω e quello con controllo dinamico su τ_θ ottenuto con il metodo di backstepping. Per completezza, si riporta anche il risultato ottenuto facendo inseguire la velocità di riferimento ω_r da parte di un controllore dinamico a coppia calcolata, che in questo caso è semplicemente dato da

$$\tau_\theta = I_z\left(\dot{\omega}_r + K_v(\omega_r - \omega) + K_p(\theta_r - \theta)\right)\,,$$

dove $\theta_r(t)$ è ottenuta direttamente da ω_r per integrazione a partire dal valore iniziale di $\theta(0)$. Come si osserva, la mancata chiusura di un anello globale attorno alla variabile y impedisce la convergenza di questo secondo schema al valore desiderato, mentre il backstepping insegue correttamente la traccia desiderata.

Inseguimento del moto di un punto con uniciclo

Si consideri il problema dell'inseguimento di una traiettoria di riferimento nel caso di uniciclo. Le variabili di stato da stabilizzare sono in questo caso gli errori di tracking tra i due veicoli, con cinematica:

$$\dot{e} = \begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v + e_2\omega - \widehat{v}\cos e_3 \\ -e_1\omega + \widehat{v}\sin e_3 \\ \omega - \widehat{\omega} \end{bmatrix}\,. \tag{3.57}$$

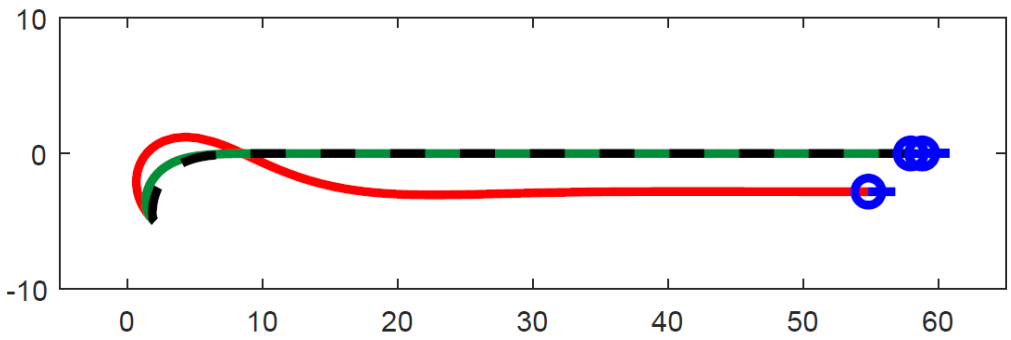


Figure 3.3: Inseguimento di traccia con uniciclo cinematico (in tratteggio), con backstepping della dinamica (in verde) e con controllo a coppia calcolata (in rosso).

La candidata di Lyapunov e la ralativa derivata direzionale per il modello cinematico sono:

$$\begin{cases} V(e) = \frac{1}{2}(e_1^2 + e_2^2) + K(1 - \cos e_3) \\ \dot{V}(e) = e_1(v + e_2\omega - \widehat{v}\cos e_3) + e_2(-e_1\omega + \widehat{v}\sin e_3) + K\sin e_3(\omega - \widehat{\omega}) \,. \end{cases} \tag{3.58}$$

Ricordiamo che, sostituendo i controlli

$$\begin{cases} v = \Gamma_v = \widehat{v}\cos e_3 - \lambda_1 e_1 \\ \omega = \Gamma_\omega = \widehat{\omega} - \frac{1}{K} e_2 \widehat{v} - \lambda_2 \sin e_3 \,, \end{cases} \tag{3.59}$$

con λ_1, $\lambda_2 > 0$ si ottiene

$$\dot{V}(e) = -\lambda_1 e_1^2 - K\lambda_2 \sin^2 e_3 \,, \tag{3.60}$$

che è s.d.n.. Ricordiamo anche che utilizzando il teorema di Lasalle-Yoshizawa è possibile concludere sulla asintotica stabilità del punto di equilibrio $e = [e_1, e_2, e_3]^T = [0, 0, 0]^T$.

Per la stabilizzazione del modello dinamico applichiamo la tecnica del backstepping. Il modello dinamico complessivo è

$$\dot{e} = \begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \\ \dot{v} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v + e_2\omega - \widehat{v}\cos e_3 \\ -e_1\omega + \widehat{v}\sin e_3 \\ \omega - \widehat{\omega} \\ \frac{\tau_v}{m} \\ \frac{\tau_\theta}{I_z} \end{bmatrix} . \tag{3.61}$$

Si definisca quindi la candidata di Lyapunov estesa:

$$W(e, v, \omega) = V(e) + \frac{1}{2}(v - \Gamma_v)^2 + \frac{1}{2}(\omega - \Gamma_\omega)^2, \tag{3.62}$$

dove Γ_ω e Γ_v rappresentano le leggi di stabilizzazione nel caso cinematico (3.59). La derivata direzionale della candidata di Lyapunov risulta

$$\dot{W}(e, v, \omega) = \dot{V}(e) + (v - \Gamma_v)\left(\frac{\tau_v}{m} - \dot{\Gamma}_v\right) + (\omega - \Gamma_\omega)\left(\frac{\tau_\theta}{I_z} - \dot{\Gamma}_\omega\right). \tag{3.63}$$

Scegliamo per τ_v e τ_θ

$$\begin{cases} \tau_v = m(\dot{\Gamma}_v - K_{bv}(v - \Gamma_v) + \bar{\tau}_v) \\ \tau_\theta = I_z(\dot{\Gamma}_\omega - K_{b\omega}(\omega - \Gamma_\omega) + \bar{\tau}_\theta)\,, \end{cases} \tag{3.64}$$

dove $K_{bv} > 0$ e $K_{b\omega} > 0$ sono costanti di guadagno rispettivamente per la velocità lineare ed angolare, da definire in base alle desiderate velocità di convergenza per il veicolo, e dove $\bar{\tau}_v$ e $\bar{\tau}_\omega$ sono termini ancora da scegliere.

Sostituendo le (3.64), la seconda delle (3.58) e le Γ_v e Γ_ω (vedi (3.59)) in (3.63) si ottiene

$$\begin{aligned} \dot{W}(e, v, \omega) = \dot{V}(e) + (v - \Gamma_v)\bar{\tau}_v + (\omega - \Gamma_\omega)\bar{\tau}_\theta - K_{bv}(v - \Gamma_v)^2 - K_{b\omega}(\omega - \Gamma_\omega)^2 = \\ e_1 v - e_1 \widehat{v}\cos e_3 + e_2 \widehat{v}\sin e_3 + K\sin e_3(\omega - \widehat{\omega}) + \\ + (v - \widehat{v}\cos e_3 + \lambda_1 e_1)\bar{\tau}_v + \left(\omega - \widehat{\omega} + \frac{1}{K}e_2\widehat{v} + \lambda_2 \sin e_3\right)\bar{\tau}_\theta + \\ - K_{bv}(v - \Gamma_v)^2 - K_{b\omega}(\omega - \Gamma_\omega)^2. \end{aligned}$$

Scegliendo $\bar{\tau}_v = -e_1$ si ottiene

$$\begin{aligned} \dot{W}(e, v, \omega) = -\lambda_1 e_1^2 + e_2\widehat{v}\sin e_3 + K\sin e_3(\omega - \widehat{\omega}) + \\ + \left(\omega - \widehat{\omega} + \frac{1}{K}e_2\widehat{v} + \lambda_2 \sin e_3\right)\bar{\tau}_\theta - K_{bv}(v - \Gamma_v)^2 - K_{b\omega}(\omega - \Gamma_\omega)^2, \end{aligned}$$

Infine, scegliendo $\bar{\tau}_\theta = -K\sin e_3$ si ha

$$\dot{W}(e, v, \omega) = -\lambda_1 e_1^2 - \lambda_2 K \sin^2 e_3 - K_{bv}(v - \Gamma_v)^2 - K_{b\omega}(\omega - \Gamma_\omega)^2,$$

dalla quale è possibile notare come si sia ottenuta la stessa derivata direzionale del caso cinematico con l'aggiunta del termine di backstepping.

I risultati dell'inseguimento di un veicolo che si muove con traiettorie diverse da parte di un uniciclo dinamico sono riportati in fig. 3.4. La costante

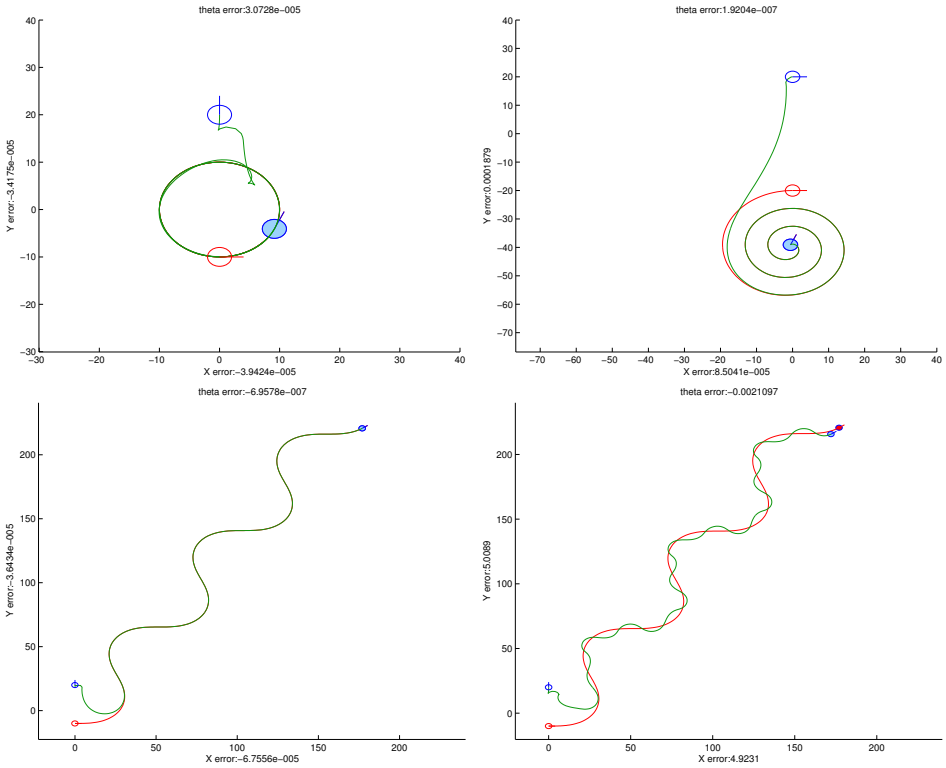


Figure 3.4: Risultati della simulazione per l'inseguimento di un uniciclo di riferimento nel caso di modello dinamico.

di guadagno del controllore cinematico è fissato a $K = 10$, mentre le costanti di backstepping sono $K_{bv} = 10$ e $K_{b\omega} = 1000$. La massa ed il momento di inerzia sono posti rispettivamente pari a $m = 10$ e $I_z = 1$. Nel primo esempio (figura 3.4, in alto a sinistra) il veicolo di riferimento ha come condizione iniziale $q_0^r = [x_0^r, y_0^r, \theta_0^r]^T = [0,\ -10,\ 0]^T$ e velocità $[v_r(t), \omega_r(t)]^T = [10,\ 1]^T$, così che la sua traiettoria descrive una circonferenza di raggio $R = 10$ percorsa a velocità costante. Il veicolo inseguitore parte invece da $q_0^i = [x_0^i, y_0^i, \theta_0^i, v, \omega]^T = [0,\ 20,\ \frac{\pi}{2},\ 0,\ 0]^T$.

Nel secondo esempio (figura 3.4, in alto a destra) il veicolo di riferimento parte da $q_0^r = [x_0^r, y_0^r, \theta_0^r]^T = [0,\ -20,\ 0]^T$. Lo stato del veicolo inseguitore è inizializzato in $q_0^i = [x_0^i, y_0^i, \theta_0^i, v, \omega]^T = [0,\ 20,\ 0,\ 0,\ 0]^T$.

Nel terzo esempio (figura 3.4, in basso a sinistra) il veicolo di riferimento ha come condizioni iniziali $q_0^r = [x_0^r, y_0^r, \theta_0^r]^T = [0,\ -10,\ 0]^T$ e velocità $[v_r(t), \omega_r(t)]^T = [20\cos(t),\ 10\sin(t)]^T$. Lo stato di partenza del veicolo inseguitore è invece $q_0^i = [x_0^i, y_0^i, \theta_0^i, v, \omega]^T = [0,\ 20,\ \frac{\pi}{2},\ 0,\ 0]^T$.

Nel quarto esempio (figura 3.4, in basso a destra) i due veicoli partono da

condizioni identiche al caso precedente. L'unica differenza qui è nel tuning della costante di guadagno di backstepping, posto qui pari a $K_{b\omega} = 10$, che mostra come la convergenza verso il riferimento possa essere molto rallentata, e praticamente compromessa.

Controllo di postura (regolazione) di un uniciclo

Anche per quest'ultimo esempio si prenda in considerazione la stabilizzazione dinamica su un punto di un veicolo uniciclo. Si riporta brevemente il modello cinematico del sistema utilizzato:

$$\begin{cases} \dot{\rho} = -\cos\beta v \\ \dot{\phi} = \frac{1}{\rho}\sin\beta v \\ \dot{\beta} = \frac{1}{\rho}\sin\beta v - \omega \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{\rho} = -\rho\cos\beta\bar{v} \\ \dot{\phi} = \sin\beta\bar{v} \\ \dot{\beta} = \sin\beta\bar{v} - \omega \end{cases} \tag{3.65}$$

dove $\bar{v} = \frac{v}{\rho}$ è la nuova velocità di avanzamento lineare del veicolo ed ω è l'usuale velocità angolare.

La candidata di Lyapunov utilizzata e la relativa derivata direzionale sono riportate di seguito:

$$\begin{cases} V(\bar{q}) = \frac{1}{2}(\rho^2 + \phi^2 + \lambda\beta^2) \\ \dot{V}(\bar{q}) = -\rho^2\cos\beta\bar{v} + \phi\sin\beta\bar{v} + \lambda\beta\sin\beta\bar{v} - \lambda\beta\omega\,, \end{cases} \tag{3.66}$$

dove $\lambda > 0$ è un grado di libertà aggiuntivo a disposizione del progettista. Scegliendo i seguenti controlli:

$$\begin{cases} \bar{v} = \Gamma_{\bar{v}} = \cos\beta \\ \omega = \Gamma_{\omega} = \frac{(\phi+\lambda\beta)}{\lambda}\frac{\sin\beta}{\beta}\cos\beta + \beta \end{cases}, \tag{3.67}$$

si ottiene $V(\bar{q})$ s.n.d. ed utilizzando ancora una volta Krasowskii–Lasalle, è possibile concludere sulla asintotica stabilità del punto di equilibrio.

Il modello dinamico del sistema è riportato di seguito:

$$\begin{matrix} \dot{v} = \frac{\tau_v}{m} \\ \dot{\omega} = \frac{\tau_\omega}{I_z} \end{matrix}, \tag{3.68}$$

dove, per semplicità, τ_v e τ_ω sono le coppie di controllo. Il modello dinamico (3.68) necessita della trasformazione $v \rightarrow \bar{v}$:

$$v = \rho\bar{v} \rightarrow \dot{v} = \dot{\rho}\bar{v} + \rho\dot{\bar{v}} = -\rho\cos\beta\bar{v}^2 + \rho\dot{\bar{v}} \rightarrow \dot{\bar{v}} = \frac{\tau_v}{m\rho} + \cos\beta\bar{v}^2. \tag{3.69}$$

Il modello dinamico complessivo sarà dunque:

$$\begin{bmatrix} \dot{\rho} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\bar{v}} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\rho\cos\beta\bar{v} \\ \sin\beta\bar{v} \\ \sin\beta\bar{v} - \omega \\ \frac{\tau_v}{m\rho} + \cos\beta\bar{v}^2 \\ \frac{\tau_\omega}{I_z} \end{bmatrix}. \tag{3.70}$$

Per la stabilizzazione del modello dinamico si applichi la tecnica del backstepping. Si definisca la candidata di Lyapunov estesa:

$$W(\bar{q}, \bar{v}, \omega) = V(\bar{q}) + \frac{1}{2}(\bar{v} - \Gamma_{\bar{v}})^2 + \frac{1}{2}(\omega - \Gamma_\omega)^2, \tag{3.71}$$

dove $\Gamma_{\bar{v}}$ e Γ_ω rappresentano le leggi di stabilizzazione nel caso cinematico (riportate in (3.67)).

La derivata direzionale della candidata di Lyapunov risulta

$$\begin{aligned} \dot{W}(\bar{q}, \bar{v}, \omega) &= \dot{V}(\bar{q}) + (\bar{v} - \Gamma_{\bar{v}})(\dot{\bar{v}} - \dot{\Gamma}_{\bar{v}}) + (\omega - \Gamma_\omega)(\dot{\omega} - \dot{\Gamma}_\omega) = \\ &\dot{V}(\bar{q}) + (\bar{v} - \Gamma_{\bar{v}})\left(\frac{\tau_v}{m\rho} + \cos\beta\bar{v}^2 - \dot{\Gamma}_{\bar{v}}\right) + (\omega - \Gamma_\omega)(\frac{\tau_\omega}{I_z} - \dot{\Gamma}_\omega). \end{aligned}$$

Possibili leggi per le coppie di controllo a disposizione τ_v e τ_ω sono:

$$\begin{cases} \tau_v = m\rho(\dot{\Gamma}_{\bar{v}} - \cos\beta\bar{v}^2 - K_{bv}(\bar{v} - \Gamma_{\bar{v}}) + \bar{\tau}_v) \\ \tau_\omega = I_z(\dot{\Gamma}_\omega - K_{b\omega}(\omega - \Gamma_\omega) + \bar{\tau}_\omega \end{cases},$$

Con questa scelta degli ingressi si ottiene

$$\begin{aligned} \dot{W}(\bar{q}, \bar{v}, \omega) &= \dot{V}(\bar{q}) + (\bar{v} - \Gamma_{\bar{v}})\bar{\tau}_v - K_{bv}(\bar{v} - \Gamma_{\bar{v}})^2 + (\omega - \Gamma_\omega)\bar{\tau}_\omega - K_{b\omega}(\omega - \Gamma_\omega)^2 = \\ &= -\rho^2\cos\beta\bar{v} + (\phi + \lambda\beta)\sin\beta\bar{v} - \lambda\beta\omega + (\bar{v} - \cos\beta)\bar{\tau}_v + \\ &\left(\omega - \frac{(\phi + \lambda\beta)}{\lambda}\frac{\sin\beta}{\beta}\cos\beta - \beta\right)\bar{\tau}_\omega - K_{bv}(\bar{v} - \Gamma_{\bar{v}})^2 - K_{b\omega}(\omega - \Gamma_\omega)^2 \end{aligned}$$

Scegliendo $\bar{\tau}_v = -(\phi + \lambda\beta)\sin\beta$ e $\bar{\tau}_\omega = \lambda\beta$ si ottiene

$$\begin{aligned} \dot{W}(\bar{q}, \bar{v}, \omega) &= -\rho^2\cos\beta\bar{v} - \lambda\beta\omega + (\phi + \lambda\beta)\sin\beta\cos\beta + \\ &\left(\omega - \frac{(\phi + \lambda\beta)}{\lambda}\frac{\sin\beta}{\beta}\cos\beta - \beta\right)\bar{\tau}_\omega - K_{bv}(\bar{v} - \Gamma_{\bar{v}})^2 - K_{b\omega}(\omega - \Gamma_\omega)^2 = \\ &- \rho^2\cos\beta\bar{v} - \lambda\beta^2 - K_{bv}(\bar{v} - \Gamma_{\bar{v}})^2 - K_{b\omega}(\omega - \Gamma_\omega)^2 \end{aligned}$$

dove nell'ultima uguaglianza si è scelto $\bar{\tau}_\omega = \lambda\beta$. È possibile notare come si sia ottenuta la stessa derivata direzionale del caso cinematico con l'aggiunta del termine di backstepping.

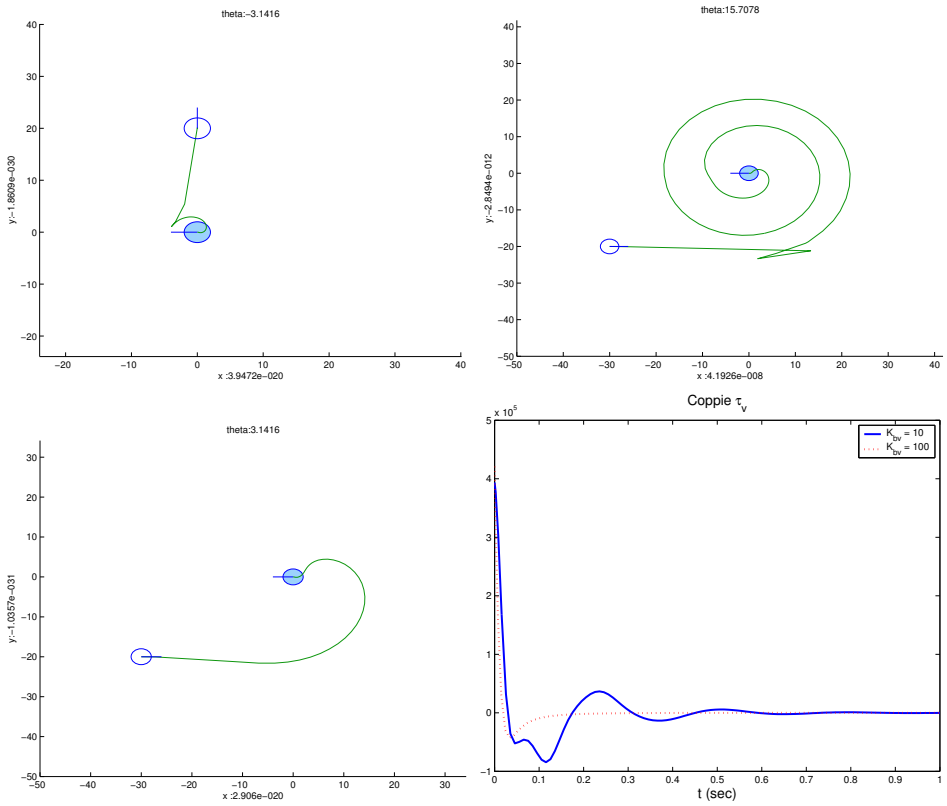


Figure 3.5: Risultati della simulazione per la stabilizzazione dell'uniciclo su un punto utilizzando il modello dinamico con massa del veicolo $m = 10$Kg e momento di inerzia $I_z = 1$Kgm^2.

Per una verifica pratica dei risultati ottenuti con la teoria di Lyapunov ed il backstepping, il controllore è stato implementato e simulato con `Simulink`. Come nel caso cinematico, si fissi la costante di guadagno $\lambda = 1/2$ e la condizione iniziale $q_0 = [x_0, y_0, \theta_0, v, \omega]^T = [0,\ 20,\ \frac{\pi}{2},\ 10,\ 0]$. Nel caso di controllo sul modello dinamico è necessario fissare il valore delle costanti di backstepping, mediandole tra velocità di inseguimento e spesa per il controllo. Si fissi perciò $K_{bv} = 10$ e $K_{b\omega} = 100$. Siano $m = 10$ e $I_z = 1$ rispettivamente la massa ed il momento di inerzia del veicolo. Con le scelte elencate è possibile ottenere i risultati riportati in figura 3.5, in alto a sinistra.

Nel secondo esempio la posizione iniziale del veicolo è $q_0 = [x_0, y_0, \theta_0]^T = [-30,\ -20,\ 0,\ 0,\ -1]^T$ (figura 3.5, in alto a destra).

Per valutare l'influenza della costante di guadagno di backstepping sulla convergenza del veicolo, si osservi nella fig. 3.5 in basso a sinistra l'effetto della

scelta $K_{bv} = 100$ sulle stesse condizioni iniziali dell'esempio precedente. La rapida convergenza del modello dinamico sul riferimento cinematico produce una traiettoria molto diversa dalla spirale ottenuta nell'esempio precedente. Si osserva in questo esempio come il controllo cinematico sia effettivamente influenzato dal controllore dinamico, in virtù della chiusura della retroazione sulle variabili effettive.

Infine, nel grafico in basso a destra della figura 3.5 si può osservare che l'aumento della costante di guadagno di backstepping, oltre al miglioramento della convergenza, porta anche ovviamente ad un aumento della coppia τ_{bv} richiesta agli attuatori.

Chapter 4

Adaptive and Learning Control

In the previous chapters, we have seen how the application of controllers heavily based on the model can lead to significant problems in the case where the model is known only with approximation, generating trajectory tracking errors and potentially instability. This could be remedied in part with the application of robust control techniques, which may have limitations related to the excessive authority of the required control.

On the other hand, one can think that the collection of information on the difference between the expected evolution of the estimated dynamic model and the true one of the corresponding system can be used to improve the estimate itself. In this chapter we will introduce the possibility of learning from the errors made and updating the estimate of the controller parameters during the execution of the control itself, i.e., to use control schemes described as *adaptive* or *learning*.

4.1 Kinematic Control with Uncertain Geometric Parameters

4.1.1 Control with Uncertain Kinematics

Consider a kinematic control problem for position or trajectory tracking when some of the geometric parameters defining the robot's geometry are unknown. Let p be a vector of unknown parameters (such as link lengths or angles between axes), and let $\widehat{p}$ be an estimate of these parameters.

Let $\xi = Q(q, p)$ represent the kinematic map between the joint variables and those of the end-effector. Assume that, for every value of the parameters, this map is invertible (thus excluding, for simplicity, singularities and redundancies). Under these assumptions, the tracking error $e = \xi_d(t) - \xi$

fully characterizes the configurations of the arm.

In the case of perfect knowledge of the parameters, the inverse kinematic control law derived from the Newton-Raphson method (or CLIK) is written as $\dot{q} = J^{-1}(q,p)\,(\dot{\xi}_d + K_e e)$, with K_e positive definite, rendering the error dynamics $\dot{e} = \dot{\xi}_d(t) - J\dot{q} = -K_e e$ globally asymptotically stable.

If only an estimate of the kinematic parameters, or some of them, is known, an approximation of this control scheme can be written using an estimated Jacobian $\widehat{J} = J(q,\widehat{p})$ in the form

$$\dot{q} = \widehat{J}^{-1}(\dot{\xi}_d + K_e e). \tag{4.1}$$

Note explicitly that the positioning error of the end-effector $e(q,p,t)$ can no longer be evaluated through joint angle measurements if the parameters p are unknown; it can only be assessed if an absolute measurement of the end-effector's posture is available (which is possible with widely available 3D measurement systems today, such as motion capture equipment).

Now, suppose the unknown parameters can be combined and grouped into a certain number of (possibly nonlinear) functions $\pi(p)$, so that in the differential kinematics, these functions can be separated from those of q, $\dot{q}$, and the known parameters, and can be rewritten in a form linear with respect to $\pi(p)$, that is

$$\dot{\xi} = J(q,\pi)\dot{q} = Y(q,\dot{q})\pi. \tag{4.2}$$

The matrix $Y(q,\dot{q})$ is called the "regressor" of the problem. Thanks to this property, the error dynamics can be written as

$$\dot{e} = \dot{\xi}_d - Y\pi = \dot{\xi}_d - \widehat{J}\dot{q} + \widehat{J}\dot{q} = \dot{\xi}_d - \widehat{J}\dot{q} - Y\widetilde{\pi},$$

where, for brevity, $\widehat{J} = J(q,\hat{p})$ and $\widehat{\pi} = \pi(\hat{p})$, while $\widetilde{\pi} = \pi - \widehat{\pi}$ denotes the estimation error. Substituting the approximate CLIK control law (4.1) into this expression, we have

$$\dot{e} = -K_e e - Y\widetilde{\pi}. \tag{4.3}$$

Now, suppose we can update the parameter estimate $\widehat{\pi}(t)$ over time, learning from the observed errors to improve the estimates and reduce the errors until they are minimized. The dynamics of the estimates and those of the errors are generally interdependent, so the resulting system has states $(e,\widehat{\pi})$.

To find the update law for the estimate $\dot{\widehat{\pi}}(t)$, we can proceed by proposing a candidate function

$$V = \frac{1}{2}e^T e + \frac{1}{2}\widetilde{\pi}^T R\widetilde{\pi}, \tag{4.4}$$

which is positive definite provided R is chosen to be positive definite.

Differentiating this candidate (4.4) with respect to time, we have

$$\dot{V} = -e^T(Y\widetilde{\pi} + K_e e) + \widetilde{\pi}^T R\dot{\widetilde{\pi}}.$$

Recalling that the true geometric parameters are constant and therefore $\dot{\widetilde{\pi}} = -\dot{\widehat{\pi}}$, and choosing the update law for the estimate in the form

$$\dot{\widehat{\pi}} = -R^{-1}Y^T e, \tag{4.5}$$

we obtain

$$\dot{V} = -e^T K_e e.$$

Note that, in light of (4.1), the dependence of $Y(q, \dot{q})$ on $\dot{q}$ in the update law (4.5) should be viewed as a dependence on $e, \widehat{\pi}, \dot{\xi}_d(t)$. Therefore, for trajectory tracking with $\dot{\xi}_d(t) \neq 0$, this dynamics is time-varying.

In the coordinates $(e, \widetilde{\pi})$, both V and $\dot{V}$ are time-invariant. Applying LaSalle's theorem in the case of posture control, or Barbalat's lemma in the case of trajectory tracking, we conclude that $\lim_{t\to\infty} \dot{V} = 0$, which implies $\lim_{t\to\infty} e = 0$, thus achieving the goal of asymptotic convergence to the desired trajectory.

Regarding the estimation of kinematic parameters, we can certainly state that $\widehat{\pi}(t)$ tends to a constant value $\bar{\widehat{\pi}}$ (in fact, its derivative (4.5) becomes zero for $e = 0$). However, we cannot generally conclude about the convergence of the estimates to the true value π. From (4.3), we have that, once convergence to $e = 0$ is achieved, the estimation error may not be zero if

$$Y(q_d(t), \dot{q}_d(t))(\pi - \bar{\widehat{\pi}}) \equiv 0,$$

where q_d is the solution of the inverse kinematics $\xi_d = Q(q_d)$. From this relation, it follows that the specific choice of the trajectory to be followed directly influences the ability of the estimation algorithm to converge to the true parameter values. If a correct estimation of the parameters is desired, it is advisable to choose a desired trajectory $\xi_d(t)$ for which there does not exist any non-trivial value of $\widetilde{\pi}$ that can identically cancel it over time (i.e., there is no intersection of the null spaces of $Y(q_d(t), \dot{q}_d(t))$ as t varies). Desired trajectories that allow the estimates to converge to the parameters are called *sufficiently rich* or *persistently exciting*.

Once π is correctly estimated, to find the original parameters p, it remains to invert the functions $\pi(p)$. Note that sometimes, to write the linear form (4.2), it may be useful to overparameterize $\pi(p)$ (which consequently would not be invertible), thus foregoing the possibility of estimating p but still ensuring trajectory tracking.

Example 1. Let us consider the planar serial manipulator with two degrees of freedom, shown in Figure 4.1. Let $\xi = [x \;\; y]^T$ be the position of the end-effector with respect to a reference frame centered at the base of the robot, and $q = [q_1 \;\; q_2]^T$ the vector of joint variables. Let a_1 and a_2 be the lengths of the two links of the manipulator.

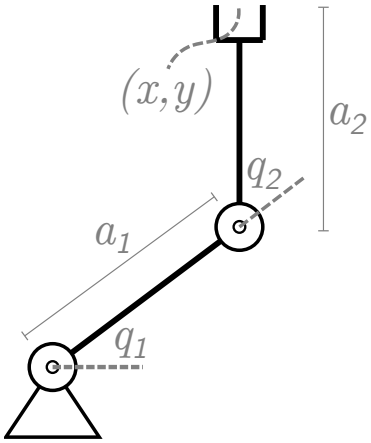


Figure 4.1: Planar serial manipulator with two revolute joints.

The forward kinematics of point ξ is given by

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{\xi} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 C_1 + a_2 C_{12} \\ a_1 S_1 + a_2 S_{12} \end{bmatrix}}_{Q(q)}, \tag{4.6}$$

where the conventional notation $C_{ij} = \cos(q_i + q_j)$ etc. is used. The Jacobian is

$$J = \begin{bmatrix} -a_2 S_{12} - a_1 S_1 & -a_2 S_{12} \\ a_2 C_{12} + a_1 C_1 & a_2 C_{12} \end{bmatrix}. \tag{4.7}$$

By choosing $\pi = [a_1 \;\; a_2]^T$, the differential kinematics can be rewritten in the form $J(q)\dot{q} = Y(q, \dot{q})\pi$ with

$$Y = \begin{bmatrix} -S_1 \dot{q}_1 & -S_{12}\dot{q}_1 - S_{12}\dot{q}_2 \\ C_1 \dot{q}_1 & C_{12}\dot{q}_1 + C_{12}\dot{q}_2 \end{bmatrix}. \tag{4.8}$$

Now, consider the trajectory control problem for the manipulator's end-effector in the case where only an initial estimate $\hat{\pi}_0$ of the robot's geometric parameters is known. Assume further that two trajectories $\xi_d^1(t)$ and $\xi_d^2(t)$

are given for controlling the end-effector:

$$\xi_d^1(t) = \begin{bmatrix} A\cos(\omega t) + x_0 \\ A\sin(\omega t) + y_0 \end{bmatrix}; \tag{4.9}$$

$$\xi_d^2(t) = \begin{bmatrix} A\sin(at + \delta) + x_0 \\ B\sin(bt) + y_0 \end{bmatrix}. \tag{4.10}$$

The first represents a circular trajectory centered at $p_0 = [x_0 \;\; y_0]^T$, with amplitude A and angular velocity ω. The second is a more complex Lissajous trajectory. The parameters A and B vary the curve amplitude in the x and y directions, respectively. Meanwhile, a, b, and δ represent the frequencies and phase shift of the two sinusoidal components of the curve.

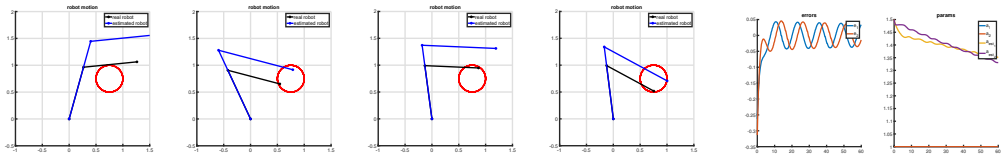
Using the technique of adaptive kinematic control, it is possible to achieve trajectory tracking even with uncertainty in the geometric parameters. The control law $u = \hat{J}^{-1}(\dot{\xi}_d + K_e e)$ is used, where $\hat{J}$ is the analytical Jacobian calculated using the parameter estimate. The trajectory tracking results for the planar RR robot, along with the respective plots of tracking error and parameter estimate convergence, are shown in Figures 4.2, 4.3, 4.4, and 4.5. The actual link lengths are $a_1 = 1$ and $a_2 = 1$. The trajectory ξ_d^1 is circular with center at $(x_0, y_0) = (0.75, 0.75)$ and amplitude $A = 0.25$. The angular velocity is $\omega = 0.5$. The trajectory ξ_d^2 is Lissajous-shaped, centered at $(x_0, y_0) = (0.75, 0.75)$ with parameters $A = 0.5$, $B = 0.5$, $a = 1$, $b = 2$, and $\delta = \pi/2$.

Note that the convergence speed of the tracking error depends strongly on the gain K_e. A high value of this gain ensures fast trajectory achievement (Figure 4.3 and 4.4). On the other hand, the parameter estimate depends on the presence of the tracking error, as $\dot{\hat{\pi}} = -Y^T e$. Thus, excessively fast convergence of the error negatively affects the convergence of the geometric parameter estimate error (Figures 4.3 and 4.4). Furthermore, it can be observed that a richer and more *exciting* trajectory, like the Lissajous trajectory, allows the convergence of the parameter estimate (Figure 4.5) unlike a simpler trajectory like a circle (Figure 4.2).

◇

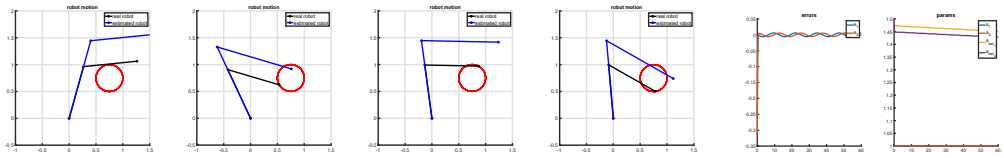
4.2 Controllo Dinamico con Parametri Inerziali Incerti

Passiamo adesso a considerare il controllo dinamico di manipolatori con parametri incerti. La dinamica dei sistemi lagrangiani non vincolati dipende



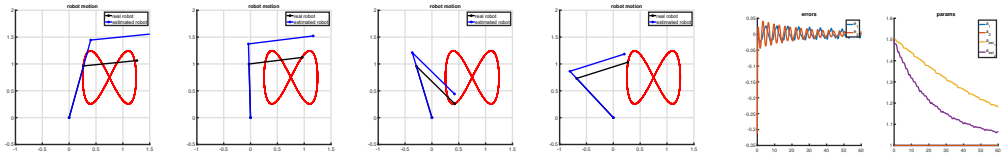
(a) $t = 0s$. (b) $t = 20s$. (c) $t = 40s$. (d) $t = 60s$. (e) Errors e and $\tilde{\pi}$.

Figure 4.2: Adaptive control of the RR on ξ_d^1 with $K_e = I$.



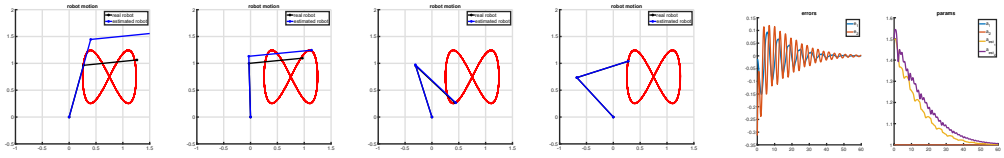
(a) $t = 0s$. (b) $t = 20s$. (c) $t = 40s$. (d) $t = 60s$. (e) Errors e and $\tilde{\pi}$.

Figure 4.3: Adaptive control of the RR on ξ_d^1 with $K_e = 10I$.



(a) $t = 0s$. (b) $t = 20s$. (c) $t = 40s$. (d) $t = 60s$. (e) Errors e and $\tilde{\pi}$.

Figure 4.4: Adaptive control of the RR on ξ_d^2 with $K_e = 10I$.



(a) $t = 0s$. (b) $t = 20s$. (c) $t = 40s$. (d) $t = 60s$. (e) Errors e and $\tilde{\pi}$.

Figure 4.5: Adaptive control of the RR on ξ_d^2 with $K_e = I$.

da un certo numero di parametri noti p_k (ad esempio, i parametri geometrici di Denavit-Hartenberg) e da un certo numero di parametri incogniti p_u (ad esempio masse, posizioni dei baricentri, momenti di inerzia dei corpi, etc.), e

può essere scritta esplicitando il ruolo di questi parametri nella forma

$$M(q, p_k, p_u)\ddot{q} + C(q, \dot{q}, p_k, p_u)\dot{q} + G(q, p_k, p_u) = D(q, \dot{q}, \ddot{q}, p_k, p_u) = \tau$$

Supponiamo adesso che sia possibile raggruppare i parametri non noti p_u in un vettore $\pi_u(p_u)$ i cui elementi sono funzioni anche non lineari dei parametri non noti, e rispetto ai quali la dinamica può essere scritta in modo lineare. In altre parole, supponiamo che si possano separare completamente i parametri non noti da tutte le altre variabili coinvolte nella dinamica e raccolte nella matrice di regressione $Y(\cdot)$, cioè

$$D(q, \dot{q}, \ddot{q}, p_k, p_u) = Y(q, \dot{q}, \ddot{q}, p_k)\, \pi_u(p_u).$$

In questo caso, potremo anche scrivere

$$D(q, \dot{q}, \ddot{q}, p_k, \widehat{p}_u) = Y(q, \dot{q}, \ddot{q}, p_k)\, \pi_u(\widehat{p}_u)$$

dove $\widehat{p}_u$ è il valore stimato dei parametri incogniti. Per semplicitá di notazione, scriveremo d'ora in poi π per $\pi_u(p_u)$, $\pi_u(\widehat{p}_u) = \widehat{\pi}$ e $\widetilde{\pi} = \pi - \widehat{\pi}$. Ipotizzeremo anche che il valore vero di $\pi_u = \pi$ sia incognito, ma costante (o lentamente variabile), ovvero $\dot{\pi}_u = 0$.

L'aggiornamento della stima dei parametri dinamici usati dal controllore durante l'esecuzione del controllo stesso avverrá mediante una legge di aggiornamento, che modelliamo come un processo continuo e rappresentiamo con l'equazione

$$\dot{\widehat{\pi}} = u_\pi.$$

4.2.1 Controllo a Coppia Calcolata Adattivo

Si consideri ancora il controllo a coppia calcolata basato su modello approssimato nella forma

$$\tau = \widehat{M}(q)\left(\ddot{q}_d + K_v\dot{e} + K_p e\right) + \widehat{C}(q, \dot{q})\dot{q} + \widehat{G}(q) \tag{4.11}$$

e ricordiamo la corrispondente forma (3.13) assunta dalla dinamica

$$\widehat{M}\left(\ddot{e} + K_v\dot{e} + K_p e\right) = \widetilde{M}\ddot{q} + \widetilde{C}\dot{q} + \widetilde{G}.$$

Usando il regressore dinamico $Y(q, \dot{q}, \ddot{q}, p_k)$ nella dinamica con controllo a coppia calcolata reale si ha quindi

$$\ddot{e}+K_v\dot{e}+K_p e = -\widehat{M}(q)^{-1}\left(Y(q, \dot{q}, \ddot{q})\widehat{\pi}_D - Y(q, \dot{q}, \ddot{q})\pi_D\right) = \widehat{M}(q)^{-1}Y(q, \dot{q}, \ddot{q})\widetilde{\pi}_D \tag{4.12}$$

dove si è di nuovo supposta l'invertibilità della stima $\widehat{M}(q)$ della matrice dinamica (calcolabile a partire da $\widehat{\pi}_D$)

Il sistema complessivo (dinamica del sistema lagrangiano con controllore a coppia calcolata + dinamica di aggiornamento dello stimatore) può essere descritta da uno stato composto dalle variabili di errore $(e, \dot{e}, \widetilde{\pi}_D)$, che desidereremmo far convergere a zero. Usando ancora la notazione $x = (e, \dot{e})^T$, possiamo scrivere la dinamica complessiva nella forma

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & A_d x + B_d \widehat{M}(q)^{-1} Y(q, \dot{q}, \ddot{q}) \widetilde{\pi}_D \\ \dot{\widetilde{\pi}}_D & = & -u_\pi, \end{array} \right. \tag{4.13}$$

dove A_d, B_d sono come in (3.21), e si è usata l'ipotesi che i parametri dinamici reali π_D siano ignoti ma costanti, ovvero $\dot{\pi}_D = 0$. Si noti che nel sistema (4.13) i termini in $q = q_d(t) - e$ introducono una tempo-varianza della dinamica. Per questo sistema scegliamo la candidata di Lyapunov di controllo

$$V(x, \widetilde{\pi}_D) = \frac{1}{2} x^T P x + \frac{1}{2} \widetilde{\pi}_D^T R \widetilde{\pi}_D,$$

che è positiva definita nello stato $(e, \dot{e}, \tilde{\pi}_D)$. Sappiamo che la matrice A_d nel sistema (4.13) è asintoticamente stabile, e possiamo risolvere quindi l'equazione di Lyapunov $A_d^T P + P A_d = -Q$ per qualsiasi $Q > 0$. Derivando quindi la candidata di Lyapunov lungo le traiettorie del sistema si ha

$$\begin{array}{rcl} \dot{V}(t) & = & \frac{1}{2} \dot{x}^T P x + \frac{1}{2} x^T P \dot{x} - \widetilde{\pi}_D^T R u_\pi \\ & = & \frac{1}{2} x^T \left(A_d^T P + P A_d \right) x + \widetilde{\pi}_D^T \left(Y^T(q, \dot{q}, \ddot{q}) \widehat{M}^{-T}(q) B_d^T P x - R u_\pi \right) \\ & = & -\frac{1}{2} x^T Q x + \widetilde{\pi}_D^T \left(Y^T(q, \dot{q}, \ddot{q}) \widehat{M}^{-T}(q) B_d^T P x - R u_\pi \right). \end{array} \tag{4.14}$$

A questo punto si nota che scegliendo per le stime dei parametri la legge di aggiornamento

$$u_\pi = \dot{\widehat{\pi}}_D = R^{-1} Y^T(q, \dot{q}, \ddot{q}) \widehat{M}^{-T}(q) B_d^T P x \tag{4.15}$$

la (4.14) diventa

$$\dot{V}(t) = -\frac{1}{2} x^T Q x,$$

che è semidefinita negativa uniformemente. La tempo-invarianza di $\dot{V}$ permette di applicare direttamente il teorema di Lasalle-Yoshizawa[1]), dal quale

[1]si veda ad es. J. T. Spooner, M. Maggiore, R. Ordonez, and K. M. Passino. Stable Adaptive Control and Estimation for Nonlinear Systems- Neural and Fuzzy Approximator Techniques. John Wiley & Sons, New York, NY, 2002. Una versione didattica nel capitolo dedicato alla Stabilitá delle dispense dell'autore per Fondamenti di Automatica - II Parte

si ottiene che il sistema tende all'insieme in cui $\dot{V}$ si annulla, ovvero a $e = 0$ e $\dot{e} = 0$. Nulla peraltro é garantito riguardo la convergenza a zero dell'errore di stima $\widetilde{\pi}_D$.

Il controllo descritto in questa sezione, introdotto da John Craig[2] nella sua tesi di dottorato, ha grande valore storico in quanto è stato il primo metodo adattivo applicato alla robotica, e perché ha introdotto alcune tecniche usate in tutte le versioni successive. Il metodo peraltro è affetto da alcuni importanti problemi:

- nella legge di aggiornamento delle stime dei parametri (4.15) si utilizza l'inversa della matrice di inerzia stimata $\widehat{M}(q)$, che — a differenza della reale matrice di inerzia $M(q)$ — non è sempre garantito che sia invertibile o che lo sia con condizionamento sufficiente;

- Nella stessa legge (4.15), per il calcolo del regressore $Y(q, \dot{q}, \ddot{q})$ è necessario disporre di una misura o di una buona stima della accelerazione dei giunti $\ddot{q}$, il che non è spesso possibile.

4.2.2 Adaptive Backstepping Control

The "best effort" approximation of the backstepping control law (3.30) is

$$\tau = \widehat{M}(q)\ddot{q}_r + \widehat{C}(q, \dot{q})\dot{q}_r + \widehat{G}(q) + K_d s + J^T e. \tag{4.16}$$

It can be noticed that the control law can be rewritten in terms of the dynamic regressor as

$$\tau = Y(q, \dot{q}, \dot{q}_r, \ddot{q}_r)\widehat{\pi} + K_d s + J^T e, \tag{4.17}$$

where the different roles of $\dot{q}$ and $\dot{q}_r$ are explicited.

The dynamics of the Lagrangian system becomes connected to the parameter update dynamics, so that stability and convergence must be studied in a larger state space, comprised of configurations q, velocities $\dot{q}$, and estimates $\widehat{\pi}$.

Letting $\widetilde{\pi} = \pi - \widehat{\pi}$ denote the estimate error, let us choose $(e, s, \widetilde{\pi})$ as coordinates for this state space, and propose a candidate Lyapunov function

$$\begin{aligned} W_\pi(e, s, \widetilde{\pi}, t) &= W(e, s, t) + \tfrac{1}{2}\widetilde{\pi}^T R \widetilde{\pi} \\ &= \tfrac{1}{2}e^T e + \tfrac{1}{2}s^T M s + \tfrac{1}{2}\widetilde{\pi}^T R \widetilde{\pi}, \end{aligned} \tag{4.18}$$

[2] John J. Craig. Adaptive Control of Mechanical Manipulators. Addison Wesley, 1988

where R is a symmetric positive definite design matrix. For constant unknown parameters one has $\dot{\widetilde{\pi}} = -u_\pi$ and, following a similar derivation as in section 3.2.3, we get

$$\begin{aligned}\dot{W}_\pi &= -e^T\Lambda e - s^T K_d s + s^T\left(\widetilde{M}\ddot{q}_r + \widetilde{C}\dot{q}_r + \widetilde{G}\right) - \widetilde{\pi}^T R u_\pi \\ &= -e^T\Lambda e - s^T K_d s + s^T Y(q,\dot{q},\dot{q}_r,\ddot{q}_r)\widetilde{\pi} - \widetilde{\pi}^T R u_\pi.\end{aligned}$$

Hence, choosing the update law as

$$\dot{\widehat{\pi}} = u_\pi = R^{-1}Y^T(q,\dot{q},\dot{q}_r,\ddot{q}_r)s, \tag{4.19}$$

it holds

$$\dot{W}_\pi = -s^T K_d s - e^T\Lambda e. \tag{4.20}$$

Being W_π again bounded by two functions in class $\mathcal{K}_\infty$, and $\dot{W}_\pi$ being only negative semi-definite in the $(e, s, \widetilde{\pi})$ state space, from Lyapunov theorem we can only infer uniform stability of the origin.

To have a stronger result of convergence, some further analysis is necessary. Indeed, straightforward application of LaSalle's invariance principle is not warranted, because the system and W_π are time-varying. However, $\dot{W}_\pi$ is time-invariant in our case, hence the LaSalle-Yoshizawa theorem allows us to conclude in this case that $\lim_{t\to\infty}\dot{W}_\pi(e,s,\widetilde{\pi}) = 0$. From this and (4.20) we get $\lim_{t\to\infty} e(t) = 0$, hence $\lim_{t\to\infty}\xi(t) = \xi_d(t)$, as wished.

A few remarks are in order.

- No conclusion can be drawn on the convergence of parameter estimates, as it was to be expected. Indeed, we only know that $\lim_{t\to\infty} s = 0$, hence $\lim_{t\to\infty}\dot{\widehat{\pi}} = 0$, and $\widehat{\pi}$ converges to a constant value $\bar{\pi}$;

- The update law (4.19) can be computed based only on the knowledge of the structure (and known parameters δ) of the dynamic regressor $Y(\cdot,\cdot,\cdot,\delta)$, of the reference $\xi_d(t)$ with its derivatives, and on the real-time measurement of the configuration q and of its velocity $\dot{q}$, but *not* of the acceleration $\ddot{q}$. Indeed, it should be observed that $\ddot{q}_r = J^{-1}\left(\ddot{\xi}_d + \Lambda\dot{e}\right) + \dot{J}^{-1}\left(\dot{\xi}_d + \Lambda e\right)$

- The adaptive backstepping method for Lagrangian systems does not require the computation of the inverse of the estimated dynamics matrix $\widehat{M}$, which was instead used in the adaptive computed-torque control, with problems ensuing from the matrix not being guaranteed to exist;

- An example of a vector π for which the regressor form of the Lagrangian dynamics can be written, is the set of inertial parameters (masses, first and second moments of inertia) of a serial linkage robot arm. The method applies however in more general cases as well.

- as an instance of a generalized form of regressor, consider a simple model of Coulomb frition at the joint as

$$\tau_f = \mu_s \text{ sign } (\dot{q}) + \mu_v \dot{q}$$

  to be added to the dynamics. By adding two columns in the regressor for the two functions of $\dot{q}$, and the two coefficients of friction μ_s, μ_v in the unknown parameter vector, the friction can be approximately compensated;

- wherever both kinematic and dynamic parameters are uncertain, the kinematic and dynamic adaptive controllers can be merged in a single architecture, relying on the backstepping method of systematically extending the control Lyapunov function (this is left for exercise).

4.2.3 Li-Slotine Adaptive Controller

The adaptive controller derived from back-stepping described in section 4.2.2 can be regarded as a generalization of a method originally proposed in 1987 by Li and Slotine, who did not use backstepping but reached similar results.

Considering the case that $q_d(t)$ is directly given, Li and Slotine introduced the definitions of *reference velocity* $\dot{q}_r = \dot{q}_d + \Lambda e$ and of $s = \dot{q}_r - \dot{q} = \dot{e} + \Lambda e$, and based their derivations on the non-negative function

$$W_{LS}(s, \widetilde{\pi}, t) = \frac{1}{2} s^T M(q) s + \frac{1}{2} \widetilde{\pi}^T R \widetilde{\pi}.$$

which differs from W_p in (4.18) only for the term $\frac{1}{2} e^T e$.

By computing $\dot{W}_{LS}$ and through similar derivations as reported in section 4.2.2, it is shown that, with the choice of the parameter update law

$$\dot{\widehat{\pi}} = R^{-1} Y^T(q, \dot{q}, \dot{q}_r, \ddot{q}_r) s$$

and of the control law

$$\tau = \widehat{M}(q)\ddot{q}_r + \widehat{C}(q, \dot{q})\dot{q}_r + \widehat{G}(q) + K_d s = Y(q, \dot{q}, \ddot{q}_r, \dot{q}_r)\widehat{\pi} + K_d s$$

(which differs from (4.16) only for the lack of a term for the error e), it is obtained

$$\dot{W}_{LS}(t) = -s^T K_d s.$$

The original prooof by Li and Slotine follows using ingenuous "Lyapunov-like" arguments. Indeed, it should be observed that $W_{LS}(s, \widetilde{\pi})$ is not only time-varying , but it is not even positive definite in the $(e, s, \widetilde{\pi})$ state space. An argument using Barbalat Lemma is thus necessary to show convergence of $(e, \dot{e}) \to (0, 0)$):

- **Barbalat Lemma**: For a differentiable scalar function $V(t)$ which satisfies

$$\begin{cases} V(t) \geq 0 \\ \dot{V}(t) \leq 0 \\ \left|\ddot{V}(t)\right| \leq M \end{cases} \tag{4.21}$$

  it holds $\lim_{t\to\infty} \dot{V}(t) = 0$.

Notice that the third condition in Barbalat Lemma ensures uniform continuity of $\dot{V}(t)$.

For Li-Slotine's function, $\ddot{W}_{LS}(t)$ is lower bounded. Indeed

$$\ddot{W}_{LS}(t) = -2s^T K_d \dot{s} = -2(\dot{e} + \Lambda e)^T K_d(\ddot{e} + \Lambda \dot{e}),$$

and it can be shown that $(e, \dot{e}, \ddot{e})$ are bounded. Hence, $\dot{W}_{LS} \to 0$, hence $s(t) \to 0$ as $t \to \infty$, which implies that $\dot{e} + \Lambda e \to 0$ and eventually $e(t) \to 0$.

The Li-Slotine method thus guarantees asymptotic trajectory tracking. The dicussion of the possible convergence of the parameter estimates to the real values is the same as that reported above.

In conclusion, the backstepping-based adaptive controller presented in section 4.2.2 is very close to the adaptive controller originally proposed by Li and Slotine. The backstepping method however enjoys a more systematic derivation, and a straightforward proof of global asymptotic convergence to the desired trajectory.

4.2.4 Convergenza della stima dei parametri

Si é visto che nessuno degli schemi adattivi studiati garantisce la convergenza dei parametri stimati a quelli veri. In tutti i casi, il valore della stima converge ad un valore costante, che é raggiunto quando l'errore di inseguimento della traiettoria desiderata é annullato, e quando di conseguenza si ha che le leggi di aggiornamento dei parametri si annullano $u_\pi = 0$.

Supponendo che, dopo un tempo T sufficientemente lungo, la condizione $e = \dot{e} = 0$ sia raggiunta, si ha $q(t) \equiv q_d(t)$. Sostituendo queste relazioni nelle equazioni della dinamica del manipolatore con i diversi controllori adattivi visti, si ottiene in ogni caso la relazione

$$Y(q_d(t), \dot{q}_d(t), \ddot{q}_d)\overline{\widetilde{\pi}_d} = 0. \tag{4.22}$$

Questa relazione non è sufficiente a costringere l'errore di stima a regime $\overline{\widetilde{\pi}}_d$ ad assumere valore nullo, perché in effetti consente all'errore di assumere qualsiasi valore costante purché appartenga al kernel del regressore $Y(q_d(t), \dot{q}_d(t), \ddot{q}_d(t))$

per ogni t. Si ricordi che il regressore ha tante righe (n) quanti sono i giunti, e tante colonne (p) quanti sono i valori incogniti in π_d, tipicamente con un kernel di grandi dimensioni ($p >> n$). D'altronde, ad ogni istante t il kernel del regressore può cambiare, se $q_d(t)$ non è banale, e la soluzione di regime deve appartenere alla intersezione di tutti gli infiniti kernel del regressore nel tempo. È quindi possibile che tale intersezione possa ridursi nel tempo a sottospazi di dimensione sempre più piccola: se l'intersezione raggiungesse dimensione zero, e la mantenesse sufficientemente a lungo, la convergenza di $\widetilde{\pi}_d$ a 0 verrebbe assicurata.

Per caratterizzare i casi in cui questa convergenza può verificarsi, è utile procedere come segue. Consideriamo un tempo T sufficientemente lungo dopo il quale la convergenza dell'errore a zero possa considerarsi conclusa, ed un orizzonte temporale di stima pari a Δ. Moltiplicando la (4.22) per $Y^T(q_d, \dot{q}_d, \ddot{q}_d)$ e integrandola nell'intervallo $[T, T+\Delta]$ si ottiene

$$\int_T^{T+\Delta} Y^T(q_d, \dot{q}_d, \ddot{q}_d) Y(q_d, \dot{q}_d, \ddot{q}_d) dt \, \bar{\widetilde{\pi}}_d = 0$$

che ha come unica soluzione $\bar{\widetilde{\pi}}_d = 0$ se e solo se la matrice quadrata

$$\Sigma = \int_T^{T+\Delta} Y^T(q_d, \dot{q}_d, \ddot{q}_d) Y(q_d, \dot{q}_d, \ddot{q}_d) dt \tag{4.23}$$

ha rango pieno. In questo caso si dice che la traiettoria $q_d(t)$ sull'intervallo considerato $t \in [T, T+\Delta]$ "eccita sufficientemente" la dinamica dell'errore di stima tanto da permettere la convergenza della stima al valore corretto in un tempo Δ dopo che la traiettoria desiderata è stata raggiunta.

Così come la mancata invertibilità della matrice Σ indica la impossibilità di identificare qualche parametro in π_d, un suo piccolo valore singolare implica una cattiva identificabilità. Poiché la matrice Σ dipende dalla traiettoria $q_d(t)$, è quindi pensabile di scegliere traiettorie desiderate che massimizzino la capacità identificativa dell'algoritmo, ad esempio massimizzandone il minimo valore singolare[3].

4.2.5 Adaptative Backstepping Control for Dynamic Path Tracking with a Unicycle

Suppose now that the value of the inertial parameter I_z is not known, and only an estimate is available. Consider the dynamics of the unicycle (3.48)

[3] come in tutti i casi in cui si discutono le norme delle applicazioni lineari, si deve tenere conto anche del condizionamento e della possibile scalatura delle variabili in gioco, che è opportuno normalizzare e adimensionalizzare.

reduced to the line tracking problem where the velocity $\hat{v}(t)$ is considered a given, i.e.

$$\begin{cases} \dot{y} &= \hat{v}(t)\sin(\theta) \\ \dot{\theta} &= \omega \\ \dot{\omega} &= \frac{1}{I_z}\tau_\theta. \end{cases} \tag{4.24}$$

It can be observed that the dynamics depend on the unknown parameter $p = I_z$, and can be written linearly in $\pi = 1/I_z$. We let $\widehat{\pi} = 1/\widehat{I}_z$ and $\widetilde{\pi} = \pi - \widehat{\pi} = \frac{\widehat{I}_z - I_z}{I_z \widehat{I}_z}$[4].

Introduce the candidate Lyapunov function

$$W_\pi(y,\, \theta,\, \omega,\, \widetilde{\pi}) = W(q,\, \omega) + \frac{1}{2}R\widetilde{\pi}^2 \tag{4.25}$$

where $W(q,\, \omega)$ as defined in (3.53) is the original candidate Lyapunov function for the backstepping control.

From (3.54), the time derivative of $W_\pi(y,\, \theta,\, \omega,\, \widetilde{\pi})$ is

$$\dot{W}_\pi(y,\, \theta,\, \omega,\, \widetilde{\pi}) = y\widehat{v}(t)\sin\theta + \theta\omega + (\omega - \Gamma_\omega)(\frac{\tau_\theta}{I_z} - \dot{\Gamma}_\omega) + R\widetilde{\pi}\dot{\widetilde{\pi}} \tag{4.26}$$

By adding and subtracting the quantity $\theta\Gamma_\omega$ and by the equality $y\widehat{v}(t)\sin\theta + \theta\Gamma_\omega = -K_\theta\theta^2$ (see (3.51)) we obtain

$$\begin{aligned} \dot{W}_\pi(y,\, \theta,\, \omega,\, \widetilde{\pi}) &= -K_\theta\theta^2 + \theta(\omega - \Gamma_\omega) + (\omega - \Gamma_\omega)(\frac{\tau_\theta}{I_z} - \dot{\Gamma}_\omega) - R\widetilde{\pi}u_\pi = \\ &= -K_\theta\theta^2 + (\omega - \Gamma_\omega)(\theta + \frac{\tau_\theta}{I_z} - \dot{\Gamma}_\omega) - R\widetilde{\pi}u_\pi. \end{aligned}$$

Introducing the best-effort control $\tau_\theta = \widehat{I}_z\left(\dot{\Gamma}_\omega - K_b(\omega - \Gamma_\omega) - \theta\right)$ we have

$$\begin{aligned} \dot{W}_\pi &= -K_\theta\theta^2 + (\omega - \Gamma_\omega)\left(\theta + \frac{\widehat{I}_z}{I_z}\left(\dot{\Gamma}_\omega - K_b(\omega - \Gamma_\omega) - \theta\right) - \dot{\Gamma}_\omega\right) - R\widetilde{\pi}u_\pi = \\ &= -K_\theta\theta^2 - \frac{\widehat{I}_z}{I_z}K_b(\omega - \Gamma_\omega)^2 + (\omega - \Gamma_\omega)(\theta - \dot{\Gamma}_\omega)\left(1 - \frac{\widehat{I}_z}{I_z}\right) - R\widetilde{\pi}u_\pi = \\ &= -K_\theta\theta^2 - \frac{\widehat{I}_z}{I_z}K_b(\omega - \Gamma_\omega)^2 - (\omega - \Gamma_\omega)(\theta - \dot{\Gamma}_\omega)\widetilde{\pi}\widehat{I}_z - R\widetilde{\pi}u_\pi. \end{aligned}$$

[4] In this derivation, we assume $\hat{v}(t)$ to be known. It can be noted that this parameter enters linearly the kinematic equations, hence an adaptive controller could be designed for $\hat{v}$ constant or slowly varying. Thisis left as an advanced exercise for the student

By adding and subtracting $K_b(\omega - \Gamma_\omega)^2$ we have

$$\dot{W}_\pi = -K_\theta \theta^2 - K_b(\omega - \Gamma_\omega)^2 + K_b(\omega - \Gamma_\omega)^2 \widetilde{\pi} \widehat{I}_z - (\omega - \Gamma_\omega)(\theta - \dot{\Gamma}_\omega)\widetilde{\pi}\widehat{I}_z - R\widetilde{\pi} u_\pi.$$

Hence, choosing the parameter update law

$$u_\pi = R^{-1}\widehat{I}_z \left(K_b(\omega - \Gamma_\omega)^2 - (\omega - \Gamma_\omega)(\theta - \dot{\Gamma}_\omega) \right), \tag{4.27}$$

we finally obtain

$$\dot{W}_\pi(y,\, \theta,\, \omega,\, \widetilde{\pi}) = -K_\theta \theta^2 - K_b(\omega - \Gamma_\omega)^2$$

which is semi negative definite. As in previous cases, the asymptotic convergence to zero path following error can be shown to hold, while $\widehat{I}_z$ will reach a constant value, not necessarily equal to the true value I_z.

Chapter 5

Introduzione ai Sistemi Intrinsecamente Nonlineari

I sistemi reali, salvo rare eccezioni, sono sistemi non lineari. Le tecniche di studio e progetto dei sistemi di controllo studiate nei corsi elementari sono invece prevalentemente basate sullo studio di sistemi lineari.

La teoria dei controlli lineari è di enorme importanza perchè molti sistemi reali, in normale operazione attorno a condizioni nominali di equilibrio o di moto regolato, sono ben approssimabili per linearizzazione. Gli strumenti offerti da questa teoria sono così potenti da poter trattare la discrepanza dal modello lineare dando comunque sufficienti garanzie di buon funzionamento. Inoltre, la teoria lineare è la base e spesso il paradigma della teoria del controllo non lineare, che affronteremo in questa parte del corso.

Nella trattazione di sistemi non lineari si usa distinguere due diverse situazioni:

1. Si parla di **non linearità accidentali** per quei fenomeni che sono sostanzialmente perturbazioni quantitative del comportamento di un sistema dinamico che rimane peraltro qualitativamente simile a quello della sua approssimazione lineare;

2. Si dicono invece **non linearità intrinseche** quelle caratteristiche non lineari dei sistemi la cui sostituzione con una approssimazione lineare altera qualitativamente le proprietà strutturali del sistema.

I sistemi interessati da non linearitá accidentali vengono trattati per lo più con tecniche di controllo lineare robusto. Un esempio di questo tipo è la estensione del criterio di stabilità di Nyquist al caso di nonlinearitá statiche nelle componenti dell'anello di reazione, mediante opportuna modifica del

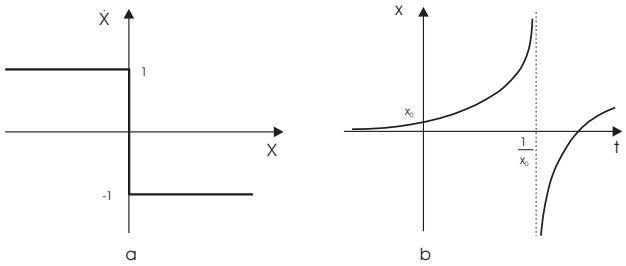


Figure 5.1: Due esempi di comportamenti peculiari dei sistemi nonlineari

criterio di non circondamento né attraversamento del punto critico con la introduzione di un cerchio critico di raggio opportuno.

Lo studio delle varie ed importanti tecniche di controllo robusto non verrà affrontato in queste note. Si tratteranno invece le nonlinearità intrinseche, ed alcuni metodi per la analisi e il controllo di sistemi nonlineari — in particolare, sistemi meccanici utilizzati in Robotica — che non si basano su approssimazioni lineari.

5.1 Esistenza e unicità delle soluzioni

Mentre in un sistema dinamico lineare del tipo $\dot{x} = Ax + Bu$, $x(t_0) = x_0$ la esistenza ed unicità di soluzioni $x(x_0, u(\cdot), t) \in C^1$ (ovvero di funzioni continue e differenziabili con continuità soddisfacenti le condizioni iniziali) è ovvia, lo stesso non è vero per i sistemi nonlineari del tipo $\dot{x} = f(x, u)$. Si consideri ad esempio il sistema $\dot{x} = -sign(x)$, $x(0) = 0$, con

$$-sign(x) = \begin{cases} -1 & x \geq 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x < 0 \end{cases}$$

(vedi fig. 5.1-a) per il quale non esiste nessuna soluzione (perlomeno nel senso classico, ovvero C^1).

Una condizione sufficiente per l'esistenza delle soluzioni di equazioni differenziali ordinarie del primo ordine è data dal seguente noto

Teorema 5.1.1 (Peano). *Sia $f(x, t)$ una funzione continua su un sottoinsieme aperto $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, allora per l'equazione differenziale di primo ordine $\dot{x} = f(x, t)$ con valore iniziale $x(t_0) = x_0$, $(x_0, t_o) \in D$ esiste una soluzione $x(x_0, t)$ definita su tutto un intorno di t_0.*

La condizione è verificata per il sistema $\dot{x} = \sqrt{|x|}$ con condizioni iniziali $x(0) = 0$, per il quale si hanno due soluzioni $x(t) \equiv 0$ e $x(t) = \frac{t^2}{4}$.

Analogamente, per $\dot{x} = \sqrt[3]{x}$, $x(0) = 0$ si hanno tre soluzioni $x(t) \equiv 0$ e $x(t) = \pm\sqrt[2]{\left(\frac{2t}{3}\right)^3}$.

Per avere esistenza e unicità sono necessarie condizioni più stringenti:

Teorema 5.1.2 (Cauchy-Lipschitz)**.** *Sia $f(x,t)$ una funzione continua e Lipschitziana in x e t su un sottoinsieme aperto $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, allora per l'equazione differenziale di primo ordine $\dot{x} = f(x,t)$ con valore iniziale $x(t_0) = x_0$, $(x_0, t_o) \in D$ esiste un'unica soluzione $x(x_0, t)$ definita su tutto un intorno di t_0.*

Ad esempio, il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 \\ x(0) = x_0 \end{cases} .$$

verifica le condizioni del teorema, ed ha una soluzione unica

$$x(x_o, t) = \frac{-x_0}{x_0 t - 1}$$

definita per tempi vicini al tempo iniziale $t = 0$. Si osservi però che la soluzione diverge a infinito in un tempo finito $t_f = \frac{1}{x_0}$ (vedi fig. 5.1-b).

5.2 Proprietà strutturali e nonlinearità intrinseche.

Si dicono proprietà strutturali di un sistema quelle proprietà che non vengono alterate dalla particolare rappresentazione di stato utilizzata. Sono quindi proprietà strutturali per un sistema la stabilità e la stabilizzabilità di un equilibrio, la raggiungibilità e la controllabilità, l'osservabilità e la detettabilità.

Dato un sistema non lineare nella forma

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(t,x,u), \ x(0) = x_0 \\ y &= h(x,t,u) \end{aligned}$$

e, supponendo che abbia un equilibrio in $\bar{x}$ con ingresso $\bar{u}$, se ne consideri la approssimazione lineare

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= A\tilde{x} + B\tilde{u} \\ \tilde{y} &= C\tilde{x} + D\tilde{u} \ , \end{aligned}$$

dove $\tilde{x} = x - \bar{x}$, $\tilde{u} = u - \bar{u}$, $\tilde{y} = y - h(\bar{x}, \bar{u})$, e

$$A = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=\bar{x},u=\bar{u}} \quad B = \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{x=\bar{x},u=\bar{u}}$$

$$C = \left.\frac{\partial h}{\partial x}\right|_{x=\bar{x},u=\bar{u}} \quad D = \left.\frac{\partial h}{\partial u}\right|_{x=\bar{x},u=\bar{u}}$$

5.2.1 Stabilità

Ricordiamo le relazioni tra la stabilità di un equilibrio $\bar{x}$ di un sistema non lineare $\dot{x} = f(x)$, e quella della sua approssimazione lineare $\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x}$ attorno all'equilibrio stesso:

- se $\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x}$ è asintoticamente stabile (AS), allora $\bar{x}$ è un equilibrio localmente AS per $\dot{x} = f(x)$;
- se $\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x}$ ha almeno un modo esponenzialmente divergente, allora l'equilibrio in $\bar{x}$ è instabile per $\dot{x} = f(x)$;

In questi casi, la proprietà strutturale della stabilità è mantenuta.

Se però $\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x}$ non è esponenzialmente divergente, ma ha autovalori a parte reale nulla, la proprietà di stabilità può venire alterata.

Esempio 1. Si consideri un sistema massa molla smorzatore non lineare

$$m\ddot{y} + b\dot{y}^3 + ky^3 = f.$$

La sua approssimazione lineare nell'equilibrio ($f = 0, y = \dot{y} = 0$) ha matrice dinamica

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Il sistema lineare corrispondente è quindi instabile, con un modo polinomialmente divergente. Il sistema nonlineare invece è asintoticamente stabile, come facilmente verificato dalla funzione di Lyapunov

$$V = \frac{1}{4}ky^4 + \frac{1}{2}(\dot{y})^2.$$

◇

5.2.2 Stabilizzabilità

Un sistema $\dot{x} = f(x, u)$ è detto stabilizzabile se esiste una legge di retroazione degli stati $u = u(x)$ tale che il sistema autonomo $\dot{x} = f(x, u(x))$ sia asintoticamente stabile.

È noto dalla teoria dei sistemi che per un sistema lineare esiste una matrice K di retroazione $u = Kx$ che rende tutti i poli di $A + BK$ a parte reale negativa se e solo se tutti gli autovalori di A a parte reale non negativa sono interni al sottospazio di raggiungibilità. Questo accade se per la decomposizione di Kalman

$$\begin{pmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix} u$$

gli autovalori della matrice A_{22} sono a parte reale negativa.

Teorema 5.2.1. *Se l' approssimazione lineare di un sistema $\dot{x} = f(x, u)$ è stabilizzabile, allora anche il sistema originale lo è mediante la stessa legge $u(x) = Kx$.*

Questo risultato segue direttamente dalla applicazione dei teoremi di Lyapunov al sistema $\dot{x} = f(x, -Kx)$.

Teorema 5.2.2. *Se il linearizzato è non stabilizzabile a causa della presenza di un autovalore a parte reale positiva in A_{22} $\Rightarrow$ anche il sistema non lineare è non stabilizzabile.*

Se A_{22} ha uno o piú autovalori a parte reale nulla, può esservi non linearità intrinseca.

Ad esempio, si consideri il sistema non lineare

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 u \\ \dot{x}_2 &= -x_2 u \end{aligned}$$

che, con $\bar{u} = 0$, ha equilibrio indifferente. Nel punto $\bar{x}_0$, il modello linearizzato $\tilde{x} = A\tilde{x} + Bu$,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad B = -\begin{pmatrix} \bar{x}_{1,0} \\ \bar{x}_{2,0} \end{pmatrix},$$

ha un autovalore esterno al sottospazio di raggiungibilità nell'origine, quindi non è stabilizzabile. Peraltro, il sistema di partenza può essere facilmente stabilizzato con $u = cost > 0$. La linearizzazione ha quindi distrutto la proprietà strutturale di stabilizzabilità del sistema.

5.2.3 Raggiungibilità

Un sistema $\dot{x} = f(x, u)$ si dice completamente raggiungibile se, per qualsiasi coppia di stati x_0 e x_f, è possibile trovare una legge di controllo $u(t),\ t \in [0, T]$ su un intervallo di temporale di lunghezza T tale che il sistema evolva dalla condizione iniziale $x(0) = x_0$ a $x(T) = x_f$.

Un sistema si dice completamente controllabile (all'origine) se raggiungibile con x_f fissata nell'origine. In tempo continuo le proprietà di raggiungibilità e quelle di controllabilità sono equivalenti. I due termini saranno usati interscambiabilmente in questo contesto.

Per il sistema lineare tempo invariante

$$\dot{x} = Ax + Bu, \qquad x \in \mathcal{R}^n$$

la proprietà di completa raggiungibilità è equivalente alla condizione rank $R = n$, dove

$$R = [B \,|\, AB \,|\, A^2B \,|\, \cdots \,|\, A^{n-1}B].$$

Per sistemi nonlineari, la raggiungibilità della approssimazione lineare in un equilibrio consente di affermare la raggiungibilità *locale* del sistema originale, dove per locale si intende che lo stato x_f può essere arbitrario purché sufficientemente vicino a x_0. Infatti, un criterio sufficiente di raggiungibilità locale per un sistema nonlineare è dato dal seguente Teorema.

Teorema 5.2.3. *Sia dato il sistema*

$$\dot{x} = f(x, u)$$

con equilibrio nell'origine. Se la approssimazione lineare $\dot{x} = Ax + Bu$ è completamente raggiungibile, allora esiste un intorno dell'origine tale per cui, per ogni punto x_f dell'intorno e per ogni T, esiste un controllo $u(t), t \in [0, T]$ tale per cui $x(0, u(\cdot), T) = x_f$.

Si può quindi dire che la completa raggiungibilità dell' approssimazione lineare implica la raggiungibilità locale del sistema originale, ma non è vero il viceversa. È possibile infatti che la approssimazione lineare di un sistema nonlineare raggiungibile non sia raggiungibile.

Esempio 2. Si consideri ad esempio il veicolo di tipo uniciclo (fig. 5.2) nella configurazione $q = (x\, y\, \theta)$, ed il suo modello cinematico

$$\begin{cases} \dot{x} = \cos(\theta)\ v \\ \dot{y} = \sin(\theta)\ v \\ \dot{\theta} = \omega \end{cases} \tag{5.1}$$

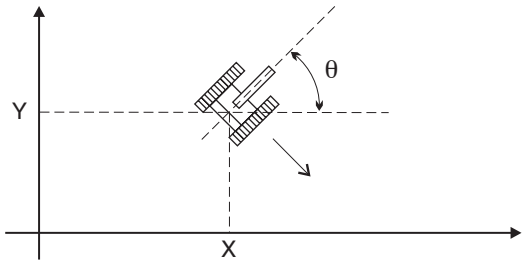


Figure 5.2: Modello "uniciclo" di veicolo su ruote

Si noti che ogni configurazione $\overline{q}$ è di equilibrio con ingressi nulli. Il linearizzato in $\overline{q}$ è dato da

$$A = \left.\frac{\partial f}{\partial q}\right|_{\substack{q=\overline{q}\\ u=0}} = 0 \ ; \ B = \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{\substack{q=\overline{q}\\ u=0}} = \begin{bmatrix} \cos(\overline{\theta}) & 0 \\ \sin(\overline{\theta}) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Il sistema $\dot{z} = Bu$ non è completamente raggiungibile, infatti il sottospazio di raggiungibilità $\mathcal{R} = \text{ span}\,[\ B \vdots AB \vdots A^2B\ ]$ ha dimensione 2. In particolare, qualunque stato che differisca dallo stato iniziale per una traslazione nella direzione dell'asse delle ruote, cioè lungo

$$\mathcal{R}^{\perp} = span \begin{pmatrix} -\sin(\overline{\theta}) \\ \cos(\overline{\theta}) \\ 0 \end{pmatrix}$$

risulta non raggiungibile per il modello linearizzato. D'altra parte, questa conclusione risulta intuitivamente falsa per il sistema originale, in quanto il veicolo può certamente essere condotto ad una qualunque configurazione con una semplice manovra consistente in una rotazione che dirige il veicolo verso la posizione desiderata, una traslazione della distanza necessaria, ed una rotazione finale di riallineamento. Si può concludere che in questo caso la linearizzazione ha distrutto la raggiungibibilità. ◇

5.2.4 Osservabilità

Un sistema $\dot{x} = f(x, u)$ con uscite $y = h(x, u)$ si dice osservabile se è possibile ricostruire lo stato ignoto x a partire dalla conoscenza delle uscite $y(t)$ in un intervallo temporale $t \in [0, T]$. Questa possibilità è garantita se non esistono

due stati diversi che possano generare le medesime uscite, che siano cioè *indistinguibili*.

Per il sistema lineare tempo invariante

$$\begin{array}{rcll} \dot{x} & = & Ax + Bu, & x \in \mathcal{R}^n \\ y & = & Cx + Du & \end{array}$$

la proprietà di completa osservabilità è equivalente alla condizione rank $O = n$, dove

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}.$$

Laddove invece la matrice di osservabilità O avesse uno spazio nullo, due punti che differissero solo per un vettore in quello spazio genererebbero uscite identiche, e sarebbero perciò indistinguibili.

Un criterio sufficiente di osservabilità locale per un sistema nonlineare è dato dal seguente Teorema.

Teorema 5.2.4. *Sia dato il sistema*

$$\begin{array}{rcl} \dot{x} & = & f(x, u) \\ y & = & h(x, u) \end{array}$$

con equilibrio nell'origine. Se la approssimazione lineare $\dot{x} = Ax + Bu$, $y = Cx + Du$ è completamente osservabile, allora in un intorno sufficientemente piccolo dell'origine non esiste alcun punto indistinguibile.

Si può quindi dire che la completa osservabilità dell'approssimazione lineare implica l'osservabilità locale del sistema originale. Anche in questo caso, non è vero il viceversa: per un sistema nonlineare osservabile è infatti possibile che la sua approssimazione lineare non lo sia.

Esempio 3. Si consideri ad esempio il problema di localizzare un veicolo mediante triangolazione con due traguardi ottici di posizione nota. In un sistema di riferimento la cui origine sia posta nel primo faro, e con l'asse y allineato al secondo, posto a distanza a (vedi fig. 5.3), le misure disponibili per la triangolazione sono gli angoli sotto i quali i traguardi sono visti rispetto alla direzione di avanzamento del veicolo, cioè

$$\begin{array}{rcl} \alpha_1 & = & \pi - \theta + \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \\ \alpha_2 & = & \pi - \theta + \arctan\left(\frac{y-a}{x}\right) \end{array}$$

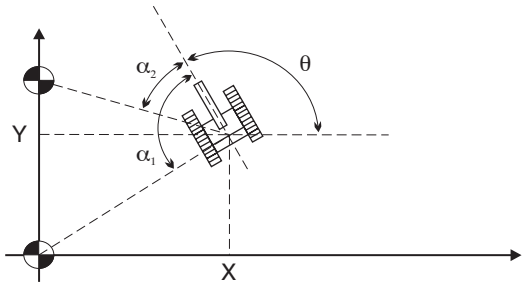


Figure 5.3: Rilevamento della configurazione mediante triangolazione

Supponendo che il veicolo sia descritto da un modello puramente cinematico e abbia libertà completa di movimento, la sua legge di moto è

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = Aq + Bu,$$

con $A = 0 \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ e $B = I \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Questa dinamica, assieme alla linearizzazione della equazione di uscita in un equilibrio $\bar{q}$,

$$\tilde{\alpha} = Cq, \quad C = \left. \begin{bmatrix} \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} & -1 \\ \frac{a-y}{x^2+(a-y)^2} & \frac{x}{x^2+(a-y)^2} & -1 \end{bmatrix} \right|_{q=\bar{q}}$$

Il sistema linearizzato non è completamente osservabile. Infatti, la matrice di osservabilità

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix}$$

ha rango 2, ed il sottospazio di inosservabilità ha dimensione uno. Si noti che, se il modello del veicolo fosse quello dell'esempio precedente (5.1), si avrebbe lo stesso risultato.

D'altra parte è noto (ad esempio dalla antica pratica della triangolazione per ottenere il punto nave) che è possibile ricostruire la posizione del veicolo e la sua orientazione a partire dalle due sole misure angolari. In questo caso, pertanto, appare che la linearizzazione ha distrutto la proprietà di osservabilità del sistema nonlineare. ◇

Chapter 6

Nonlinear Systems: a Survival Kit

As observed through several examples, nonlinear systems exhibit phenomena that are unknown to linear systems, and require a specialized study. This in turn calls for a new set of mathematical tools, which very often can be regarded as generalizations of concepts already met in the study of linear systems: for instance, the geometry of vector spaces and linear algebra have to be replaced by differential geometry of manifolds and Lie algebras.

Mathematics involved in nonlinear systems theory is less familiar to students, and can be definitely challenging. However, the main ideas needed to solve many problems in Robotics are simple, and can be explained using a set of mathematical tools that are easy to grab and exploit. In these notes, we will take a utilitaristic approach at the description of such tools, insisting more on the intuitive understanding of their meaning and functions, than on generality and thoroughness of arguments and proofs. The reader interested in a more complete and rigorous treatment of nonlinear systems theory is therefore referred to the abundant literature, among which we mention here the main references used to prepare these notes [1] [2] [3] [4] [5].

[1] Isidori, A. (1995). Nonlinear Control Systems, 3rd Ed., Springer Verlag.

[2] Marino, R., and Tomei, T. (1995). Nonlinear Control, Prentice-Hall.

[3] Nijmeyer, H., and Van der Schaft, A. (1990). Nonlinear Dynamical Control Systems, Springer Verlag.

[4] Sastry, S. (1999). Nonlinear Systems Analysis, Stability, and Control, Springer Verlag.

[5] Slotine, J.J.E., and Li, W. (1991). Applied Nonlinear Control, Prentice-Hall.

6.1 Description of the state space

We start considering a continuous–time, finite-state nonlinear system in its most general form

$$\begin{array}{rcl} \dot{x} & = & F(x,t,u) \\ y & = & h(x,t,u) \end{array} \tag{6.1}$$

and the slightly less general model (still practically ubiquitous in Robotics) of a time–invariant, strictly causal, affine–in–control nonlinear system

$$\begin{array}{rcl} \dot{x} & = & f(x) + g(x)u \\ y & = & h(x) \end{array} \tag{6.2}$$

Let us pause a second here to consider what are the variables considered in these equations. In a typical setting, it is assumed that the state variable x is an n-dimensional vector $x \in \mathbb{R}^n$, u is an m dimensional vector of inputs, and $y \in \mathbb{R}^p$ is a vector of outputs.

However, many mechanical systems, and robots in particular, are not generally described in these terms.

Example 1. Rotations. Consider the kinematic description of the rotations of an inertial body about a fixed point,

$$\dot{R} = \hat{\omega} R, \tag{6.3}$$

where $\omega \in \mathbb{R}^3$ is the angular velocity vector and $\hat{\omega}$ is the skew-symmetric matrix such that $\hat{\omega} v = \omega \wedge v$, $\forall v \in \mathbb{R}^3$. Considering the angular velocity as input and the orientation as state, this equation is in the form $\dot{p} = f(p,u)$, where however $p \in SO(3)$.

If dynamics are taken into consideration, then (6.3) has to be considered together with the Euler equation (in body-fixed coordinates)

$$J\dot{\omega} = \hat{\omega} J \omega + \tau, \tag{6.4}$$

with $J \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ the body inertia matrix, and τ the external applied torques. The full dynamic systems, comprised of (6.3) and (6.4), can be written again in the form $\dot{x} = f(x,u)$, where now $u = \tau \in \mathbb{R}^3$ and $x = (R,\omega) \in SO(3)\times\mathbb{R}^3$.

In neither case, hence, can the state be globally described in a linear space, because $SO(3)$ is not globally homeomorphic to $\mathbb{R}^3$. One could represent $R \in SO(3)$ as an element of the embedding space $\mathbb{R}^9$, but in this case the representation is redundant: indeed, there are six scalar constraints (described by $R^T R = I$, and the determination $\det R = 1$) that apply. Similarly for quaternions Q, which globally represent rotations in $\mathbb{R}^4$ under the

constraint $Q^T Q = 1$. Alternatively, orientations can be locally described by minimal representations in $\mathbb{R}^3$, for instance using sets of Euler angles. Different minimal representations may have singularities in different configurations, and one typically has to switch from one set of angles to another when the phenomenon under study approaches a singularity for the representation in use. $\diamond$

The example above motivates us to introduce a somewhat more general view on dynamical systems. We consider the configurations p of systems under study to live in a manifold M of dimension n, embedded in a space of dimension $N \geq n$. If there is a dynamic evolution of the system, then the trajectory is also constrained to belong to the manifold, i.e. $p(t) \in M$, $\forall t$. Hence, at each time t, the velocity of the system $\dot{p}(t)$ must belong to the tangent space to M at the point $p(t)$, which will be denoted as $T_{p(t)}M$.

For practical purposes relating to how computations are done, however, a description in linear state spaces such as those in (6.2) is very convenient. Under mild regularity assumptions, these can be obtained by establishing suitable coordinate systems to describe M (which might have to be only locally valid, as seen previosuly).

Let $p \in M$ and $U_M \subset M$ a neighborhood of p. Let $\phi(\cdot) : U_M \to U_x \subset \mathbb{R}^n$, $\phi(p) : p \mapsto x(p)$ be a homeomorphism (that is, a continuous bijection whose inverse is also continuous): then (U_M, ϕ) is called a *coordinate chart*. To cover

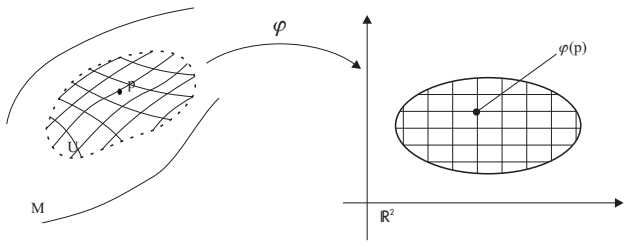


Figure 6.1: Coordinate chart on a manifold

configurations where the (U_M, ϕ) coordinate chart is not applicable, we may use other charts of the type (V_M, ψ), $\psi(\cdot) : V_M \to V_z \subset \mathbb{R}^n$, $\psi(p) : p \mapsto z(p)$. For all points in $U_M \cap V_M$, the diffeomorphism $\Phi = \psi \circ \phi^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\Phi(x) : x \mapsto z(x)$ is a *change of coordinates*. If $\Phi(\cdot)$ is indeed a diffeomorphism (i.e., the bijection and its inverse are both continuously differentiable infinitely many times, or *smooth*), than the two charts are said to be *compatible*. A manifold M equipped with an *atlas*, i.e. a collection of pairwise compatible charts which together can cover the whole M, is a *smooth manifold*.

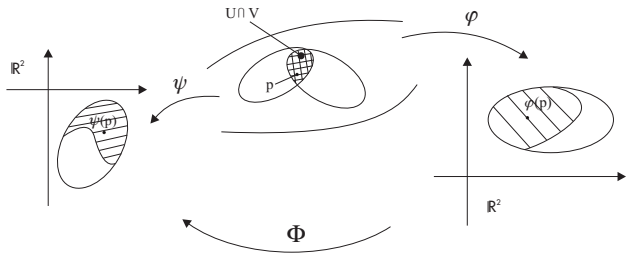


Figure 6.2: Multiple charts and coordinate changes

6.1.1 Coordinate changes and tangent spaces

Consider now how a vector $v_p \in T_pM$ (which, as observed, could represent the velocity $\dot{p}(t)$ of a point $p(t)$ constrained to belong to M) is represented when using local coordinates (U, φ). Observe that, properly speaking, the image of $v_p \in T_pM$ under the coordinate change $x = \varphi(p)$ is a new vector v_x in T_xU: being $U \subset \mathbb{R}^n$, T_xU is also (a copy of) $\mathbb{R}^n$, and it is sometimes confused. The map between tangent spaces is called the *adjoint map* of $\varphi(\cdot)$ and is denoted by $\varphi_*(\cdot) : T_pM \to T_xU$. One has that

$$v_x = \varphi_*(v_p) : v_p \mapsto \left.\frac{\partial \varphi(p)}{\partial p} v_p\right|_{p=\varphi^{-1}x}.$$

If two coordinate charts $(U_1, x = \varphi_1)$ and $(U_2, z = \varphi_2)$ are compatible through a coordinate change $z = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(x) = \Phi(x)$, then one has similarly

$$v_z = \Phi_*(v_x) : v_x \mapsto \left.\frac{\partial \Phi(x)}{\partial x} v_x\right|_{x=\Phi^{-1}(z)},$$

and the inverse relation

$$v_x = \Phi_*^{-1} v_z,$$

where $\Phi_*^{-1} = \left(\frac{\partial \Phi(z)}{\partial z}\right)^{-1}_{z=\Phi(x)}$ exists if Φ is indeed a difeomorphism.

Example 2. Coordinates on a sphere. Consider the description of the motion of a point on a spherical surface centered at the origin. Let $p \in \mathbb{R}^3$ describe the point, and let R be its fixed distance from the origin (fig. 6.4). In the notation introduced above, we have $p(t) \in M$, $M = \{p \in \mathbb{R}^3 \,|\, p^T p = R^2\}$.

Not being the sphere homeomorphic to the plane, no globally equivalent description can be expected in 2D. To give one such 2D description, we let for instance x_1 denote the longitude (azimuth) of p and x_2 its latitude (elevation)

with respect to the p_1, p_2 plane (fig. 6.3–a). A local coordinate chart is thus defined on $U_1 = [0, 2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, with $\varphi_1(\cdot) : M \setminus \{P_n, P_s\} \to U_1$

$$x = \varphi_1(p) = \begin{bmatrix} \arctan\left(\frac{p_2}{p_1}\right) \\ \arctan\left(\frac{p_3}{\sqrt{p_1^2+p_2^2}}\right) \end{bmatrix},$$

and $\varphi_1^{-1}(\cdot) : U_1 \to M$,

$$p = \varphi_1^{-1}(x) = \begin{bmatrix} \cos x_1 \ \cos x_2 \\ \sin x_1 \ \cos x_2 \\ \sin x_2 \end{bmatrix}$$

The chart is not defined at points where $p_1 = p_2 = 0$ (the north and south"poles" of the sphere when p_3 is considered as its axis).

Defining $z = (z_1, z_2)^T$ as the azimuth and elevation now with respect to the plane p_1, p_3 (fig. 6.3–b), a new coordinate chart can be defined on $U_2 = [0, 2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, with $\varphi_2(\cdot) : M \to U_2$,

$$z = \varphi_2(p) = \begin{bmatrix} \arctan\left(\frac{p_3}{p_1}\right) \\ \arctan\left(\frac{p_2}{\sqrt{p_1^2+p_3^2}}\right) \end{bmatrix}$$

and $\varphi_2^{-1} : U_2 \to M$,

$$p = \varphi_2^{-1}(z) = \begin{bmatrix} \cos z_1 \ \cos z_2 \\ \sin z_2 \\ \sin z_1 \ \cos z_2 \end{bmatrix}.$$

The second chart has singularity at the p_2 north and south poles only, hence the two charts together completely cover the sphere. A coordinate transform is defined between the charts in all points where both are defined as with $\Phi(\cdot) = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : U_1 \to U_2$,

$$\Phi(x) : \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \arctan\left(\frac{\sin x_2}{\cos x_1 \ \cos x_2}\right) \\ \arctan\left(\frac{\sin x_1 \cos x_2}{\sqrt{\cos^2 x_1 \cos^2 x_2 + \sin^2 x_2}}\right) \end{bmatrix}.$$

Analogously, $x = \Phi^{-1}(z)$ with $\Phi = \left(\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}\right)(z)$. Both $\Phi(\cdot)$ and $\Phi^{-1}(\cdot)$ are smooth, hence the two charts are compatible and form an atlas for the

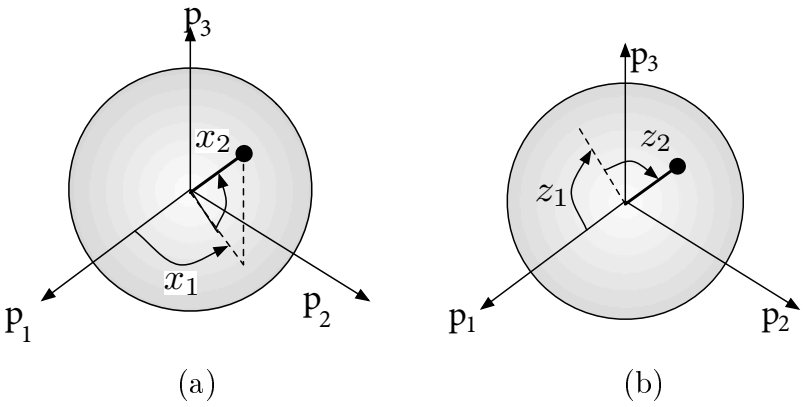


Figure 6.3: Local coordinate charts on a sphere.

sphere, which is a smooth manifold.

The computation of the adjoint maps are straightforward derivation exercises. For instance, one can write

$$
\begin{aligned}
v_x &= \varphi_{1*} v_p \\
&= \begin{bmatrix} -\frac{p_2}{p_1^2+p_2^2} & \frac{p_1}{p_1^2+p_2^2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{p_1^2+p_2^2}}{p_1^2+p_2^2+p_3^2} p_1 p_3 & -\frac{\sqrt{p_1^2+p_2^2}}{p_1^2+p_2^2+p_3^2} p_2 p_3 & -\frac{\sqrt{p_1^2+p_2^2}}{p_1^2+p_2^2+p_3^2} \end{bmatrix}_{p=\phi_1^{-1}(x)} v_p \\
&= \begin{bmatrix} -\frac{\sin x_1}{\cos x_2} & \frac{\cos x_1}{\cos x_2} & 0 \\ -\cos x_1 \sin x_2 \cos^2 x_2 & -\sin x_1 \sin x_2 \cos^2 x_2 & 1 \end{bmatrix} v_p
\end{aligned}
$$

◇

Example 3. Dynamics on the Sphere Dynamics on the sphere. We would now like to describe the motion of a point p at fixed distance R from the origin, when it has a mass m and is subject to gravity. The dynamic equations can be written, taking the constraint into account, as

$$
\begin{aligned}
M\ddot{p} + A^T(p)\lambda + G &= 0 \\
A(p)\ddot{p} + \dot{A}(p)\dot{p} &= 0,
\end{aligned}
$$

where $M = mI_3$, $A(p) = p^T$, and $G = [0, 0, -mg]^T$. Solving these equations in the lagrangian multipliers λ,

$$
\lambda = \frac{1}{R^2}\left(m\,\dot{p}^T\dot{p} - p^T G\right),
$$

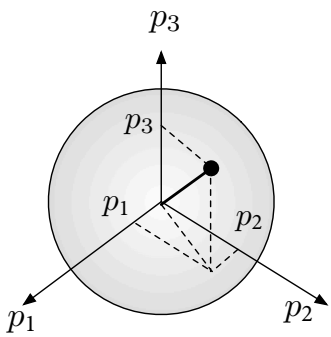


Figure 6.4: Point moving on a sphere.

from which

$$\ddot{p} = -\frac{\dot{p}^T \dot{p}}{R^2}\, p - \left[I_3 - \frac{p\, p^T}{R^2} \right] \frac{1}{m} G\,.$$

Hence, the dynamics can be described in the form (6.2) by a state $\xi \in \mathbb{R}^6$ with $\xi = (\xi_1, \xi_2) = (p, \dot{p})$ as

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_2 \\ -\frac{\xi_2^T \xi_2}{\xi_1^T \xi_1} \xi_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ \left(I_3 - \frac{\xi_1 \xi_1^T}{\xi_1^T \xi_1} \right) \frac{1}{m} F \end{bmatrix} u$$

where the gravity vector G has been replaced for generality by a force of direction F and intensity u. From the discussion above, it is to be expected that the evolution of this system will be actually confined in a lower dimensional manifold than $\mathbb{R}^6$ (namely, of of dimension 4). Although the description of the dynamics in the embedding linear space $\mathbb{R}^6$ is very convenient, equivalent descriptions in the coordinate charts (U_i, φ_i) introduced above can be easily obtained, which is left for exercise. $\diamond$

As an application of coordinate changes, consider the dynamic system

$$\dot{x}(t) = f(x) + g(x)u,\ \ x \in U_1 \subset \mathbb{R}^n,\ \ u \in \mathbb{R}^m$$

and the diffeomorphism $z = \Phi(x)$. In the new coordinates, the system becomes

$$\dot{z}(t) = \left(\frac{\partial \Phi(x)}{\partial x} \left(f(x) + g(x)u \right) \right) \Bigg|_{x = \Phi^{-1}(z(t))} = f'(z) + g'(z)u\,.$$

Coordinate changes play a crucial role in nonlinear system analysis, just as they do in linear systems. A first useful result from analysis is the following.

Theorem 2 (Rectification). *Let $f(x)$ be a smooth vector field on $\mathbb{R}^n$ and $f(0) \neq 0$. Then there exists a coordinate chart $(U \ni 0, z = \varphi)$ such that, on U, $f'(z)$ is a constant vector field.*

As a corollary, under the same conditions it is possible to choose coordinates such that $f'(z) = (1, 0, \ldots, 0)^T$, or any other constant vector in $\mathbb{R}^n$

Example 4. Rectification of control vector fields Consider a chart on a rail (fig. 6.5), and let $(x, y, \theta) = (x_1, x_2, x_3)$ denote its coordinates. The kinematic model is

$$\dot{x} = g(x)u = \begin{bmatrix} \cos x_3 \\ \sin x_3 \\ 0 \end{bmatrix} u\,,$$

Being $g(0) \neq 0$, there exists a coordinate change $z = \Phi(x)$ for which

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u.$$

To obtain it explicitly, we have to solve the set of partial differential equations

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} \cos x_3 + \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_2} \sin x_3 = 0\,, \\ \dot{z}_2 = \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_1} \cos x_3 + \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_2} \sin x_3 = 0\,, \\ \dot{z}_3 = \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_1} \cos x_3 + \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_2} \sin x_3 = 1\,, \end{cases}$$

together with the condition that $\phi(\cdot)$ is indeed a valid coordinate change, i.e. that $det\, \Phi_\star(0) \neq 0$. This is a system of Partial Differential Equations (PDEs), for which a solution in this case can be easily found as

$$\begin{aligned} z_1 &= \Phi_1(q) = x_3\,, \\ z_2 &= \Phi_2(q) = x_1 \sin x_3 - x_2 \cos x_3\,, \\ z_3 &= \Phi_3(q) = x_1 \cos x_3 + x_2 \sin x_3\,, \end{aligned}$$

as is easily verified by substitution

$$\begin{cases} \dot{z}_1 &= \dot{x}_3 = 0\,, \\ \dot{z}_2 &= x_1 \dot{x}_3 \cos x_3 + \dot{x}_1 \sin x_3 + x_2 \dot{x}_3 \sin x_3 - \dot{x}_2 \cos x_3 \\ &= \dot{x}_1 \sin x_3 - \dot{x}_2 \cos x_3 = 0\,, \\ \dot{z}_3 &= -x_1 \dot{x}_3 \sin x_3 + \dot{x}_1 \cos x_3 + x_2 \dot{x}_3 \cos x_3 + \dot{y} \sin x_3 \\ &= \dot{x}_1 \cos x_3 + \dot{x}_2 \sin x_3 = 1\,, \end{cases}.$$

The new variables have direct physical meaning, z_1 being the θ angle, z_2 the distance from the rail, and z_3 the abscissa along the rail (cf. fig. 6.5). $\diamond$

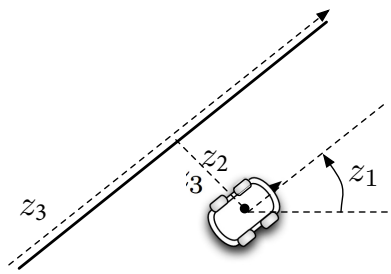


Figure 6.5: A cart on a rail.

The following result generalizes the rectification theorem to multiple vector fields.

Theorem 3 (Simultaneous Rectification). *Let $f_1(x), \ldots, f_r(x)$ be a set of $r < n$ vector fields on $\mathbb{R}^n$ which are linearly independent at $x = 0$. Then there exist a coordinate chart $(U \ni 0, z = \varphi(x))$ such that, on U, $f'_j(z)$, $j = 1, \ldots, r$ are constant independent vector fields if, and only if, the vector fields commute, i.e.*

$$\frac{\partial f_j(x)}{\partial x} f_i(x) = \frac{\partial f_i(x)}{\partial x} f_j(x), \; i, j = 1, \ldots, r. \tag{6.5}$$

Obviously, when the theorem holds it is also possible to choose coordinates such that $f'_i(z) = e_i$ (the i–th column of the identity matrix I_n).

Example 5. Simultaneous rectification. Consider a cart that can translate in two perpendicular directions, i.e.

$$\dot{x} = g_1(x)u_1 + g_2(x)u_2 = \begin{bmatrix} \cos x_3 \\ \sin x_3 \\ 0 \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} \sin x_3 \\ -\cos x_3 \\ 0 \end{bmatrix} u_2.$$

Being $\mathsf{rank}\,\big[g_1(0) g_2(0)\big] = 2$, we test

$$\frac{\partial g_2(x)}{\partial x} g_1(x) - \frac{\partial g_1(x)}{\partial x} g_2(x) = 0.$$

Hence simultaneous rectification is possible. Indeed, the same change of coordinates $\Phi(x)$ in the previous example yields

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_2.$$

The case of a unicycle is different:

$$\dot{x} = g_1(x)u_1 + g_3(x)u_2 = \begin{bmatrix} \cos x_3 \\ \sin x_3 \\ 0 \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_2.$$

Again $\mathsf{rank}\ \left[g_1(0)g_2(0)\right] = 2$, but

$$\frac{\partial g_2(x)}{\partial x} g_1(x) - \frac{\partial g_1(x)}{\partial x} g_2(x) = \begin{bmatrix} \sin x_3 \\ -\cos x_3 \\ 0 \end{bmatrix},$$

hence simultaneous rectification is not possible. ◇

6.2 Analysis tools

Considering again system (6.2)

$$\begin{array}{rcl} \dot{x} & = & f(x) + g(x)u \\ y & = & h(x), \end{array}$$

we are interested in studying its structural properties. For simplicity, we will restrict to the study of local properties, which can be studied through the tools of elementary analysis. Although not strictly neecssary, to simplify arguments we will often use the assumption that functions we deal with are *analytic* (or C^ω), i.e. their values in a domain containing a point p can be evaluated through their Taylor expansion in p — or, in other terms, all information on the function over the domain is contained in the derivatives of the function evaluated in p.

6.2.1 Functions, Vectors and Covectors

In the treatment of system (6.2), we will encounter three main objects:

- **Scalar functions of the state** of the type

$$\begin{array}{rcl} \lambda : M & \to & C^\omega \\ p & \mapsto & \lambda(p) \in \mathbb{R} \end{array},$$

  or, in coordinates $x = \varphi(p)$,

$$\begin{array}{rcl} \lambda : \mathbb{R}^n & \to & C^\omega \\ x & \mapsto & \lambda(x) \in \mathbb{R}\,. \end{array}$$

Examples of scalar functions of the state encountered in the study of robotic systems are i) an output function $h_i(x)$ in (6.2); ii) a holonomic constraint on the configurations q of the type $C(q)$, and iii) a candidate Lyapunov funtion $V(x)$.

- A **vector field** associates to a point in a manifold M a vector of the tangent space to M at p, T_pM, e.g.

$$\begin{array}{rcl} f : M & \to & TM \\ p & \mapsto & f(p) \end{array}$$

where $TM = \{(p, T_pM) | p \in M\}$ denotes the *tangent bundle* to M. If one thinks of differentiable functions on the manifold, $p(s) : \mathbb{R} \to M$, then the tangent bundle can be characterized as the space of all derivatives $\frac{dp(s)}{ds}$.

In coordinates $x = \varphi(p)$, a vector field is represented by a column vector of functions, e.g.

$$f : x \in \mathbb{R}^n \mapsto f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times 1}.$$

Notice that, although in coordinates the domain and codomain of vector fields are both $\mathbb{R}^n$, their nature is completely different[6]. A classical illustration of 2D vector fields is the "quiver plot" (fig. 6.6). In a dynamical system represented by the ordinary differential equation (ODE)

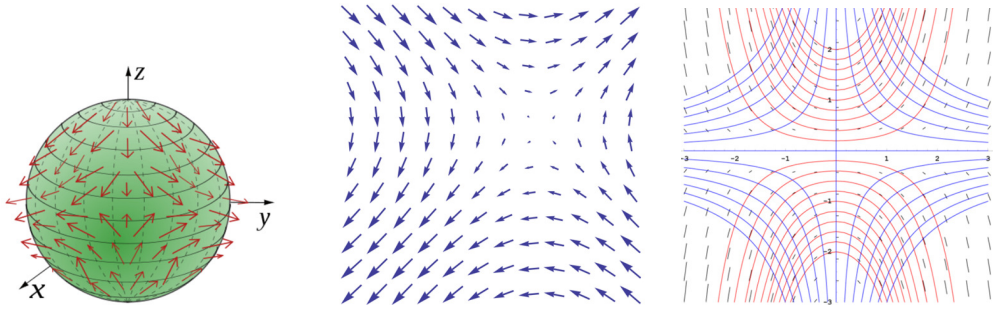
$$\dot{x} = f(x, \ x(0) = x_0,$$

the vector field $f(x)$ represents the velocity vector associated with the solution $x(x_0, t)$. The traditional graphical method of *isoclines* to depict solutions of 2D ODEs traces trajectories which are everywhere tangent to the $f(x)$ vector field (see fig. 6.6). In the dynamical system (6.2), the vector $f(x)$ is called the *drift* vector field, while the i–th column of $g(x)$, $g_i(x)$, is the *control* vector field associated to the i–th control u_i.

- A **covector field** (or *one-form*) associates to a point in a manifold M a covector of the cotangent space to M at p, T_p^*M, e.g.

$$\begin{array}{rcl} \omega : M & \to & T^*M \\ p & \mapsto & \omega(p) \end{array}$$

[6]If the domain is a set of points, the codomain is a set of velocities, hence vectors. Recall that differences of points are vectors, but the sum of a point and a vector has no physical sense.



(a) (b) (c)

Figure 6.6: Graphical representations of vector fields: (a) A vector field on the sphere $M = S^2$; (b) The vector field $f(x) = [\sin x_2, \sin x_1]^T$ on $\mathbb{R}^2$; (c) The method of isoclines on a 2D vector field (c), with vector field in black, isoclines in blue, and trajectories in red. *(Images from Wikipedia)*

where $T^*M = \{(p, T_p^*M) | p \in M\}$ denotes the cotangent bundle to M. The cotangent bundle can be described as the space of all applications that take a vector field and give a scalar function. The application is often denoted with $< \cdot, \cdot >: T^*M \times TM \to C^\omega$, $(\omega(p) \in T_p^*M, f(p) \in T_pM) \mapsto < \omega(p), f(p) > \in \mathbb{R}$.

In coordinates $x = \varphi(p)$, a covector field is represented by a row vector of functions, e.g.

$$\omega : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \omega(x) = \begin{bmatrix} \omega_1(x) & \cdots & \omega_n(x) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times n},$$

so that one can conveniently write

$$< \omega(x), f(x) >= \sum_{i=1}^{n} \omega_i(x) f_i(x) = \omega(x) f(x)$$

with the usual row-by-column product rule.

Examples of covector fields encountered in the study of robotic systems are i) the gradient (aka *differential*) of a scalar function $\lambda(x)$

$$d\lambda(x) \stackrel{def}{=} \frac{\partial \lambda(x)}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \lambda(x)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \lambda(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix},$$

and ii) a kinematic constraint on a system described by configurations $q \in \mathbb{R}^n$, e.g. $A(q) \in \mathbb{R}^{1\times n}$ with $A(q)\dot{q} = 0$.

6.2.2 Operations on Functions, Vectors and Covectors

It will be useful to describe how scalar, vector and covector functions vary along the trajectories followed by a system. Hence we define the following operators, representing the directional derivatives of the different objects along a vector field. For simplicity, we will only refer to descriptions in coordinates.

- The directional derivative of a scalar function $\lambda(x)$ along a vector field $f(x)$ is a scalar function denoted as $L_f\lambda(x)$ and defined as

$$L_f\lambda(x) = \mathrm{d}\lambda f(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} f_i(x)$$

- The directional derivative of a vector field $g(x)$ along a vector field $f(x)$ is a vector field denoted as $L_f\, g(x)$ and defined as

$$L_f\, g(x) = \frac{\partial g}{\partial x} f(x) - \frac{\partial f}{\partial x} g(x)\,.$$

  This operator is more often denoted as $[f(x), g(x)]$ and referred to as a the *Lie bracket* of f and g. The alternative notation $ad_f g(x)$ is also often used.

- The directional derivative of a covector field $\omega(x)$ along a vector field $f(x)$ is a covector field denoted as $L_f\omega(x)$ and defined as

$$L_f\omega = f^T \left[\frac{\partial \omega^T}{\partial x}\right]^T + \omega \frac{\partial f}{\partial x}\,.$$

The operators above have some notable properties, which can be easily verified directly as an exercise:

- All operators are linear in all their arguments: $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ it holds

$$\begin{aligned}
L_{\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2}\lambda(x) &= \alpha_1 L_{f_1}\lambda(x) + \alpha_2 L_{f_2}\lambda(x); && (6.6)\\
L_f\left(\alpha_1\lambda_1(x) + \alpha_2\lambda_2(x)\right) &= \alpha_1 L_f\lambda_1(x) + \alpha_2 L_f\lambda_2; && (6.7)\\
[\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, g_1] &= \alpha_1[f_1, g_1] + \alpha_2[f_2, g_1]; && (6.8)\\
[f_1, \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2] &= \alpha_1[f_1, g_1] + \alpha_2[f_1, g_2]; && (6.9)\\
L_{\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2}\omega(x) &= \alpha_1 L_{f_1}\omega(x) + \alpha_2 L_{f_2}\omega(x); && (6.10)\\
L_f\left(\alpha_1\omega_1(x) + \alpha_2\omega_2(x)\right) &= \alpha_1 L_f\omega_1(x) + \alpha_2 L_f\omega_2; && (6.11)
\end{aligned}$$

- The Lie bracket is anti-commutative:

$$[f, g] = -[g, f]; \tag{6.12}$$

- For second-order Lie brackets of three vector fields, the Jacobi identity holds:

$$[f, [g, h]] + [h, [f, g]] + [g, [h, f]] = 0; \tag{6.13}$$

- The differential of a Lie derivative and the Lie derivative of a differential commute:

$$L_f \, \mathrm{d}\lambda = d\, L_f \lambda; \tag{6.14}$$

- A Leibnitz-type formula applies

$$L_f(\omega(x)g(x)) = (L_f\omega(x))\, g(x) + \omega(x)[f(x), g(x)]; \tag{6.15}$$

- The Lie derivative of a covector field along a Lie bracket "distributes":

$$L_{[f,g]}\lambda(x) = L_f L_g \lambda(x) - L_g L_f \lambda(x) \tag{6.16}$$

Example 6. Linear fields. For $x \in \mathbb{R}^n$, let

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & Ax\ , \quad A \in \mathbb{R}^{n\times n} \\ g(x) & = & B\ , \quad B \in \mathbb{R}^{n\times 1} \\ h(x) & = & Cx\ , \quad C \in \mathbb{R}^{1\times n} \end{array}$$

one has

$$\begin{array}{rcl} [f, g] & = & \frac{\partial g}{\partial x} f - \frac{\partial f}{\partial x} g = -AB \\ \big[f, [f, g]\big] & = & A^2 B \\ ad_f^k g & = & (-1)^k A^k B,\ k > 0 \\ \mathrm{d}h & = & C \\ L_f\, \mathrm{d}h & = & f^T \left(\frac{\partial\, \mathrm{d}h^T}{\partial x}\right)^T + \mathrm{d}h \frac{\partial f)}{\partial x} = dL_f h = CA \\ L_f^k\, \mathrm{d}h & = & CA^k \end{array}$$

The Lie bracket of two linear vector fields is a linear vector field,

$$[Ax, Bx] = (BA - AB)x$$

which is null iff A and B commute. ◇

6.2.3 Distributions and Codistributions

Given a number d of vector fields $g_1(p), \cdots, g_d(p)$ in $p \in M$, let

$$\Delta_p = \mathsf{span}\ \left\{g_1(p), \cdots, g_d(p)\right\} \subset T_pM$$

denote the linear subspace spanned by their combinations. The collection of these subspaces $\Delta(p) = \{(p, \Delta_p) | p \in M\} \subset TM$ is called the *distribution* on M generated by the vector fields $g_i(p)$.

In coordinates, one writes

$$\Delta(x) = \mathsf{span}\ \left\{g_1(x), \cdots, g_d(x)\right\} = \mathcal{R}_c\left(G(x)\right),$$

where $\mathcal{R}_c\left(G(x)\right)$ denotes the column range (or column space, or left image) of the matrix whose columns are the vector fields. Explicitly,

$$\begin{aligned}\Delta(x) &= \mathcal{R}_c\left(G(x)\right) = \mathcal{R}_c\Big(\left[g_1(x), \cdots, g_m(x)\right]\Big) \\ &= \left\{\left(x, g(x)\right) \in TM \ \Big|\ g(x) = \textstyle\sum_{i=1}^d \alpha_i(x) g_i(x),\ \alpha_i(x) \in C^\omega,\ i = 1, \ldots, d\right\}\end{aligned}$$

Analogously, given r covector fields $\omega_1(p), \cdots, \omega_r(p)$ in $p \in M$, define

$$\Omega_p = \mathsf{span}\ \left\{\omega_1(p), \cdots, \omega_r(p)\right\} \subseteq T_p^*M$$

as the linear subspace spanned by their combinations. The collection of these subspaces $\Omega(p) = \{(p, \Omega_p) | p \in M\} \subset T^*M$ is the *codistribution* on M generated by the covector fields $\omega_i(p)$. In coordinates, one has

$$\Omega(x) = \mathsf{span}\ \left\{\omega_1(x), \cdots, \omega_r(x)\right\} = \mathcal{R}_r\left(O(x)\right),$$

where $\mathcal{R}_r\left(O(x)\right)$ denotes the row range (or row space, or right image) of the matrix whose rows are the covector fields. Explicitly,

$$\begin{aligned}\Omega(x) &= \mathcal{R}_r\left(O(x)\right) = \mathcal{R}_r\left(\begin{bmatrix}\omega_1(x) \\ \vdots \\ \omega_r(x)\end{bmatrix}\right) \\ &= \left\{\left(x, \omega(x)\right) \in T^*M \ \Big|\ \omega(x) = \textstyle\sum_{i=1}^r \beta_i(x)\omega_i(x),\ \beta_i(x) \in C^\omega,\ i = 1, \ldots, r\right\}\end{aligned}$$

Example 7. Localization from bearing angles. Consider the example of robot localization in (x, y, θ) coordinates based on bearing measurements

from two beacons in the origin and in $x = 0, y = a$. The two measured angles are given by the two functions

$$\begin{array}{rcl} \alpha_1 & = & \pi - \theta + \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \\ \alpha_2 & = & \pi - \theta + \arctan\left(\frac{y-a}{x}\right) \end{array} .$$

Their gradient in a generic configuration form a two-dimensional co-distribution

$$\Omega(x) = \mathcal{R}_r \left(\begin{bmatrix} \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} & -1 \\ \frac{a-y}{x^2+(a-y)^2} & \frac{x}{x^2+(a-y)^2} & -1 \end{bmatrix} \right) .$$

◇

The *dimension* of a distribution $\mathsf{dim}\ \Delta(p)$ is the number of linearly independent vector fields in $\Delta(p)$; if M is an n-dimensional manifold, then $n-d$ is the co-dimension of $\Delta(p)$. In coordinates, this corresponds to the rank of the associated matrix, i.e. (in the notation used above) $\mathsf{dim}\ \Delta(x) = \mathsf{rank}\ G(x)$. A distribution is *regular* at a point if there exists a neighborhood of the point where its dimension is constant, and is said to be regular on a set if it is regular everywhere in the set; a point that is not regular is a *singularity* for the distribution. The notions of dimension and regularity extend to codistributions straightforwardly.

A covector field ω and a vector field f are said to annihilate each other if their product is identically zero, i.e. $\omega f \equiv 0$, $\forall p \in M$.

We say that a vector field f annihilates a codistribution Ω if it annihilates all covectors in Ω. The distribution of all vector fields annihilating $\Omega(x)$ is called the *annihilator* of Ω, and is denoted as $\Omega^\perp$. In coordinates, $\Omega^\perp = \left\{ f(x) \,\middle|\, O(x)f(x) \equiv 0 \right\}$. If $N(O(x))$ is a basis of the nullspace of $O(x)$, then the annihilator is its column space, i.e. $\Omega^\perp(x) = \mathcal{R}_c N(O(x))$.

Similarly, a covector field ω annihilates a distribution Δ if it annihilates all vectors in Δ. The codistribution of all covector fields annihilating $\Delta(x)$ is its *annihilator*, and is denoted as $\Delta^\perp$. In coordinates, $\Delta^\perp = \left\{ \omega(x) \,\middle|\, \omega(x)G(x) \equiv 0 \right\}$. Hence, if $N_l(G(x))$ is a basis of the left nullspace of $G(x)$, $\Delta^\perp(x) = \mathcal{R}_r \left(N_l(G(x)) \right)$.

By definition, $\left(\Delta^\perp\right)^\perp = \Delta$, and $\left(\Omega^\perp\right)^\perp = \Omega$. At any point in M, from the fundamental theorem of linear algebra, the sum of the dimensions of a distribution and its annihilator is equal to the dimension of M, i.e. $\mathsf{dim}\ \Delta + \mathsf{dim}\ \Delta^\perp = n$ and $\mathsf{dim}\ \Omega + \mathsf{dim}\ \Omega^\perp = n$. If a distribution (or codistribution) is nonsingular at a point, also its annihilator is nonsingular at that point.

An often encountered source of codistributions and distributions in robotics are constrained mechanical systems. A kinematic constraint in Pfaffian form $A(q)\dot{q} = 0$, $q \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{r\times n}$, naturally generates a constraint codistribution $\Omega = \mathcal{R}_r\left(A(q)\right)$. On the other hand, the system's control form $\dot{q} = S(q)\nu$ highlights a basis of the annihilating distribution, i.e. $\Omega^{\perp} = \mathcal{R}_c\left(S(q)\right)$.

Example 8. Model of a Unicycle. With reference to the unicycle model (2.18) and its control form (2.19), let

$$\omega = \begin{bmatrix} \sin\theta & -\cos\theta & 0 \end{bmatrix}$$

and

$$g_1(q) = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{bmatrix}, \; g_2(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{6.17}$$

One has

$$[g_1, g_2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} g_1 - \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & 0 & \cos(\theta) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(\theta) \\ -\cos(\theta) \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$[g_1, [g_1, g_2]] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cos(\theta) \\ 0 & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & 0 & \cos(\theta) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin(\theta) \\ -\cos(\theta) \\ 0 \end{bmatrix} = 0,$$

$$[g_2[g_1, g_1]] = 0,$$

while

$$[g_2[g_1, g_2]] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cos(\theta) \\ 0 & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[g_2, [g_2, g_1]] = -[g_2, [g_1, g_2]]$$

$$[g_1, [g_2, g_2]] = 0,$$

thus verifying Jacobi's identity. ◇

6.2.4 Operations on Distributions and Codistributions

An operation of differentiation along a vector field can be applied to all vector fields in a distribution or codistribution, and the results form again a distribution or codistribution. If differentation is applied along all vector fields in a distribution, the collection of results is again a distribution or codistribution. To denote such operations, we write

$$\begin{aligned} [\Delta_a, \Delta_b] &= \left\{ v \in TM | v = [f_a, f_b],\ f_a \in \Delta_a,\ f_b \in \Delta_b \right\}, \\ L_\Delta \Omega &= \left\{ w \in T^*M | w = L_f \omega,\ f \in \Delta, \omega \in \Omega \right\}. \end{aligned}$$

Note that, although differentiation should be considered along all the infinite vector fields in Δ, if Δ is nonsingular at a point where it has dimension d, then it is sufficient to differentiate along a set of d vector fields forming a basis for Δ in a neighborhood of the point, and use the results as a basis for the distribution or codistribution.

A distribution Δ_a is said to be invariant with respect to a second distribution Δ_b, or Δ_b*–invariant*, if $[\Delta_a, \Delta_b] \subseteq \Delta_a$. Analogously, a codistribution Ω is Δ*–invariant*, if $L_\Delta \Omega \subseteq \Omega$.

Given two distributions Δ_0 and Δ, it is interesting to determine the smallest Δ–invariant distribution which contains Δ_0 (denoted $< \Delta, \Delta_0 >$). To do so, consider the following *filtration* of distributions,

$$\begin{aligned} &\Delta_0 \\ &\Delta_1 &= &\Delta_0 + [\Delta_0, \Delta] \\ &\cdots &= &\cdots \\ &\Delta_k &= &\Delta_{k-1} + [\Delta_{k-1}, \Delta], \end{aligned}$$

where the "+" symbol is understood as in the sum of subspaces, i.e. $W_1 + W_2 := \left\{ x + y | x \in W_1, y \in W_2 \right\}$. Along the filtration, the dimension of Δ_i, $i = 1, 2, \ldots$ is non-decreasing, and is upper bounded by the dimension of the space, n. If for some k, Δ_k and Δ_{k+1} are nonsingular at a point $\bar{x}$ and $\mathsf{dim}\ \Delta_k(\bar{x}) = \mathsf{dim}\ \Delta_{k+1}(\bar{x})$, the filtration stops, and $< \Delta, \Delta_0 >= \Delta_k$ (at least in an open set containing $\bar{x}$).

Example 9. Linear systems reachability. Given the matrix pair (A, B) associated with the LTI system $\mathbb{D}x = Ax + Bu$, consider the constant distribution $\Delta_0 = \mathsf{span}\ B$ and the linear distribution $\Delta = \mathsf{span}\ Ax$. Then $< \Delta, \Delta_0 >= \mathsf{span} \begin{bmatrix} B & AB & \cdots A^{n-1}B \end{bmatrix}$, i.e. the smallest A-invariant subspace containing $\mathsf{Im}\ B$. ◇

In a similar fashion, given a codistribution Ω_0 and a distribution Δ, to find the smallest Δ–invariant codistribution which contains Ω_0 (denoted $< \Delta, \Omega_0 >$), consider the filtration of codistributions

$$\begin{array}{lcl} \Omega_0 & & \\ \Omega_1 & = & \Omega_0 + L_\Delta \Omega_0 \\ \cdots & = & \cdots \\ \Omega_k & = & \Omega_{k-1} + L_\Delta \Omega_{k-1}. \end{array}$$

The dimension of Ω_i, $i = 1, 2, \ldots$ is non-decreasing, and is upper bounded by n. If for some k, Ω_k and Ω_{k+1} are nonsingular at a point $\bar{x}$ and $\mathsf{dim}\ \Omega_k(\bar{x}) = \mathsf{dim}\ \Omega_{k+1}(\bar{x})$, the filtration stops, and $< \Delta, \Omega_0 >= \Omega_k$ (at least in an open set containing $\bar{x}$).

Example 10. Linear systems observability. Given the matrix pair (A, C) associated with the autonomous LTI system $\mathbb{D}x = Ax$ with outputs $y = Cx$, consider the constant codistribution $\Omega_0 = \mathrm{d}(Cx) = \mathsf{span}\ C$ along with the linear distribution $\Delta = \mathsf{span}\ Ax$. Then

$$< \Delta, \Omega_0 >= \mathsf{span} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}.$$

Observe that this is the smallest A-invariant row-space containing $\mathcal{R}_r(C)$, hence its kernel $< \Delta, \Omega_0 >^\perp$ is the largest A-invariant subspace contained in $\mathsf{ker}\ (C)$. $\diamond$

A distribution is said *involutive* if the Lie bracket between any of its vector fields remains in the distribution: in formulas, Δ is involutive iff $[\Delta, \Delta] \subseteq \Delta$. The *involutive closure* of a distribution $\Delta(x)$ is the smallest involutive distribution containing Δ. In other terms, the involutive closure of a distribution Δ is the smallest Δ–invariant distribution containing Δ itself, i.e. $< \Delta, \Delta >$.

Example 11. Involutive closures. Any distribution generated by constant vector fields is trivially involutive. Also distributions generated by a single vector field, e.g. $\Delta(x) = \mathsf{span}\ \{g(x)\}$ are involutive, as indeed

$$[\alpha(x)g(x), \beta(x)g(x)] = (\beta L_g \alpha + \alpha L_g \beta)g(x) \in \Delta$$

The distribution associated with the single wheel model (6.17),

$$\Delta(x) = \mathsf{span}\ \left\{g_1(x), g_2(x)\right\}$$

is not involutive. However,

$$\Delta'(x) = \mathsf{span}\ \left\{g_1, g_2, [g_1, g_2]\right\} = \mathsf{span}\ \left\{ \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

is involutive (indeed $\Delta'(x)$ has everywhere dimension 3, which is the dimension of TM), hence Δ' is the involutive closure of Δ. $\diamond$

6.2.5 Integrability

Assume that, for $x \in \mathbb{R}^n$, a d-dimensional nonsingular distribution $\Delta(x)$ is defined as

$$\Delta(x) = \mathsf{span}\ \left\{f_1(x), \cdots, f_d(x)\right\}$$

Let the annihilating codistribution $\Omega(x) = \Delta^{\perp}(x)$ be written as

$$\Omega(x) = \mathsf{span}\ \left\{\omega_1(x), \cdots, \omega_{n-d}(x)\right\}$$

One may wonder whether these $n-d$ covector fields can be regarded as *exact differentials* of as many scalar functions, i.e. whether there exist $(n-d)$ independent functions $\lambda_i(x)$ such that

$$\omega_i = \mathrm{d}\lambda_i = \frac{\partial \lambda_i}{\partial x}.$$

If this is the case, we say that $\Omega(x) = \Delta(x)^{\perp}$ (and by extension, $\Delta(x)$) is *completely integrable*. This problem is equivalent to asking whether there exists a solution to the system of partial differential equations

$$\mathrm{d}\lambda_i f_j(x) = 0\ ,\ i = 1, \ldots, n-d;\ j = 1, \ldots, d;\ \forall x. \tag{6.18}$$

To have a geometric intuition of the integrability problem, consider the locus of points defined in $\mathbb{R}^n$ by the level surface $\lambda_i(x) = \ell$, for some constant ℓ. The gradient $\mathrm{d}\lambda_i(x) = \frac{\partial \lambda_i(x)}{\partial x}$ can be represented geometrically as an arrow aligned with the normal $n(x)$ to the locus at x. The condition $\mathrm{d}\lambda_i f_j(x) = 0\ ,\ \forall i, j\ ,\ \forall x$ means that every vector field $f_j(x)$ and every linear combination thereof is normal to every $\mathrm{d}\lambda_i$, hence is tangent to all the loci (hence also to the intersection of the loci). In conclusion, a trajectory whose velocity belongs to a d-dimensional integrable distribution is constrained to always remain on a d-dimensional locus, the intersection of the $(n-d)$ loci in the n dimensional space $(n-(n-d) = d)$.

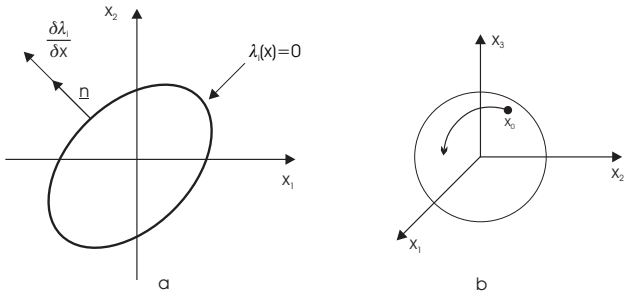


Figure 6.7: An illustration of integral surfaces for codistributions

For a 1-dimensional codistribution $\Omega(x) = \mathsf{span}\ \{\omega_a(x)\}$, we know a necessary and sufficient condition for ω_a to be an exact differential is known from elementary calculus, which is

$$\frac{\partial \omega_{a,i}}{\partial x_j} = \frac{\partial \omega_{a,j}}{\partial x_i},\ i,j = 1,\ldots,n. \tag{6.19}$$

The complete integrability of a d-dimensional distribution is a generalization of this result that requires a stronger theorem.

Theorem 4 (Frobenius)**.** *A distribution is completely integrable if and only if it is involutive.*

Under general assumptions, Frobenius theorem only holds locally, i.e. $\Delta(x)$ is integrable in a neighborhood of a point x_0 iff it is involutive in a neighborhood of the same point. However, if further assumptions hold, such as either of the following

- Both M and $\Delta(x)$ are *analytic*
- Both M and $\Delta(x)$ are smooth, and dim $\Delta(x)$ is constant on M

then $\forall x_0 \in M$, there exists a *maximal integral submanifold.*

6.2.6 Integrability of Kinematic Constraints

Frobenius theorem has important implications on the understanding of the nature of kinematic constraints, expressed in Pfaffian form

$$A(q)\dot{q} = 0,\ q \in \mathbb{R}^n,\quad A(\cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m. \tag{6.20}$$

We recall that such set of m kinematic constraints is said to be *holonomic* if they correspond to m geometric constraints $C_i(q) = 0$, $i = 1,\ldots,m$. In

this case, only $n-m$ of the n configurations are effectively independent, and it is possible (at least locally) to find an explicit expression for the m dependent variables as a function of the independent ones. If otherwise all variables remain independent, then the kinematic constraints are said to be *completely nonholonomic*. Intermediate cases are possible, where only $r < m$ functions $C_i(q)$ $i = 1, \ldots, r$ exist such that $dC_i(q)$ belongs to $\mathcal{R}_r(A(q))$, so that the number of independent variables is $n-r$: the kinematic constraints are said to have a *degree of nonholonomy* given by $m-r$.

In kinematic terms, if $S(q)$ is a basis of the nullspace of $A(q)$, all admissible velocities $\dot{q}$ belong to $\mathsf{span}\ \{S_1(q), \ldots, S_{n-m}(q)\}$. Regarding the kinematic constraint as a codistribution $\Omega(q) = \mathcal{R}_r A(q)$, let its annihilator be the distribution $\Sigma = \Omega(q)^\perp = \mathcal{R}_c S(q)$.
If $\Sigma(q)$ is completrely integrable, i.e. if it is involutive, then there exist m surfaces in $\mathbb{R}^n$ described by the equations $\lambda_i(x) = \ell_i$ $i = 1, \cdots, m$, with ℓ_i constant: all constraints are clearly holonomic in this case. If the initial configurations q_0 of the system satisfy these equations with a certain value of $\ell_i = \lambda_i(q_0)$, the same value is mantained along all admissible motions. Motions originating from a different cofiguration q_0' will belong to different level surfaces $\lambda_i(x) = \ell_i'$, which are however (at least locally) parallel to the previous ones. Such set of level surfaces is called a *foliation*.
If $\Sigma(q)$ is not involutive, then consider its involutive closure $< \Sigma(q) | \Sigma(q) >$. Assume that this distribution is nonsiingular and has dimension d. If $d = n$, then $r = n - d = 0$, and the kinematic constrains are completely nonholonomic. If $m < d < n$, we say that the system has degree of nonholonomy $m - r = m - n + d$.

Example 12. A constrained evolution. Consider the system

$$\dot{q} = S_1(q)u_1 + S_2(q)u_2 \tag{6.21}$$

with $q \in \mathbb{R}^3$ and

$$S_1(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ q_3 \\ -q_2 \end{bmatrix} \ ; \ S_2(q) = \begin{bmatrix} -q_3 \\ 0 \\ q_1 \end{bmatrix}.$$

Observe that $\Sigma(q) = \mathsf{span}\ \{S_1, S_2\}$ has dimension 2 everywhere in $Q = \{q \in \mathbb{R}^3 | q_3 \neq 0\}$. Consider that in Q it holds

$$S_3 = [S_1, S_2] = \begin{bmatrix} +q_2 \\ -q_1 \\ 0 \end{bmatrix} = -\frac{q_1}{q_3} S_1 - \frac{q_2}{q_3} S_2 \in \Sigma(q).$$

Hence, $\Sigma(q)$ is involutive in Q, hence by Frobenius theorem we expect the existence of a $d = 2$ dimensional integral submanifold, and the kinematic constraints to be holonomic. Indeed, the spherical surface $\lambda(q) = q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = \ell$ is such that

$$\mathrm{d}\lambda(q) \begin{bmatrix} S_1(q) & S_2(q) \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -q_3 \\ q_3 & 0 \\ -q_2 & q_1 \end{bmatrix} = 0$$

Therefore, the configuration of system (6.21) with $q(0) = q_0$ will always remain on the sphere centered in the origin and passing through q_0. The motion of a point subject to (6.21) could therefore be locally described by two coordinates only. Recapitulating, for this system we have $n = 3$, $m = 1$, $r = 1$, $d = 2$ and zero nonholonomy degree. ◇

Example 13. Translation-only vehicle. Consider a vehicle in the plane, with configuration $q = (x, y, \theta)$, with the kinematic constraint that it cannot rotate $A(q)\dot{q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \dot{q} = 0$. We can write

$$S(q) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$\Sigma = \mathcal{R}_c\big(S(q)\big)$ is involutive, hence integrable, the constraint is holonomic ($\lambda(q) = \theta$), and the number of independent configurations is reduced to 2. Hence in this example $n = 3$, $m = 1$, $r = 1$, $d = 2$ and zero nonholonomy degree.
◇

Example 14. Unicycle. Consider the unicycle constraint $A(q) = \begin{bmatrix} \sin\theta & -\cos\theta & 0 \end{bmatrix}$. As previously observed, $\Sigma(q)$ is not involutive, and $d = \mathsf{dim} \ < \Sigma|\Sigma >= 3$. Hence the constraint is completely nonholonomic, and the number of independent configurations remains 3. Hence we have $n = 3$, $m = 1$, $r = 2$, $d = 3$ and nonholonomy degree one.
◇

Example 15. Rail. Consider now joining the constraints of the two previous examples in

$$A(q) = \begin{bmatrix} \sin\theta & -\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

In this case

$$S(q) = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$\Sigma = \mathcal{R}_c\big(S(q)\big)$ ha dimension $d = 1$ and hence is involutive and integrable, both constraints are holonomic, with e.g. $\lambda_1(q) = \theta$ and $\lambda_2(q) = \sin\theta x - \cos\theta y$. The number of independent configurations is reduced to 1. Hence we have here $n = 3$, $m = 2$, $r = 2$, $d = 2$ and zero nonholonomy degree.
◇

Example 16. The Bicycle. Consider the example of the bicycle studied in Section 2.3. With reference to fig. 2.18, consider a configuration $q = (q_p, q_a) \in \mathbb{R}^6$, with $q_p = (x_p, y_p, \theta_p)$ the coordinates of the rear wheel, and $q_a = (x_a, y_a, \theta_a)$ the coordinates of the front wheel. The system is subject to $m = 4$ kinematic constraints of the form

$$\begin{cases} \dot{x}_a \sin\theta_a - \dot{y}_a \cos\theta_a = 0 \\ \dot{x}_p \sin\theta_p - \dot{y}_p \cos\theta_p = 0 \\ \dot{x}_a - \dot{x}_p - L\sin\theta_p \dot{\theta}_p = 0 \\ \dot{y}_a - \dot{y}_p - L\cos\theta_p \dot{\theta}_p = 0 \end{cases} \tag{6.22}$$

hence

$$A(q)\dot{q} = \begin{bmatrix} \sin\theta_a & -\cos\theta_a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin\theta_p & -\cos\theta_p & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -L\sin\theta_p \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -L\cos\theta_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_a \\ \dot{y}_a \\ \dot{\theta}_a \\ \dot{x}_p \\ \dot{y}_p \\ \dot{\theta}_p \end{bmatrix}.$$

and

$$S(q) = \begin{pmatrix} 0 & -L\,\cos\left(2\,\theta_{\mathrm{p}}\right)\,\cos\left(\theta_{\mathrm{a}}\right) \\ 0 & -L\,\cos\left(2\,\theta_{\mathrm{p}}\right)\,\sin\left(\theta_{\mathrm{a}}\right) \\ 1 & 0 \\ 0 & -L\cos(\theta_a + \theta_p)\cos(\theta_p) \\ 0 & -L\,\cos\left(\theta_{\mathrm{a}} + \theta_{\mathrm{p}}\right)\,\sin\left(\theta_{\mathrm{p}}\right) \\ 0 & -\sin\left(\theta_{\mathrm{a}} - \theta_{\mathrm{p}}\right) \end{pmatrix}.$$

Observe that $\Sigma(q) = \mathsf{span}\ \{S_1, S_2\}$ has dimension $n - m = 2$, and $d = \mathsf{dim} < \Sigma(q)|\Sigma(q) >= 4$, hence $r = 2$ of the kinematic constraints are holonomic

and can be integrated, while the degree of nonholonomy is $m - r = 4 - 2 = 2$. Accordingly, the system can effectively be described in a reduced configuration set in $\mathbb{R}^4$ (as used in Section 2.3). $\diamond$

Chapter 7

Controllability of Nonlinear Systems

As we have observed, there exists a direct relationship between involutivity of a distribution and the existence of integral surfaces which remain invariant during motion. It is hence to be expected that the Lie bracket operator has strong relevance in controllability problems. For instance, in a dritless system such as

$$\dot{x} = g_1(x)u_1 + \cdots + g_d(x)u_d = G(x)u, \tag{7.1}$$

the control distribution $\Delta_0 = \mathsf{span}\left\{g_1(x), \ldots\right\}$ contains directions of motion which the system can be made to follow by suitable controls, but not *all* of them. The following example illustrates this fact.

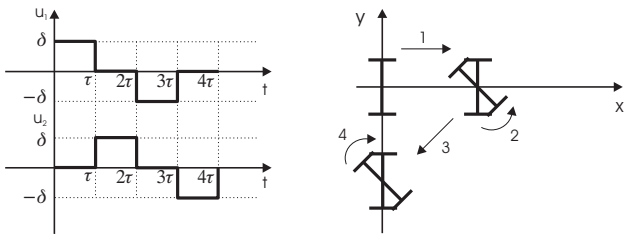


Figure 7.1: Alternating control sequence applied to a nonlinear system without drift.

Example 1. Ingressi alternati su un uniciclo. Si consideri ancora il modello cinematico di un uniciclo (2.19). La distribuzione dei vettori di

controllo

$$\Delta(x) = \mathsf{span} \left\{ \begin{array}{cc} \cos(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right\}$$

è regolare ovunque con dimensione 2. Le direzioni di moto rese possibili dai vettori appartenenti alla distribuzione di controllo coincidono con quelle possedute dal modello linearizzato approssimato nel punto considerato.

Si pensi ora di applicare ingressi della forma riportata in fig. 7.1 a partire dalla configurazione $q_0 = (x_0\, y_0\, \theta_0) = (0\, 0\, 0)$. Integrando le equazioni cinematiche

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 0 \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_2$$

si ottiene facilmente

$$\left\{ \begin{array}{l} x(\tau) = \delta\tau \\ y(\tau) = 0 \\ \theta(\tau) = 0 \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} x(2\tau) = \delta\tau \\ y(2\tau) = 0 \\ \theta(2\tau) = \delta\tau \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} x(3\tau) = \big(1 - \cos(\delta\tau)\big)\,\delta\tau \\ y(3\tau) = -\sin(\delta\tau)\delta\tau \\ \theta(3\tau) = \delta\tau \end{array} \right.$$

e infine

$$\left\{ \begin{array}{l} x(4\tau) = \big(1 - \cos(\delta\tau)\big)\,\delta\tau \\ y(4\tau) = -\sin(\delta\tau)\delta\tau \\ \theta(4\tau) = 0 \end{array} \right.$$

Consideriamo ora il caso di piccoli ingressi e/o intervalli temporali τ brevi, cosí che $\delta\tau \to 0$. Sviluppando in serie di Taylor fino al secondo ordine si ha:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x(4\tau) & = & \big[(1 - \cos\delta\tau) + \delta\tau\sin\delta\tau\big]_{\delta\tau=0}\,\delta\tau + [2\sin\delta\tau + \delta\tau\cos\delta\tau]_{\delta\tau=0}\,\frac{\delta^2\tau^2}{2} + \\ & & +O(\delta^3\tau^3) = O(\delta^3\tau^3) \\ y(4\tau) & = & [-\sin\delta\tau - \delta\tau\cos\delta\tau]_{\delta\tau=0}\,\delta\tau + [-2\cos\delta\tau + \delta\tau\sin\delta\tau]_{\delta\tau=0}\,\frac{\delta^2\tau^2}{2} + \\ & & +O(\delta^3\tau^3) = -\delta^2\tau^2 + O(\delta^3\tau^3) \end{array} \right.$$

Si osserva che, mentre l'approssimazione al primo ordine (cioè la linearizzazione) indicherebbe che il veicolo è tornato alla configurazione iniziale, i termini del secondo ordine evidenziano il fatto che il movimento risultante del veicolo ha una componente nella direzione del vettore

$$\begin{bmatrix} x(4\tau) \\ y(4\tau) \\ \theta(4\tau) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ \theta_0 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

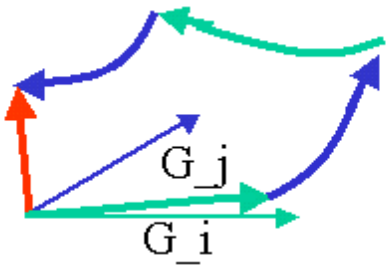


Figure 7.2: Interpretazione grafica del commutatore di due campi vettoriali $g_i(x)$ e $g_j(x)$.

che non risulta contenuto nella distribuzione di controllo valutata in x_0

$$\Delta(x_0) = \mathsf{span}\left[\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right]$$

Osserviamo che la direzione del moto in cui é evoluto il sistema all'istante 4τ è nella direzione della Lie Bracket valutata nel punto iniziale

$$[g_1, g_2] = \begin{bmatrix}\sin\theta\\-\cos\theta\\0\end{bmatrix}_{\|x_0} = \begin{bmatrix}0\\-1\\0\end{bmatrix}$$

Si osserva anche che uno spostamento della configurazione del veicolo nella direzione non contenuta nello spazio di raggiungibilità del modello linearizzato, è stato ottenuto localmente, cioè senza allontanarsi da un intorno arbitrariamente piccolo del punto iniziale (infatti $\delta\tau$ può essere scelto arbitrariamente piccolo). $\diamond$

Ci chiediamo quindi, più generalmente, se il sistema (7.1) a partire da un punto x_0 possa muoverci lungo direzioni non contenute in $\Delta(x_0)$. Anche in questo caso è possibile far vedere che è possibile scegliendo opportune sequenze degli ingressi $u_1, \cdots, u_d$ in modo da *commutare* i campi vettoriali $g_1, \cdots, g_d$ (vedi fig. 7.2). Le sequenze di controllo usate per evidenziare il ruolo della Lie bracket nell'esempio dell'uniciclo possono essere applicate anche nel caso di sistema driftless generale. Si può infatti dimostrare con

facili passaggi che applicando sequenze alternate del tipo sopra descritto agli ingressi $u_i(t)$ e $u_j(t)$, mentre tutti gli altri ingressi sono lasciati nulli, l'evoluzione del sistema (7.1) dopo un ciclo di ingressi vale

$$x(4\tau) = x_0 + [g_i, g_j]_{x=x_0}\delta^2\tau^2 + O(\delta^3\tau^3),$$

ovvero il sistema evolve da x_0 lungo la direzione dal vettore generato dalla Lie bracket $[g_1, g_2]$ calcolata in x_0 (la verifica di questo risultato è lasciata per esercizio. Il calcolo è facilitato, senza perdere generalità, se si assumono per il sistema coordinate tali per cui uno dei campi vettori sia costante).

Si osservi infine che il termine $O(\tau^3)$, se sviluppato, evidenzierebbe il ruolo di Lie bracket di ordine superiore del tipo $[g_i, [g_i, g_j]]$, $[g_j, [g_i, [g_i, g_j]]]$, etc., che possono generare ulteriori possibili direzioni di moto.

7.1 Controllability: Definitions and Theorems

Let us turn back to the affine–in–control nonlinear system (6.2)

$$\dot{x} = f(x) + g_1(x)\, u_1 + g_2(x)\, u_2 + \cdots + g_m(x)\, u_m\,,$$

with $x\mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$. We say that x_f is *reachable* from x_0 if, for initial conditions $x(0) = x_0$, there exists a time T and an input function $\bar{u}(t) : [0, T] \to \mathbb{R}^m$ such that the state at time T reaches x_f, i.e. $x\left(x_0, \bar{u}(\cdot), T\right) = x_f$[1].

Let $\mathcal{R}_T(x_0)$ denote the set of points reachable from x_0 in time T or less. If $R_T(x_0) = \mathbb{R}^n$, we say that the system is controllable from x_0. If a system is controllable from every point $x_0 \in \mathbb{R}^n$, the system is *completely controllable*. If T can be arbitrarily small, then we say that these properties hold *in small-time* from x_0.

Complete controllability in a nonlinear system can be difficult to assess using analytic tools, and we have to restrict to local concepts.

We say that system (6.2) is *locally controllable* in x_0 if there exists a neighborhood $B_\epsilon(x_0)$ such that $\forall x_f \in B_\epsilon$, $\exists T$ and $\exists u : [0, T] \to \mathbb{R}^m$ such that $x(x_0, u, T) = x_f$. If T can be arbitrarily small, then we say that the system is *locally controllable in small-time* from x_0.

Similar definitions, with even further reduced ambition, are used for *local accessibility* and *small-time local accessibility*, if the neighborhood $B_\epsilon(x_0)$ is

[1] Similar concepts can easily be definied for restrictions of the state space $X \subset \mathbb{R}^n$ and the input space $U \subset \mathbb{R}^m$.

replaced by the open vicinity $B_\omega(x_0)$[2]. Of course, a system controllable at a point is also accessible at that point, while the converse does not hold necessarily.

The following result holds.

Theorem 5 (Sufficient Conditions for Small-Time Local Controllability)**.** *Consider a system $\dot{x} = f(x,u)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, at equilibrium in the origin (i.e. $f(0,0) = 0$). If the linear approximation $\dot{x} = Ax + Bu$ is completely controllable, then the system is small-time locally controllable, i.e. $\forall x_f \in B_\epsilon(0)$ and $\forall T$, $\exists u(t), t \in [0,T]$ such that $x(0,u(\cdot),T) = x_f$.*

As discussed previously, the assumptions of this theorem are not necessary, and they do not apply to many important nonlinear systems which are indeed controllable.

To more precisely address reachability for nonlinear systems, it is useful to further restrict its definition to rule out the possibility of *nonlocal* behaviors in local controllability. As an example of such nonlocal phenomena, consider the example below.

Example 2. Nonlocal Controllability. Consider $x \in \mathbb{R}^2$ with

$$\dot{x} = \begin{cases} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_1, & x_1 < 1 \\ \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_2, & x_1 \geq 1 \end{cases}$$

By inspection, all points in a neighborhood of the origin are reachable, including those with $x_2 \neq 0$, although this requires that the state first reaches to the half space $x_1 \geq 1$. ◇

The example shows that in a general nonlinear system, a local property may depend on non-local behaviors. This may happen when $f(\cdot,\cdot)$ is discontinuous, as in this case. The analysis of such systems in general would require a mix of analytical arguments (within regions where the vector fields are analytic) and logical arguments (such as connectivity of different regions), or in other terms of continuous systems theory and finite state automata theory, which goes under the name of *hybrid systems theory.*

[2] $B_\omega(x_0)$ is an open set for which x_0 is an accumulation point. For example, $B_\epsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n | \|x - x_0\| < \epsilon\}$, with $\epsilon \in \mathbb{R}_+$; and $B_\omega(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n | M(x - x_0) > 0\}$, with $M \in \mathbb{R}^{1\times n}$.

We further restrict the notions of controllability and accessibility by considering only those points that can be reached from the initial point x_0 without getting outside a small neighborhood $V(x_0)$. Let then $R_T^V(x_0) = \left\{x = \big(x_0, T, \bar{u}(t)\big)\right\}$ with $\bar{u}(t) : [0, T] \to \mathbb{R}^m$ such that $x\left(x_0, \tau, \bar{u}(t)\right) \in V(x_0)$, $0 \leq \tau \leq T$.

A nonlinear system is said to be *small-space* (or *locally-locally*[3]) controllable (accessible) from x_0 if, for any arbitrarily small neighborhood V of x_0, there exists T such that $R_T^V(x_0)$ contains a neighborhood $B_\epsilon(x_0)$ (an open vicinity $B_\omega(x_0)$, respectively). It is said *small time locally locally controllable* (*accessible*), if for arbitrarily small T, $R_T^V(x_0)$ contains a neighborhood (an open vicinity, respectively) of x_0 (we omit saying small-space in these cases).

Consider the affine–in–control nonlinear system

$$\dot{x} = f(x) + g_1(x)\, u_1 + g_2(x)\, u_2 + \cdots + g_m(x)\, u_m \; = f(x) + G(x)u, \qquad (7.2)$$

and the associated distributions

$$\begin{aligned} \Delta_0 &= \mathsf{span}\ (g_1, \ldots, g_d); \\ \Delta &= \mathsf{span}\ (f, g_1, \ldots, g_d) \end{aligned}$$

The smallest Δ-invariant distribution containing Δ_0, i.e. $< \Delta, \Delta_0 >$, is called the *accessibility distribution.*

Theorem 6 (Chow)**.** *System (7.2) is locally accessible in small time from x_0 if and only if* $\mathsf{dim}\ < \Delta, \Delta_0 >= n$ *in x_0.*

If in a neighborhood of x_0 dim $< \Delta, \Delta_0 >= r < n$, then the set R_T^V of points reachable from x_0 is contained in a submanifold of dimension r of the n-dimensional state space, and contains an open set in that submanifold.

The following example illustrates the difference between accessibility and controllability.

Example 3. An accessible system that is not reachable. Consider the system

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2^2 \\ u \end{bmatrix} = f(x) + g(x)u$$

with

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_2^2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad g(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Chow's theorem shows that the system is accessible from any x_0. Indeed, $\mathsf{dim}\ \Delta_0(x_0) = 1$ everywhere and

[3]according to the terminology of G. W. Haynes and H. Hermes, "Non-linear controllability via Lie theory," SJAM J. Contr. , vol. 8, pp. 450-460, 1970.

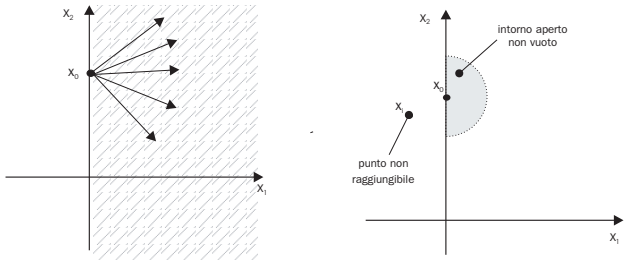


Figure 7.3: An accessible system that is not reachable

a) for $x_{0,2} \neq 0$, $\dim \Delta_1(x_0) = \dim \operatorname{span}\{g, [f,g]\} = 2$;

b) for $x_{0_2} = 0$, $\Delta_1(x)$ is singular in x_0, but $\Delta_2(x) = \operatorname{span}\ \{g, [f,g], [g,[f,g]]\}$ has dimension 2 everywhere.

By Chow's theorem, $R_T^V(x_0)$ contains an open subset of $\mathbb{R}^2$: indeed, any point x_f sufficiently close to x_0 with $x_{f,1} > x_{0,1}$ can be intuitively reached. The system is not controllable, however, because there exist points x_f arbitrarily close to x_0 which are not reachable (namely, those with $x_{f,1} < x_{0,1}$). In other terms, $R_T^V(x-s)$ does not contain a neighborhood of x_0: indeed, the first state can never decrease in time for this system. $\diamond$

7.2 System Decomposition in Controllable Form

A very interesting interpretation of nonlinear controllability can be obtained by generalizing the notion of standard decompositions encountered in linear systems.

Recall that, for the linear system $\dot{x} = Ax + Bu$, any coordinate change $x = Tz$ with $T = \left[T_R | T_{\bar{R}}\right]$ with T_R a basis of the reachability subspace (i.e., the smallest A–invariant subspace containing the image of B), transforms the system in the form

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_R \\ \dot{z}_{\bar{R}} \end{bmatrix} = T^{-1}ATz + T^{-1}Bu = \begin{bmatrix} A_R & A_{R\bar{R}} \\ 0 & A_{\bar{R}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_R \\ z_{\bar{R}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_R \\ 0 \end{bmatrix} u.$$

Consider now a nonsingular involutive distribution $\Gamma(x)$ in $\mathbb{R}^n$ with dimension d in a point x_0, and the $n-d$ independent functions $\Lambda_i(x)$ such that $\mathrm{d}\Lambda_i(x)\Gamma(x) = 0$. Consider a neighborhood of x_0 and a change of coordinates

$z = \Phi(x)$ with $z = (z_I, z_{II}) = (\Phi_I(x), \Phi_{II}(x))$ where $\Phi_{II}(x) = \Lambda(x) \in \mathbb{R}^{n-d}$. Then, any vector field $g(x) \in \Gamma(x)$ in the new coordinates has the aspect

$$\bar{g}(z) = \Phi_*(x)g(x)\big|_{x=\phi^{-1}(z)} = \begin{bmatrix} \bar{g}_I(z_I, z_{II}) \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{7.3}$$

If furthermore $\Gamma(x)$ is $\Delta(x)$-invariant, then in the new coordinates any vector field $f(x) \in \Delta(x)$ has the aspect

$$\bar{f}(z) = \Phi_*(x)f(x)\big|_{x=\phi^{-1}(z)} = \begin{bmatrix} \bar{f}_I(z_I, z_{II}) \\ \bar{f}_{II}(z_{II}) \end{bmatrix}. \tag{7.4}$$

Indeed, being $\Gamma(x)$ $\Delta(x)$-invariant, $[f(x), g(x)] = \ell(x) \in \Gamma(x)$, $\forall f \in \Delta, \forall g \in \Gamma$. In the adapted coordinates, $\bar{g}(z)$ and $\bar{\ell}(x)$ have the aspect of (7.3), while $\bar{f}(z)$ is as in (7.4). Hence we have

$$\begin{aligned} \ell(z) &= \begin{bmatrix} \ell_I(\cdot,\cdot) \\ 0 \end{bmatrix} = [\bar{f}(z), \bar{g}(z)] = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{g}_I(\cdot,\cdot)}{\partial z_I} & \frac{\partial \bar{g}_I(z_I,z_{II})}{\partial z_{II}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{f}_I(z_I, z_{II}) \\ \bar{f}_{II}(\cdot,\cdot) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{f}_I(\cdot,\cdot)}{\partial z_I} & \frac{\partial \bar{f}_I(z_I,z_{II})}{\partial z_{II}} \\ \frac{\partial \bar{f}_{II}(\cdot,\cdot)}{\partial z_I} & \frac{\partial \bar{f}_{II}(\cdot,\cdot)}{\partial z_{II}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_I(z_i, z_{II}) \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

From the second row equality we get

$$\frac{\partial \bar{f}_{II}(z_I, z_{II})}{\partial z_I} \bar{g}_I(z_I, z_{II}) = 0.$$

As this must hold for all $g \in \Delta$, hence for all $\bar{g}_I(z)$, it necessarily holds $\frac{\partial \bar{f}_{II}(z_I,z_{II})}{\partial z_I} = 0$, hence $\bar{f}_{II}(z_{II})$, q.e.d..

Now, with reference to system (7.2), recall that $< \Delta, \Delta_0 >$ is the smallest Δ-invariant distribution which contains Δ_0 (hence it is involutive), and assume that $\dim\ < \Delta, \Delta_0 >= d < n$ is constant in a neighborhood of a point x_0. Then in suitable coordinates $z = \Phi(x)$, system (7.2) has the aspect

$$\begin{aligned} \dot{z}_R &= \bar{f}_R(z_R, z_{\bar{R}}) + \bar{G}_R(z_R, z_{\bar{R}})u\,, \\ \dot{z}_{\bar{R}} &= \bar{f}_{\bar{R}}(z_{\bar{R}}), \end{aligned}$$

and is thus decomposed in a completely unaccessible subsystem ($\dot{z}_{\bar{R}} = \bar{f}_{\bar{R}}(z_{\bar{R}})$), and a completely accessible subsystem.

Example 4. Example 12 revisited. Consider the system

$$\dot{q} = f(q) + g_1(q)u_1 + g_2(q)u_2,$$

with

$$f(q) = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}; \; g_1(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ q_3 \\ -q_2 \end{bmatrix}; \; g_3(q) = \begin{bmatrix} -q_3 \\ 0 \\ q_1 \end{bmatrix}.$$

Observing that $[f, g_1] = [f, g_2] = 0$, $< \Delta, \Delta_0 >= \Delta_0$, at any point where $q_3 \neq 0$ Δ_0 is nonsingular and $\dim < \Delta, \Delta_0 >= 2$. By Chow's theorem, the system is not accessible in small time and, defining new coordinates as

$$\begin{aligned} z_1 &= q_1 \\ z_2 &= q_2 \\ z_3 &= q_1^2 + q_2^2 + q_3^2, \end{aligned}$$

the system becomes (in a region where $q_3 > 0$)

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_1 - \sqrt{z_3 - z_1^2 - z_2^2}u_2 \\ \dot{z}_2 &= z_2 + \sqrt{z_3 - z_1^2 - z_2^2}u_1 \\ \dot{z}_3 &= 2z_3 \end{aligned}$$

It can be oberved that the system corresponds to the system studied in the example 12 of the previous chapter 6, i.e. the constrained evolution of a point on the surface of a sphere, except for the drift term $f(q)$, which contributes an exponential increase of the sphere radius. The two coordinates on the sphere are controllable by the two inputs, while the radius evolves autonomously.

Observe that any point q_f at distance R_f from the origin can be reached from a point q_0 at distance $R_0 < R_f$, but only at time $T = (\log R_f - \log R_0)$. Hence the system is locally accessible, but not in small–time. ◇

7.3 Local Weak Controllability

In the example 4 of the previous section we have observed that the necessary condition in Chow's theorem for small-time local accessibility is not necessary for the weak form, i.e. where time to reach a point is not specified to be arbitrarily small. Indeed, it can be shown that a necessary condition for weak local accessibility is instead $\dim < \Delta(x), \Delta(x) >= n$, i.e. that the involutive closure of $\Delta(x)$ spans the whole space. For instance, in example 4, $\dim \Delta(x) = 3$ except at singularities in $q_3 = 0$.

Example 5. Linear Systems. Consider the linear systems $\dot{x} = Ax + Bu$. Compute the s.t.l.a. distribution $< \Delta, \Delta_0 >$ as

$$\begin{array}{rcl} \Delta_0 & = & \mathsf{span}\ \{B\}\,,\ \Delta = \mathsf{span}\ \{Ax, B\}\,, \\ \Delta_1 & = & \mathsf{span}\ \{B, AB\} \\ \cdots & = & \cdots \\ \Delta_{n-1} & = & \mathsf{span}\ \left\{B, AB, \ldots, A^{n-1}B\right\} \\ \Delta_n & = & \mathsf{span}\ \{B, AB, \ldots, A^n B\} = \Delta_{n-1}. \end{array}$$

By Cayley-Hamiton's theorem, hence, we have $< \Delta, \Delta_0 >=< A, B >= \mathsf{span}\ R$, the reachability matrix of the pair (A, B).

By similar calculations, the w.l.a. distribution is

$$< \Delta, \Delta >= \mathsf{span}\ \left\{Ax, B, AB, \ldots, A^{n-1}B\right\},$$

which may be different from $< \Delta, \Delta_0 >$ for $x \neq 0$, if the pair (A, B) is not completely reachable.

Indeed, a linear system which is not completely controllable can be completely accessible from a point $x_0 \neq 0$, as the set $\left\{x \in \mathbb{R}^n | x = e^{AT}x_0 + v, v \in \mathsf{span}\ R\right\}$ is reachable at time T, but not in arbitrarily small time.

Take for instance

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

for which the controllability matrix has rank 1. However, every point in the open halfspace $\{x_f \in \mathbb{R}^2 | x_{f,1} > x_{s,1}\}$ can be reached from every x_0 with $x_{s,1} \neq 0$, although only at a specific time: e.g. the point $x_f = (2, 0)$ can be reached from $x_0 = (1, 1)$ only at time $T = \log(2)$, when $x_1(T) = x_1(0)\, e^T$. $\diamond$

7.4 From Accessibility to Controllability

Conditions in Chow's theorem are necessary and sufficient to affirm accessibility. However, accessibility is only necessary for controllability. To have sufficient conditions on controllability, further conditions have to be imposed.

Roughly speaking, the difference between the two concepts is in the possible contribution to accessibility by the drift vector field $f(x)$, whose flow can only be followed forward in time by the solutions of system (7.2). Controllability will be possible when vector fields in the control distribution $\Delta_0(x)$ have the possibility to contribute the same orientation of motion as afforded by drift, but in arbitrary sense.

The following conditions are sufficient to affirm that a system (7.2) which is s.t.l.a. at $x_0 q$ is also s.t.l.c.:

i) $f(x) \equiv 0, \forall x \in B_\epsilon(x_0)$;

ii) $f(x) \in$ span $\left\{g_1(x) \cdots g_m(x)\right\}, \forall x \in B_\epsilon(x_0)$;

iii) $f(x_0) = 0$ and dim $\Delta_L(x_0) = n$, where $\Delta_L =< \Delta_f, \Delta_g >$, $\Delta_f =$ span $\left\{f(x)\right\}$ and $\Delta_g =$ span $\left\{g_1(x), \cdots, g_m(x)\right\}$. In other terms, $\Delta_L =$ span $\{g_i, [f, g_i], \ldots, ad_f^{\mu_i} g_i, \ldots\}$, $i = 1, \ldots, m$, for all $\mu_i \in \mathbb{N}$);

iv) $f(x_0) = 0$ and dim $(\Delta_L(x_0) + \Delta_{G1}(x_0)) = n$, where $\Delta_{G1} =$ span $\{[g_i, g_j]\}$, for all i, j from 1 to m;

v) $f(x_0) = 0$, and every Lie bracket between f and g with an odd number of f and an even number (not zero) of g ("bad brackets"), is a linear combination of brackets with a smaller total number of f e g ("good brackets");

vi) If the accessibility condition is verified in all points in a compact set M and the sytem is weakly reversible in M (i.e. $q_1 \in M$ is reachable from $q_0 \in M$ if and only if q_0 is reachable from q_1), then the system is reachable on M.

Condition i) (which, as discussed above, is particularly ineresting for the analysis of kinematically constrained systems) directly follows from the consideration that, when no drift term is present, all trajectories can be followed backward by inverting the sign of controls. Interpretation of condition ii) is also rather direct, as there exist controls which can cancel the drift term, thus effectively going back to case i) (recall that we are dealing with systems where controls enter linearly, hence superposition of inputs holds). Notice explicitly that the first two criteria require that the corresponding properties are verifid in a whole neighborhood of x_0, not just at x_0.

To illustrate condition iii), consider system (7.2) in a neighborhood of $x_0 = 0$ (possibly after a translation of the origin) with the drift and control vector field rewritten in Taylor series as

$$\dot{x} = f(x) + G(x)u = Ax + p(x) + \big(B + R(x)\big)\, u, \quad x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m$$

where $\|p(x)\|, \|R_i(x)\| \in O(\|x\|^2)$ $i = 1, \ldots, m$ are infinitesimals of order two or higher in $\|x\|$. Notice that

$$\begin{aligned} \Delta_L(x) &= \text{span } \left\{B + R(x), [Ax + P(x), B + R(x)], \ldots, ad^n_{Ax+P(x)} \big(B + R(x)\big), \ldots\right\} \\ &= \text{span } \left\{B, AB, \ldots, A^{n-1}B\right\} + O(\|x\|^2) \end{aligned}$$

Therefore, condition iii) implies controllability of the linear approximation, which in turn implies local controllability from the origin (cf. theorem (5)). The viceversa is not true, because Δ_L does not contain any bracket with more than a single control vector field.

Example 6. In the previous example 3 on an accessible but not reachable system,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2^2 \\ u \end{bmatrix},$$

none of the 6 condition applies. In particular, for $x_{s,2} = 0$, condition v) is not satisfied because the "bad" bracket $[g, [f, g]]$ is faster than any "good" bracket spanning the same direction. $\diamond$

Example 7. Linear time–varying systems. Nonlinear controllability tools also help studying controllability of linear time-varying systems. Indeed the system

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u$$

can be simply recast as a nonlinear system in an extended state space $z \in \mathbb{R}^{n+1}$ as

$$z = \begin{bmatrix} x \\ t \end{bmatrix} \; ; \; \dot{z} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{t} \end{bmatrix} = f(z) + g(z)u = \begin{bmatrix} A(t)x \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B(t) \\ 0 \end{bmatrix} u$$

Computing the Lie brackets, one has

$$[g_i, g_j] = \begin{bmatrix} 0 & \dot{B}_j \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_i \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \dot{B}_i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_j \\ 0 \end{bmatrix} = 0, \quad \forall i, j$$

and

$$[f, g_i] \;=\; \begin{bmatrix} 0 & \dot{B}_i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Ax \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A & \dot{A}x \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_i \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{B}_i - AB_i \\ 0 \end{bmatrix}.$$

We rewrite

$$[f, g_i] = \begin{bmatrix} \left(\frac{d}{dt} - A\right) B_i \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} WB \\ 0 \end{bmatrix}$$

where the shorthand notation $W = \left(\frac{d}{dt} - A\right)$ is used. We have further

$$\begin{aligned}
[f,[f,g_j]] &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{d}{dt}(WB) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Ax \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A & \dot{A}x \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} WB \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \left[\frac{d}{dt} - A\right](WB) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W^2B \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} .$$

Proceeding further, all brackets are zero except for those of type

$$ad_f^k g = \begin{bmatrix} W^k B \\ 0 \end{bmatrix}$$

hence the accessibility rank condition is

$$\text{rank}\left(\left[B\ WB\ \cdots W^k B\ \cdots,\right]\right) = n.$$

which clearly generalizes the usual controllability matrix rank condition. $\diamond$

Example 8. A boy on a swing. In a simplified model of a swing, a boy of unit mass can raise and lower his center of mass changing the distance l of his center of mass from the pivot. The dynamics are then written as

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin\theta - 2\frac{\dot{\theta}}{l}\dot{l}.$$

Setting

$$\theta = x_1\ ,\ \dot{\theta} = x_2\ ,\ l = x_3\ ,\ \dot{l} = u$$

one has

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u\ ;\ f(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -g\frac{\sin x_1}{x_3} \\ 0 \end{bmatrix}\ ;\ g(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ -2\frac{x_2}{x_3} \\ 1 \end{bmatrix},$$

hence

$$[f,g] = \begin{bmatrix} -2\frac{x_2}{x_3} \\ g\frac{S_1}{x_3^2} \\ 0 \end{bmatrix};\quad [f,[f,g]] = \begin{bmatrix} g\frac{S_1}{x_3^2} \\ -gC_1\frac{x_2}{x_3^2} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

It follows that

$$< \Delta,\, \Delta_0 >= \mathsf{span}\ \left\{g, [f,g], [f,[f,g]]\right\}$$

has dimension 3 in all points except $\{x|x_2 = 0, x_1 = 0 + k\pi\}$. Therefore, the swing is controllable anywhere, except from the lower equilibrium with zero velocity, whence a kick start is needed to initialize the swing. ◇

Example 9. Vehicles in chained form. A system in the form

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u_1 \\ \dot{x}_2 = u_2 \\ \dot{x}_3 = x_2 u_1 \\ \dot{x}_4 = x_3 u_1 \\ \qquad \vdots \\ \dot{x}_n = x_{n-1} u_1 \end{cases} \tag{7.5}$$

is said to be in *chained form.* Several robotic vehicles can be written, with a suitable transformation, in this form, including a unicycle ($n = 3$), a bicycle ($n = 4$), a bicycle with a trailer ($n = 5$) and with an arbitrary number m of trailers ($n = 4 + m$).

For the chained form system, letting

$$g_1 = (1\ 0\ x_2\ x_3\ \cdots\ x_{n-1})^T\ ;\ g_2 = (0\ 1\ 0\ 0\ \cdots\ 0)^T$$

one has

$$[g_1, g_2] = -\frac{\partial g_1}{\partial x} g_2 = -\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = -e_3$$

$$[g_2, [g_1, g_2]] = 0\ ;\ [g_1, [g_1, g_2]] = -\frac{\partial g_1}{\partial x}[g_1, g_2] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = e_4$$

and in general

$$ad^k_{g_1} g_2 = e_{k+2}$$

At the $(n-2)$-th level of Lie brackets, full rank of the accessibility distribution is obtained, and controllability follows for this driftless system.

It follows that even for a vehicle with any number of trailers, a parking maneuver can be found that brings the whole system in an arbitrary configuration. These maneuvers are more and more complex, however, as the order of Lie brackets used increases ◇

Chapter 8

Osservabilità di sistemi non lineari

[1] Si consideri un sistema nonlineare

$$\dot{x} = f(x, u), \; x(0) = \bar{x}_0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \; u \in U \subset \mathbb{R}^m \tag{8.1}$$

con le p uscite

$$y_j = h_j(x), \quad j = 1, 2, \ldots, p\,, \tag{8.2}$$

Supporremo che tutte le funzioni coinvolte siano analitiche. Ci chiediamo se è possibile ricostruire lo stato $x(t)$ a partire dalla conoscenza del modello del sistema, degli ingressi $u(t)$ al sistema in un intervallo $t \in [0, T]$, e delle corrispondenti uscite $y(t)$ nello stesso intervallo. Ovviamente, per la unicità delle soluzioni della equazione differenziale (8.1), la conoscenza di $x(t_a)$ in qualsiasi istante t_a equivale in linea teorica alla conoscenza di $x(t)$ per ogni altro istante t, ad esempio integrando le equazioni differenziali del modello.

La risposta al quesito posto è ovviamente negativa se esistono due stati iniziali che generano, quando il sistema è sottoposto agli stessi ingressi, esattamente le stesse uscite: in questo caso, i due stati sono detti *indistinguibili* dall'uscita. In un sistema nonlineare, è possibile che due stati iniziali siano indistiguibili per qualche ingresso, ma che esistano altri ingressi che producono uscite diverse: per maggiore precisione, potremo dire in questo caso che i due stati sono *condizionalmente indistinguibili*, mentre se ogni ingresso produce uscite identiche a partire da due stati iniziali diversi, questi saranno detti *assolutamente indistinguibili* o indistinguibili *tout-court*.

Definition 1. *Due stati iniziali $\bar{x}_1$ e $\bar{x}_2$ sono* indistinguibili *nell'intervallo $[0, T]$ se, $\forall u \in U$, le evoluzioni delle uscite a partire da $\bar{x}_1$ e $\bar{x}_2$ danno luogo, nello stesso intervallo di tempo di riferimento, alla medesima uscita.*

[1] Capitolo scritto con la collaborazione di Paolo Salaris

Useremo la notazione $\bar{x}_1 I_T^U \bar{x}_2$ per indicare due stati indistinguibili in $[0, T]$ per ingressi in $U \subseteq \{u(\cdot) : [0, T] \to \mathbb{R}^m\}$.

Come nel caso della raggiungibilità, lo studio della indistinguibilità nei termini più generali è di difficile soluzione.

Innanzitutto, nei sistemi nonlineari la distnguibilità di punti tra loro vicini non implica quella tra punti lontani.

Esempio 1. Si consideri il semplice sistema scalare con due uscite

$$\begin{cases} \dot{x} = u, \quad x \in \mathbb{R}^1 \\ h_1 = \sin x \\ h_2 = \cos x\,. \end{cases}$$

Il suo linearizato in un punto di equilibrio qualsiasi $\bar{x}$ ha le matrici $A = 0$, $B = 1$, $D - 0$ e

$$C = \begin{bmatrix} \cos \bar{x} \\ -\sin \bar{x} \end{bmatrix},$$

quindi è osservabile ovunque. Ciononostante, due stati iniziali che differiscono di multipli di π sono ovviamente indistinguibili. $\diamond$

Definizioni più ristrette per le quale esistono strumenti analitici di studio si ottengono studiando la *distinguibilità locale* tra stati $\bar{x}_1$ e $\bar{x}_2$ tra loro vicini. Per motivi analoghi a quelli discussi nel caso della raggiungibilità, è inoltre opportuno limitare ulteriormente il problema condizionando la classe degli ingressi U_ϵ ammissibili a quelli per i quali tutta la evoluzione dello stato resta in un intorno degli stati iniziali per tutto l'intervallo di tempo.

Sotto queste condizioni di tipo "locale-locale", diremo che un sistema è osservabile in un punto $\bar{x}_0$ se in un intorno di $\bar{x}_0$ non esiste alcun altro punto indistinguibile da $\bar{x}_0$ stesso.

8.1 Approccio Integrale e Gramiano di Osservabilità

Si indichi con $y_1(u, t)$ la funzione di uscita ottenuta a partire da $x(0) = \bar{x}_1$ per un certo ingresso $u \in U$, e con $y_2(u, t)$ quella a partire da $x(0) = \bar{x}_2$ applicando lo stesso ingresso. Per ipotesi di analiticità del sistema e degli ingressi, è possibile scrivere l'uscita $y_2(u, t)$ come sviluppo di Taylor nell'intorno di $\bar{x}_1$, ovvero come

$$y_2(u, t) = h\left(x(\bar{x}_2, u, t)\right) = h\left(x(\bar{x}_1, u, t)\right) + \left.\frac{\partial h}{\partial \bar{x}}\right|_{\bar{x}_1} (\bar{x}_2 - \bar{x}_1) + O(||\bar{x}_2 - \bar{x}_1||^2)\,,$$

da cui, posto $\delta\bar{x} = \bar{x}_2 - \bar{x}_1$ e $\delta y(u,t) = y_2(u,\, t) - y_1(u,\, t)$, si ha

$$\delta y = \left.\frac{\partial h}{\partial \bar{x}}\right|_{\bar{x}_1} \delta\bar{x} \; + O(||\bar{x}_2 - \bar{x}_1||^2)\,. \tag{8.3}$$

Quest'ultima può essere vista, ad ogni istante, come un sistema di p equazioni nelle n incognite $\delta\bar{x}$. Se si trascurano gli infinitesimi di ordine superiore e si tiene conto che le misure possono essere affette da rumore, l'insieme di equazioni (8.3) per ogni $t \in [0, T]$ sarà certamente inconsistente. Ci possiamo quindi porre il problema di risolverla nel senso dei minimi quadrati, rispetto ad una norma due con pesi $W(t)$ nello spazio delle uscite

$$\delta\bar{x}_{LS} = \arg\min_{\delta\bar{x}} \int_0^T \left(\delta y - \left.\frac{\partial h}{\partial \bar{x}}\right|_{\bar{x}_1} \delta\bar{x}\right)^T W(t) \left(\delta y - \left.\frac{\partial h}{\partial \bar{x}}\right|_{\bar{x}_1} \delta\bar{x}\right) \mathrm{d}t$$

Derivando l'integrale rispetto a $\delta\bar{x}$ ed uguagliando la derivata a zero si ottiene

$$\int_0^T \left(\left.\frac{\partial h}{\partial \bar{x}}\right|_{\bar{x}_1}^T W(t) \left.\frac{\partial h}{\partial \bar{x}}\right|_{\bar{x}_1}\right) \mathrm{d}t \; \delta\bar{x} = \int_0^T \left(\left.\frac{\partial h}{\partial \bar{x}}\right|_{\bar{x}_1}^T W(t)\, \delta y\right) \mathrm{d}t \tag{8.4}$$

Introducendo la matrice $\mathcal{G} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ data da

$$\mathcal{G} = \int_0^T \left.\frac{\partial h}{\partial \bar{x}}\right|_{\bar{x}_1}^T W(t) \left.\frac{\partial h}{\partial \bar{x}}\right|_{\bar{x}_1} \mathrm{d}t$$

e detta *Gramiano di osservabilità*, e la notazione δY per il secondo membro della (8.4), questa equazione è riscritta nella consueta forma di un sistema lineare di equazioni

$$\mathcal{G}\delta\bar{x} = \delta Y \tag{8.5}$$

Se il Gramiano ha pieno rango righe, ovvero se $\ker(\mathcal{G}) = \{0\}$, allora ad ogni $\delta\bar{x} \neq 0$ (ovvero ad ogni condizione iniziale $\bar{x}_2 \neq \bar{x}_1$) corrisponde una $\delta Y \neq 0$, quindi $\delta y(u,t)$ non identicamente nullo, ovvero l'uscita $y_2(u,\, t)$ differisce da $y_1(u,\, t)$. Di conseguenza, ogni punto di un intorno di $\bar{x}_1$ è distinguibile da $\bar{x}_1$ (eccetto $\bar{x}_1$ stesso), e diremo che il sistema è localmente osservabile in $\bar{x}_1$.

Secondo le consuete considerazioni di calcolo numerico sul sistema lineare di equazioni (8.5), il minimo valore singolare del Gramiano $\sigma_{min}(\mathcal{G})$ ed il suo numero di condizionamento $c(\mathcal{G}) = \sigma_{max}(\mathcal{G})/\sigma_{min}(\mathcal{G})$ sono indici di quanto la stima di $\delta\bar{x}$ è sensibile a piccole variazioni nella valutazione del Gramiano stesso (a seguito di errori nel modello) e nel termine noto δY (dovute anche al troncamento della serie ed al rumore di misura). In altri termini, il minimo valore singolare del Gramiano (o meglio l'inversa del suo numero

di condizione, che non risente della scalatura delle grandezze usate) offre un indice *quantitativo* di osservabilità, che diventa nullo solo quando il sistema perde osservabilità.

In base a quanto visto, il Gramiano dipende in generale dal punto $\bar{x}$ di cui si studia la osservabilità, dall'ingresso u applicato al sistema, e dalla lunghezza T dell'intervallo di misura (la dipendenza da T degli indici di osservabilità è non decrescente, essendo il termine integrando semi-definito positivo).

Osserviamo infine che si può scrivere

$$\frac{\partial y(\bar{x},\, u,\, t)}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial h(x)}{\partial x}\frac{\partial x(\bar{x}, u, t)}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial h(x)}{\partial x} S$$

dove S è la *matrice di sensibilità dello stato rispetto alle condizioni iniziali.* Per un sistema non lineare del tipo $\dot{x} = f(x, u)$, la matrice di sensibilità è soluzione della equazione

$$\dot{S} = \frac{\partial f(x,u)}{\partial x} S\,, \quad S(0) = I\,. \tag{8.6}$$

Infatti, si ha

$$\dot{S} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial x}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial}{\partial \bar{x}}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f(x,u)}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial f(x,u)}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial f(x,u)}{\partial x} S.$$

Esempio 2. Dato un sistema LTI del tipo $\mathbb{D}x = Ax + Bu$ con uscita $y = Cx$, si ha

$$y(\bar{x}, t) = C\, e^{At}\, \bar{x} + \int_0^t C e^{A(t-\tau)} B u(\tau)\, \mathrm{d}\tau$$

da cui

$$\frac{\partial y}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial h}{\partial x} S.$$

Si ha $\frac{\partial h}{\partial x} = C$, e dalla

$$\dot{S} = AS\,, \quad S(0) = I$$

si ottiene $S = e^{At}$. Il Gramiano di osservabilità assume pertanto la forma già nota dalla teoria dei sistemi lineari

$$\mathcal{G} = \int_0^T e^{A^T t}\, C^T\, W(t)\, C e^{At}\, \mathrm{d}t\,,$$

e non dipende dall'ingresso. Si ricorda che, se $W(t)$ è scelta in modo da riflettere la affidabilità della misura dell'uscita all'istante t in senso stocastico, $\mathcal{G}$ è una istanza della matrice di Fisher. ◇

Vale la pena sottolineare esplicitamente che il Gramiano di un sistema nonlineare dipende dagli ingressi applicati. Questa è una differenza essenziale rispetto ai sistemi lineari, in cui la ricostruibilità del sistema non dipende che dalla evoluzione libera. In particolare, è possibile che per un dato sistema esistano al contempo ingressi $u(t)$ che rendono $\mathcal{G}$ invertibile, ed altri che lo rendono singolare: questi ultimi vengono detti "bad inputs". Naturalmente, la dipendenza del Gramiano dagli ingressi implica anche che può essere utile in taluni casi scegliere il controllo $u \in U$ in modo da massimizzare un'indice di invertibilità del Gramiano stesso, ovvero la qualità della ricostruzione dello stato a partire dalle uscite.

Per sistemi non lineari, il calcolo esplicito della matrice di sensibilità è possibile in alcuni casi, ma in generale difficile in quanto richiede un'integrazione di equazioni differenziali.

Esempio 3. Si consideri il modello cinematico di un uniciclo con stati $q = [x,\, y,\, \theta]^T$. L'evoluzione di tale sistema a partire da condizioni iniziali $q_0 = [x_0,\, y_0,\, \theta_0]^T$ con controlli $u_1 = v(t)$ e $u_2 = \omega(t)$ è

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \int_0^t v(t)\cos\theta \; \mathrm{d}t \\ y(t) &= y_0 + \int_0^t v(t)\sin\theta \; \mathrm{d}t \\ \theta(t) &= \theta_0 + \int_0^t \omega(t) \; \mathrm{d}t\,. \end{aligned}$$

La matrice di sensibilità è quindi ottenibile derivando direttamente le espressioni $x(t)$, $y(t)$ e $\theta(t)$ sopra riportate rispetto alle condizioni iniziali q_0, ottenendo

$$S(q,t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -y(t) + y_0 \\ 0 & 1 & x(t) - x_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

che risolve la (8.6)

$$\dot{S} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -u\sin\theta \\ 0 & 0 & u\cos\theta \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} S, \quad S(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Considerando come uscite $h \in \mathbb{R}^2$ le misure delle coordinate del centro del veicolo, ovvero $h_1(q) = x$ e $h_2(q) = y$, il sistema linearizzato approssimato

non è osservabile avendosi, in un qualsiasi equilibrio $E \stackrel{def}{=} (q = \bar{q},\, u = 0)$,

$$A = \left.\frac{\partial f(q,u)}{\partial x}\right|_E = 0;\; C = \left.\frac{\partial h}{\partial q}\right|_E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Il Gramiano del sistema nonlineare è invece dato, per $W = I$, da

$$\begin{aligned} \mathcal{G} &= \int_0^T S^T \tfrac{\partial h}{\partial q}^T \tfrac{\partial h}{\partial q} S \,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & -y+y_0 \\ 0 & 1 & x-x_0 \\ -y+y_0 & x-x_0 & (x-x_0)^2+(y-y_0)^2 \end{bmatrix} \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

L'integrando è una matrice singolare per ogni t, con un kernel di dimensione uno descritto da

$$\operatorname{span}\begin{bmatrix} y-y_0 \\ x_0-x \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_0^T v\sin\theta\,\mathrm{d}t - y_0 \\ -\int_0^T v\cos\theta\,\mathrm{d}t + x_0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Il Gramiano perde invertibilità solo quanto tutti i kernel valutati nei diversi istanti di un intervallo di misura hanno intersezione non nulla: questo può avvenire solo per ingressi con $v = 0$, $\forall\omega(t)$. In questo caso, due condizioni iniziali che abbiamo uguale posizione del centro del veicolo ma differente angolo iniziale sono indistinguibili dalle uscite. Eccetto il caso in cui l'ingresso sia ristretto a questa particolare classe di *bad inputs*, non esiste alcuno stato indistinguibile dall'origine. ◇

La studio della osservabilità con il metodo integrale basato sul Gramiano può essere utilizzato ai fini di costruire un osservatore non lineare. Ai fini pratici, posto per semplicità $\bar{x}_1 = 0$, si potrà ad esempio raccogliere un numero N di campioni delle uscite $Y_i = y\,(t = T_0 + i\,\delta T)$ nell'intervallo $[T_0, T_f]$ ($\delta T = (T_f - T_0)/N$), valutare numericamente i termini delle equazioni (8.3), ottenendo

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left.\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial x(T_0+\delta T)}{\partial \bar{x}}\right|_0 \\ \vdots \\ \left.\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial x(T_f)}{\partial \bar{x}}\right|_0 \end{bmatrix} \bar{x},$$

e ottenere $\bar{x}$ per pseudoinversione. All'istante di campionamento successivo, si può traslare la finestra di misura in avanti (evitando così di allungare fuori misura la dimensione della equazione da risolvere) e utilizzare un metodo

ricorsivo di calcolo della pseudoinversa[2] Un metodo che utilizza le tecniche numeriche di Gauss-Newton per risolvere l'equazione di osservazione è stato descritto da G. Zimmer nel 1994[3].

Anche se si presta bene ad una implementazione numerica, spesso l'approccio integrale non permette di concludere sulla osservabilità o meno del sistema, a causa della difficoltà nel valutare analiticamente $S(t)$. Per questo fine ha grande valore l'approccio geometrico differenziale introdotto nella prossima sezione.

8.2 Approccio Analitico e Codistribuzione di Osservablità

Per studiare la distinguibilità tra due stati iniziali, ovvero verificare la diversità delle funzioni di uscita su di un intervallo, è possibile sfruttare l'ipotesi di analiticità dei sistemi e degli ingressi. Per il sistema affine nel controllo

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^{m} g_i(x)u_i, \; x(0) = \bar{x}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \; u \in U \subset \mathbb{R}^m \tag{8.7}$$

con le p uscite

$$y_j = h_j(x), \quad j = 1, 2, \ldots, p\,. \tag{8.8}$$

consideriamone lo sviluppo in serie di Taylor in $t = 0$

$$y_i(\bar{x},\, u,\, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left. \frac{\mathrm{d}^k\; y_i(\bar{x},\, u,\, t)}{\mathrm{d}t^k} \right|_{t=0} \frac{t^k}{k!}\,.$$

Le derivate che compaiono nello sviluppo nel tempo dell'uscita possono essere esplicitate nella forma

$$\begin{array}{rcl}
y_i & = & h_i\,; \\
\dot{y}_i & = & \frac{\partial h_i}{\partial x}\dot{x} = \frac{\partial h_i}{\partial x}\, f + \sum_j \frac{\partial h_i}{\partial x}\, g_j\, u_j \;=\; L_f h_i + \sum_j L_{g_j} h_i u_j; \\
\ddot{y}_i & = & \frac{\partial}{\partial x}\left(L_f h_i + \sum_j L_{g_j} h_i u_j\right)\left(f + \sum_j\, g_j u_j\right) + \sum_j L_{g_j} h_i \dot{u}_j = \\
 & = & L_f^2 h_i + \sum_j L_f L_{g_j} h_i u_j + \sum_j L_{g_j} L_f h_i u_j + \sum_k \sum_j L_{g_k} L_{g_j} h_i u_j u_k + \sum_j L_{g_j} h_i \dot{u}_j;
\end{array}$$

[2]si veda ad esempio *P.A. Janakiraman, S. Renganathan, Recursive computation of pseudo-inverse of matrices, Automatica, Volume 18, Issue 5, September 1982, Pages 631-633.*

[3]*G. Zimmer, State observation by on-line minimization International Journal of Control, Vol. 60, Iss. 4, 1994*

etc..

L'uscita $y_i(\bar{x},\, u,\, t)$, a partire da $\bar{x}$ può quindi essere scritta nella forma

$$y_i(\bar{x},\, u,\, t) = h_i(\bar{x}) + L_f h(\bar{x})t + L_g h(\bar{x})u(0)t + L_f^2 h(\bar{x})\frac{t^2}{2} + L_f L_g h(\bar{x})u(0)\frac{t^2}{2} + \\ + L_g L_f h(\bar{x})u(0)\frac{t^2}{2} + L_g^2 h(\bar{x})u^2(0)\frac{t^2}{2} + L_g h(\bar{x})\dot{u}(0)\frac{t^2}{2} + \dots$$

dove appaiono combinazioni degli ingressi (anch'essi sviluppabili in serie $u(t) = \sum_k \frac{\mathrm{d}^k\, u(t)}{\mathrm{d}t^k}\Big|_{t=0} \frac{t^k}{k!}$) e delle funzioni di $\bar{x}$ raccolte nel cosiddetto *spazio di osservazione*

$$\mathcal{O} = \{h(\bar{x}), L_f h(\bar{x}), L_{g_1} h(\bar{x}), \dots, L_{g_j} h(\bar{x}), L_{g_j} L_{g_k} h(\bar{x}), \dots\}\,.$$

Per confrontare questa uscita con quella che si otterrebbe a partire da $(\bar{x}+\delta x)$, ovvero $y_i(\bar{x} + \delta x,\, u,\, t)$, possiamo di nuovo sviluppare quest'ultima attorno alla prima. Per la differenza $\delta y = y(\bar{x} + \delta x,\, u,\, t) - y(\bar{x},\, u,\, t)$ si ottiene

$$\delta y = \mathrm{d}h(\bar{x})\,\delta x + \mathrm{d}L_f h(\bar{x})\,t\,\delta x + \mathrm{d}L_g h(\bar{x})\,u(0)\,t\,\delta x + \mathrm{d}L_f L_g h(\bar{x})\,u(0)\,\frac{t^2}{2}\,\delta x + \dots$$

La indistinguibilità di $\bar{x}$ da $\bar{x} + \delta x$ (cioè l'esistenza di un δx tale che, $\forall u(t)$ e $\forall t$, $\delta y(u, t) = 0$) impone che tutti i termini che nello sviluppo precedente moltiplicano t e/o $u(0)$, $\dot{u}(0), \dots$ siano nulli. In altri termini, $\bar{x} + \delta x$, con $\delta x \neq 0$ è indistinguibile da $\bar{x}$ se e solo se

$$\begin{aligned} \mathrm{d}h(\bar{x})\delta x &= 0 \\ \mathrm{d}L_f h(\bar{x})\delta x &= 0 \\ \mathrm{d}L_g h(\bar{x})\delta x &= 0 \\ \mathrm{d}L_f L_g h(\bar{x})\delta x &= 0 \\ &\vdots \end{aligned} \qquad \text{ovvero} \qquad \begin{bmatrix} \mathrm{d}h(\bar{x}) \\ \mathrm{d}L_f h(\bar{x}) \\ \mathrm{d}L_g h(\bar{x}) \\ \mathrm{d}L_f L_g h(\bar{x}) \\ \vdots \end{bmatrix} \delta x = \Theta(x)\delta x = 0\,.$$

Definiamo *codistribuzione di osservabilità* la codistribuzione che contiene i differenziali delle funzioni dello spazio di osservazione,

$$\mathrm{d}\mathcal{O} = \mathsf{span}\left\{\mathrm{d}h(x),\, \mathrm{d}L_f h(x),\, \mathrm{d}L_g h(x),\, \mathrm{d}L_f L_g h(x), \dots\right\}.$$

Theorem 7. *Sia n la dimensione dello spazio di stato del sistema nonlineare (8.7) con uscite (8.8). Se* $\mathsf{dim}\ \mathrm{d}\mathcal{O} = n$, *allora il sistema è localmente osservabile.*

Il teorema ha una interpretazione piuttosto diretta. Infatti, se $\mathrm{d}\mathcal{O}$ ha rango n, non esiste alcuna variazione delle condizioni iniziali δx non banale tale che $\mathrm{d}\mathcal{O}\,\mathrm{d}x = 0$, cioè che lasci l'uscita e tutte le sue derivate lungo le traiettorie del sistema invariate qualunque sia il controllo.

Se invece $\dim \mathrm{d}\mathcal{O} = d < n$ e d è costante in un intorno del punto $\bar{x}$, allora $\mathrm{d}\mathcal{O}^{\perp}$ è una distribuzione di dimensione $n - d$, ed è involutiva. Quindi per il teorema di Frobenius esistono d funzioni $\lambda_i(x)$ tali che $\mathrm{d}\lambda_i = \mathrm{d}\mathcal{O}$, le cui curve di livello individuano per intersezione una sottovarietà di dimensione $n-d$, per tutti i punti della quale (in un intorno di $\bar{x}$) le uscite sono invariate, qualunque sia l'ingresso.

Esempio 4. Si consideri il sistema lineare

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \qquad \begin{array}{ll} f(x) = Ax & g_i(x) = b_i \\ h_i(x) = c_i x & \end{array}$$

Lo spazio di osservazione è

$$\mathcal{O} = \\ \left\{h = Cx,\, L_f h = CAx,\, L_g h = CB,\, L_f L_f h = CA^2 x,\, L_g L_f h = CAB,\, L_f L_g h = 0,\, \cdot\right\}$$

quindi la codistribuzione di osservabilità è data da

$$\mathrm{d}\mathcal{O} = \mathsf{span}\left\{C,\, CA,\, CA^2 \cdots\right\}.$$

Per il teorema di Cayley Hamilton sappiamo che il massimo rango di $\mathrm{d}\mathcal{O}$ è già ottenuto includendo nella codistribuzione i covettori CA^{n-1}, da cui il consueto risultato per sistemi lineari.

La codistribuzione di osservabilità coincide quindi per i sistemi lineari con lo spazio-righe della matrice di osservabilità lineare; la distribuzione che la annichila coincide con il sottospazio di inosservabilità del sistema lineare (che ricordiamo essere il più grande sottospazio A-invariante contenuto nel kernel di C). $\diamond$

8.3 Approccio Geometrico Differenziale e Scomposizione di Osservabiiltà

Anche dal punto di vista della osservabilità nonlineare si ha una interessante scomposizione del sistema che generalizza quella standarda nei sistemi lineari, che richiamiamo qui rapidamente.

Per il sistema lineare $\dot{x} = Ax$, $y = Cx$, si consideri un cambiamento di coordinate $x = Tz$ con $T = \begin{bmatrix} T_O | T_{\bar{O}} \end{bmatrix}$, dove $T_{\bar{O}}$ è una matrice di base del sottospazio di inosservabilità $\ker O$. Si ricordi che quello di inosservabilità è il più grande sottospazio A–invariante contenuto nel kernel di C. Nelle nuove coordinate si ha

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{z}_O \\ \dot{z}_{\bar{O}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_O & 0 \\ A_{\bar{O},O} & A_{\bar{O}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_O \\ z_{\bar{O}} \end{bmatrix} \\ y &= \begin{bmatrix} C_O & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_O \\ z_{\bar{O}} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Tornando al caso nonlineare, consideriamo la codistribuzione $\Omega_0 = \mathrm{d}h$ generata dai differenziali delle uscite di (8.8), al cui annichilatore devono appartenere le condizioni iniziali $\delta\bar{x}$ che sono indistinguibili. Per assicurarsi che anche le soluzioni del sistema (8.7) a partire da $\delta\bar{x}$ rimarranno identiche, cerchiamo la più piccola codistribuzione che contiene Ω_0 e che è invariante rispetto ai campi di deriva e di controllo di (8.7). Si considera quindi la filtrazione

$$\begin{aligned} &\Omega_0 = \mathrm{span}\ \{\mathrm{d}h\}, \quad \Delta(x) = \mathrm{span}\ \big\{f(x), g_1(x), \dots g_m(x)\big\} \\ &\Omega_1 = \Omega_0 + L_\Delta \Omega_0 \ = \ \mathrm{span}\ \{\mathrm{d}h, L_\Delta\, \mathrm{d}h\} \\ &\quad \vdots \\ &\Omega_k = \Omega_{k-1} + L_\Delta \Omega_{k-1}\,. \end{aligned}$$

Se esiste un k tale che Ω_k è nonsingolare in $\bar{x}$ e $\dim \Omega_k = \dim \Omega_{k-1} = d$, allora la filtrazione si arresta, e si ha $\Omega_k =< \Delta | \,\mathrm{d}h >$.

Si osservi che, dalla identità $L_f\, \mathrm{d}\lambda = \mathrm{d}L_f\lambda$, segue che questa codistribuzione coincide con la codistribuzione di osservabilità, ovvero $\mathrm{d}\mathcal{O} =< \Delta | \,\mathrm{d}h >$.

Se la dimensione raggiunta da $< \Delta | \,\mathrm{d}h >$ è $d < n$, la distribuzione che la annichila $< \Delta | \,\mathrm{d}h >^\perp$ ha dimensione $n - d$ ed è involutiva. Si noti che, in analogia con la caratterizzazione geometrica del sottospazio di inosservabilità per i sistemi lineari, questa è la più grande distribuzione Δ-invariante che è contenuta in $\mathrm{d}h^\perp$. Esistono quindi d funzioni $\lambda(x)$ tali che $< \Delta | \,\mathrm{d}h >= \mathrm{span}\ \{\mathrm{d}\lambda\}$. Queste funzioni possono essere utilizzate per definire nuove variabili $\zeta_O \in \mathbb{R}^d$ da completare con altre variabili di stato $\zeta_{\bar{O}} \in \mathbb{R}^{n-d}$ in maniera tale da formare un cambio di variabili completo. Nelle nuove

coordinate $(\zeta_O, \zeta_{\bar{O}}) = \Phi(x)$, il sistema (8.7) e (8.8) diviene

$$\begin{aligned}
\dot{\zeta}_O &= f_O(\zeta_O) + \sum_{j=1}^{m} g_{2,j}(\zeta_O) u_j \\
\dot{\zeta}_{\bar{O}} &= f_{\bar{O}}(\zeta_O, \zeta_{\bar{O}}) + \sum_{j=1}^{m} g_{1,j}(\zeta_O, \zeta_{\bar{O}}) u_j \\
y_i &= h_i(\zeta_O), \ i = 1, 2, \ldots, p\,.
\end{aligned}$$

Chiaramente, ogni stato iniziale che differisce da $(\bar{\zeta}_{\bar{O}}, \bar{\zeta}_O)$ solo nella componente $\bar{\zeta}_{\bar{O}}$, è indistinguibile dall'uscita per qualsiasi ingresso u_i.

Esempio 5. Si consideri ancora un uniciclo cinematico $q = [x,\ y,\ \theta]^T$ e supponiamo di disporre della misura

$$h(q) = \frac{x^2 + y^2}{2}\,.$$

Si ha

$$\begin{aligned}
\Omega_0 &= \operatorname{span}\{\begin{bmatrix} x & y & 0 \end{bmatrix}\}, \quad \Delta = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \\
\Omega_1 &= \Omega_0 + L_\Delta \Omega_0 = \operatorname{rowspan} \begin{bmatrix} x & y & 0 \\ \cos\theta & \sin\theta & -x\sin\theta + y\cos\theta \end{bmatrix} \\
\Omega_2 &= \Omega_1 + L_\Delta \Omega_1 = \operatorname{rowspan} \begin{bmatrix} x & y & 0 \\ \cos\theta & \sin\theta & -x\sin\theta + y\cos\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta & -y\sin\theta - x\cos\theta \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Si osserva che $\dim\ = \Omega_2 = \dim\ = \Omega_1 = d = 2$, quindi la filtrazione può arrestarsi e si ha $< \Delta | \, \mathrm{d}h >= \mathrm{d}\mathcal{O} = \Omega_1$. La distribuzione annichilatrice

$$\mathrm{d}\mathcal{O}^\perp = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 1 \end{pmatrix}$$

ha dimensione $n - d = 1$ ed è involutiva. Il Teorema di Frobenius assicura l'esistenza di $d = 2$ funzioni alla intersezione delle cui curve di livello appartiene un insieme di punti indistinguibili. Queste funzioni sono in questo caso di facile individuazione (si ricordi ancora che $L_g \, \mathrm{d}h(x) = \mathrm{d}L_g h(x)$)

$$\begin{aligned}
\lambda_1(q) &= h(x) = \frac{x^2 + y^2}{2} \\
\lambda_2(q) &= L_{g_1} h(x) = x\cos\theta + y\sin\theta\,.
\end{aligned}$$

Ogni coppia di stati (x, y, θ) che hanno le stesse coordinate osservabili λ_1 e λ_2 sono quindi indistinguibili, dando la stessa uscita qualsiasi sia l'ingresso applicato. L'interpretazione fisica di questo risultato è facile. Stati con la stessa λ_1 infatti sono configurazioni del veicolo con centro alla stessa distanza dall'origine. Stati con la stessa λ_2 sono invece configurazioni per le quali il prodotto tra il versore della direzione di moto del veicolo $((\cos\theta \sin\theta)^T)$ ed il vettore che unisce il centro del veicolo all'origine $(xy)^T$, è uguale. Detta ρ la distanza dal centro e β l'angolo tra posizione e velocità, in altri termini, si ha $\lambda_1 = \rho^2/2$ e $\lambda_2 = \rho cos\beta$.

Tutte le condizioni iniziali del veicolo con pari distanza dall'origine e che vedono l'origine sotto lo stesso angolo sono quindi indistinguibili. Qualunque controllo applicato a queste condizioni iniziali produce la stessa uscita, come rappresentato in figura 8.1. In altre parole, le traiettorie che il veicolo traccia sul piano a partire da due configurazioni con ugual λ_1 e ugual λ_2 iniziali e con qualsiasi ingresso, differiscono solo per una rotazione rigida attorno all'origine, che è indistinguibile dall'uscita data. ◇

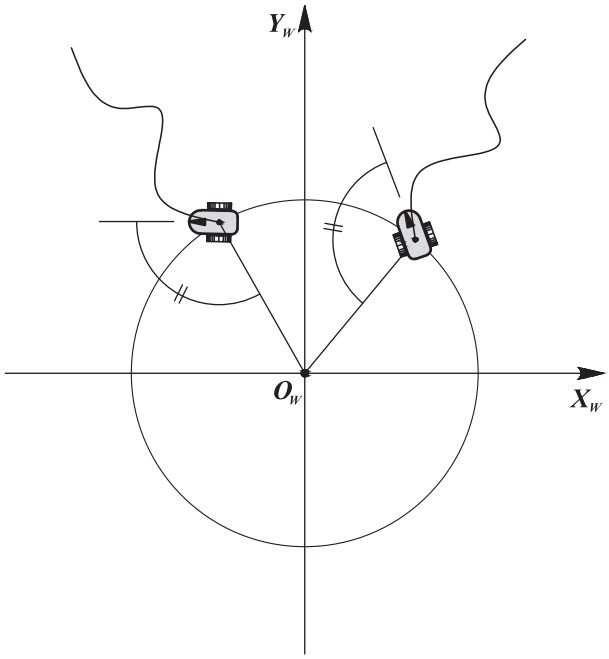


Figure 8.1: Esempio 5: condizioni iniziali che differiscono sono per una rotazione rigida attorno all'origine non sono distinguibili dall'uscita.

8.4 Applicazioni alla identificazione parametrica

Un caso di applicazione delle tecniche di osservazione nonlineare di grande interesse pratico riguarda lo studio della identificabilità, ovvero la possibilità di identificare parametri non noti ma costanti che compaiono nelle equazioni dinamiche di un sistema.

Esempio 6. Identificabilità dei parametri di un sistema lineare

Si consideri il semplicissimo caso di un sistema lineare a singolo stato del tipo

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a\,x + b\,u \\ y &= x \end{aligned}$$

con $x \in \mathbb{R}$, ed a e b due valori reali costanti ma non noti. Ci chiediamo se, a partire dalla misura dell'uscita (che coincide qui con lo stato) e dalla conoscenza dell'ingresso sia possibile identificare i parametri a e b. Si consideri uno stato esteso $\xi = [x,\ a,\ b]^T$ la cui dinamica è

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \begin{bmatrix} \xi_1\xi_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \xi_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ h(\xi) &= \xi_1. \end{aligned}$$

La filtrazione di osservabilità per questo sistema non lineare è data da

$$\Omega_0 = \mathrm{span}\{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\},\quad \Delta = \mathrm{span}\{f(\xi), g(\xi)\} = \left\{ \begin{bmatrix} \xi_1\xi_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \xi_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\Omega_1 = \Omega_0 + \mathrm{span}\{\mathrm{d}L_f h(\xi), \mathrm{d}L_g h(\xi)\} = \mathrm{rowspan} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \xi_2 & \xi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Come si può osservare, Ω_1 ha rango pieno per $\xi_1 \neq 0$, quindi il sistema è osservabile (ed i parametri a, b sono identificabili) attorno ad una condizione iniziale $\bar{x} \neq 0$. Nell'origine, ovvero per $\bar{x} = \xi_1 = 0$, Ω_1 è singolare. La filtrazione deve quindi procedere. Si ottiene

$$\begin{aligned} \Omega_2 &= \Omega_1 + \mathrm{span}\{L_f^2\,\mathrm{d}h(\xi), L_g L_f\,\mathrm{d}h(\xi)\} = \\ &= \Omega_1 + \mathrm{rowspan} \begin{bmatrix} \xi_2^2 & 2\xi_1\xi_2 & 0 \\ 0 & \xi_3 & \xi_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

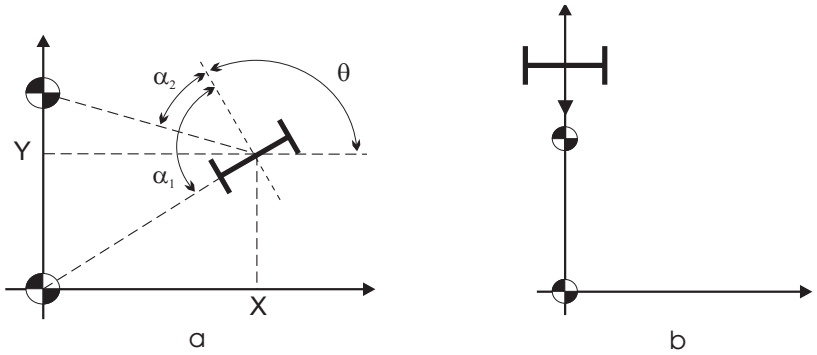


Figure 8.2: a) Problema di localizzazione di un uniciclo che osserva due punti fissi la cui posizione è nota. b) Caso di non osservabilità nel caso il controllo di rotazione non sia utilizzato.

Ω_2 ha rango pieno se $\xi_3 \neq 0$, quindi il sistema è completamente osservabile anche in un intorno dell'origine purchè $\xi_3 = b$ non sia nullo.

In configurazioni in cui sia $\xi_1 = \xi_3 = 0$, anche Ω_2 è singolare, e si dovrebbe procedere con un ulteriore passo della filtrazione a calcolare Ω_3. Si trova

$$\Omega_3 = \Omega_2 + \text{rowspan} \begin{bmatrix} \xi_2^3 & 3\xi_2^2\xi_1 & 0 \\ 0 & 2\xi_2\xi_3 & \xi_2^3 \end{bmatrix}$$

quindi anche Ω_3 è singolare in $\xi_1 = \xi_3 = 0$. La filtrazione dovrebbe proseguire fino a che si incontrasse eventualmente una distribuzione nonsingolare, che permetterebbe di decidere sulla osservabilità o meno in questi stati. Se tutte le codisribuzioni della filtrazione rimangono singolari, il problema è indecibile con questi strumenti.

Nel caso specifico, si può osservare che $\xi_1 = \xi_3 = 0$ significa che il sistema nelle condizioni nominali $\xi(0) = (0, a, 0)$ produce l'uscita $y\big((0, a, 0), u, t\big) \equiv 0$. In condizioni perturbate rispetto al solo secondo stato $\xi'(0) = (0, a', 0)$ si ha ugualmente $y\big((0, a', 0), u, t\big) \equiv 0$, da cui si evince che il sistema non è osservabile in questa particolare condizione. $\diamond$

8.4.1 Simultaneous Localization and Mapping (SLAM)

Si consideri ancora il modello cinematico di un uniciclo che ha a disposizione le misure degli angoli sotto i quali una telecamera o un laser a bordo del veicolo osserva due punti fissi di traguardo (detti *marker*),come rappresentato in figura 8.2-a. Posto $q = [x,\ y,\ \theta]^T$ il vettore di variabili di stato descriventi la generica configurazione del veicolo,

$$\begin{cases} \dot{q} = g_1(q)u_1 + g_2(q)u_2 = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_2 \\ \alpha_1 = \pi - \theta + \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \\ \alpha_2 = \pi - \theta - \arctan\left(\frac{y-d}{x}\right) \end{cases} \tag{8.9}$$

dove d è la distanza tra i due marker. Si noti che i punti in cui sono situati i markers sono da escludersi per la posizione del veicolo (in questi punti le funzioni h_1 e h_2 non sono definite). La codistribuzione di osservabilità è valutata come segue:

$$\Omega_0 = \mathsf{span}\{\mathrm{d}h_1,\ \mathrm{d}h_2\}; \quad \Delta = \mathsf{span}\{g_1(q),\ g_2(q)\},$$

dove

$$\begin{aligned} \mathrm{d}h_1 &= \begin{bmatrix} \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} & -1 \end{bmatrix} \\ \mathrm{d}h_2 &= \begin{bmatrix} \frac{d-y}{x^2+(d-y)^2} & \frac{x}{x^2+(d-y)^2} & -1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Il secondo passo della filtrazione fornisce

$$\Omega_1 = \Omega_0 + \mathsf{span}\{L_{g_1}\,\mathrm{d}h_1, L_{g_1}\,\mathrm{d}h_2, L_{g_2}\,\mathrm{d}h_1, L_{g_2}\,\mathrm{d}h_2\}.$$

Calcolando

$$\begin{aligned} L_{g_1}h_1 &= \frac{x\sin\theta - y\cos\theta}{x^2+y^2} \\ L_{g_2}h_1 &= -1 \\ L_{g_1}h_2 &= \frac{(d-y)\cos\theta + x\sin\theta}{x^2+(y-d)^2} \\ L_{g_2}h_2 &= -1 \end{aligned}$$

e usando la relazione $L_g\,\mathrm{d}h = \mathrm{d}L_g h$, si ottiene

$$\begin{aligned} \mathrm{d}L_{g_1}h_1 &= \begin{bmatrix} \frac{\sin\theta\left[x^2+y^2\right]-2x[x\sin\theta-y\cos\theta]}{\left[x^2+y^2\right]^2}, & \frac{-\cos\theta\left[x^2+y^2\right]-2y[x\sin\theta-y\cos\theta]}{\left[x^2+y^2\right]^2}, & \frac{x\cos\theta+y\sin\theta}{x^2+y^2} \end{bmatrix} \\ \mathrm{d}L_{g_1}h_2 &= \begin{bmatrix} \frac{\sin\theta\left[x^2+(d-y)^2\right]-2x[x\sin\theta+(d-y)\cos\theta]}{\left[x^2+(d-y)^2\right]^2}, & \frac{-\cos\theta\left[x^2+(d-y)^2\right]-2(d-y)[x\sin\theta+(d-y)\cos\theta]}{\left[x^2+(d-y)^2\right]^2}, & \frac{x\cos\theta-(d-y)\sin\theta}{x^2+(d-y)^2} \end{bmatrix} \\ \mathrm{d}L_{g_2}h_1 &= \mathrm{d}L_{g_2}h_2 = 0 \end{aligned}$$

La codistribuzione Ω_1 ha rango 3 laddove uno dei minori

$$\begin{aligned} D_1 &= \det \begin{bmatrix} \mathrm{d}h_1 \\ \mathrm{d}h_2 \\ \mathrm{d}L_{g_1}h_1 \end{bmatrix} = \frac{d(y-d)(y\cos\theta - x\sin\theta)}{\left[x^2+(y-d)^2\right]\left[x^2+y^2\right]^2} \\ D_2 &= \det \begin{bmatrix} \mathrm{d}h_1 \\ \mathrm{d}h_2 \\ \mathrm{d}L_{g_1}h_2 \end{bmatrix} = \frac{dy((y-d)\cos\theta - x\sin\theta)}{\left[x^2+(y-d)^2\right]\left[x^2+y^2\right]^2} \end{aligned}$$

è diverso da zero. Questo accade quando

$$D_1 = 0 \quad se \quad \begin{cases} y = d \\ \vee d = 0 \\ \vee \frac{y}{x} = \tan\theta \\ \vee \left(\theta = k\pi + \frac{\pi}{2} \wedge x = 0\right) \end{cases}$$

$$D_2 = 0 \quad se \quad \begin{cases} y = 0 \\ \vee d = 0 \\ \vee \frac{y-d}{x} = \tan\theta \\ \vee \left(\theta = k\pi + \frac{\pi}{2} \wedge x = 0\right) \end{cases}$$

Quindi Ω_2 ha dimensione 3 ovunque eccetto che per $d = 0$, cioé quando i due marker sono coincidenti, oppure per $\theta = k\pi + \frac{\pi}{2}$ e $x = 0$.

In questi punti di singolarità, si procede a valutare Ω_3, nella quale appare

$$L_{g_2}L_{g_1}h_1 = \frac{x\cos\theta + y\sin\theta}{x^2+y^2}$$

e

$$\mathrm{d}L_{g_2}L_{g_1}h_1 = \left[\frac{\cos\theta\left[x^2+y^2\right] - 2x[x\cos\theta + y\sin\theta]}{\left[x^2+y^2\right]^2}, \frac{\sin\theta\left[x^2+y^2\right] - 2y[x\cos\theta + y\sin\theta]}{\left[x^2+y^2\right]^2}, \frac{-x\sin\theta + y\cos\theta}{x^2+y^2}\right].$$

La codistribuzione Ω_3 è singolare se lo è Ω_2 e se inoltre si annulla il minore

$$D_3 = \det \begin{bmatrix} \mathrm{d}h_1 \\ \mathrm{d}h_2 \\ \mathrm{d}L_{g_2}L_{g_1}h_1 \end{bmatrix} = -\frac{d(y-d)(y\sin\theta + x\cos\theta)}{\left[x^2+(y-d)^2\right]\left[x^2+y^2\right]^2}$$

Si ha

$$D_3 = 0 \quad se \quad \begin{cases} y = d \\ \vee d = 0 \\ \vee \frac{y}{x} = -\tan\theta \\ \vee \left(\theta = k\pi + \frac{\pi}{2} \wedge y = 0\right) \end{cases}$$

I tre minori $D_, D_2, D_3$ si annullano contemporaneamente quindi solo quando $d = 0$. In questo caso, ovviamente, il sistema non é osservabile e gli stati indistinguibili appartengono alla superficie $\theta - \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \pi$.

Infine osserviamo cosa succede se si rinuncia ad uno degli ingressi.

1. Se rinuncio a ruotare ($\omega = 0$) nella filtrazione di osservabilità non appare $g_2(x)$, quindi la codistribuzione di osservabilità perde rango quando

$$\det \begin{bmatrix} dh_1 \\ dh_2 \\ dL_{g_1}h_1 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} dh_1 \\ dh_2 \\ dL_{g_1}h_2 \end{bmatrix} = 0$$

ovvero se

$$\begin{cases} \theta = k\pi + \frac{\pi}{2} \\ x = 0. \end{cases}$$

Quindi, se il veicolo si trova inizialmente sull'asse delle ordinate e si muove su di esso, come rappresentato in figura 8.2-b), la sua postura non è osservabile.

2. Se rinuncio ad avanzare ($v = 0$), ma ruoto solamente, nella filtrazione non appare $g_1(x)$, quindi la codistribuzione di osservabilità

$$\Omega_2 = \text{rowspan} \begin{bmatrix} dh_1 \\ dh_2 \\ dL_{g_2}h_1 \end{bmatrix} = \text{rowspan} \begin{bmatrix} dh_1 \\ dh_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ha sempre rango due, ed il sistema non é osservabile solo ruotando.

Nel caso più generale in cui oltre ai due punti di posizione nota (*marker*) si abbiano anche altri punti ignoti (*target*) che si vogliono individuare (figura 8.3), il problema di localizzazione sopra descritto diviene simultaneamente anche un problema di mappatura. L'insieme dei due problemi prende il nome di SLAM.

Formalmente, introdotto un target di coordinate (x_i, y_i), la descrizione (8.9) si modifica creando uno stato esteso $q_e = (x, y, \theta, x_i, y_i)$ e aggiungendo

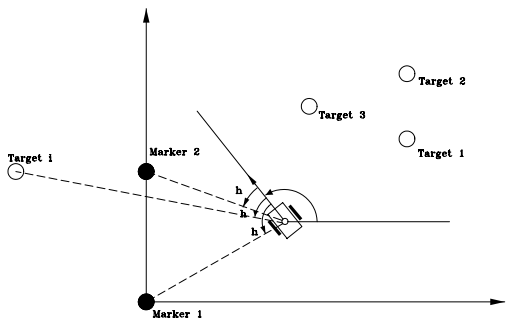


Figure 8.3: Veicolo in un ambiente sconosciuto con marker e target.

una equazione di misura

$$\begin{cases} \dot{q}_e = g_1(q_e)u_1 + g_2(q_e)u_2 = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_2 \\ \alpha_1 = \pi - \theta + \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \\ \alpha_2 = \pi - \theta - \arctan\left(\frac{y-d}{x}\right) \\ \alpha_i = \pi - \theta + \arctan\left(\frac{y-y_i}{x-x_i}\right) \end{cases}$$

La codistribuzione di osservabilità è valutata come segue:

$$\Omega_0 = \mathsf{span}\{\mathrm{d}h_1,\, \mathrm{d}h_2,\, \mathrm{d}h_3\}; \quad \Delta = \mathsf{span}\{g_1(q),\, g_2(q)\},$$

dove

$$\mathrm{d}h_1 = \begin{bmatrix} \dfrac{-y}{x^2+y^2} & \dfrac{x}{x^2+y^2} & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\mathrm{d}h_2 = \begin{bmatrix} \dfrac{d-y}{x^2+(d-y)^2} & \dfrac{x}{x^2+(d-y)^2} & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\mathrm{d}h_3 = \begin{bmatrix} \dfrac{y_i-y}{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2} & \dfrac{x-x_i}{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2} & -1 & \dfrac{y-y_i}{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2} & \dfrac{x_i-x}{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2} \end{bmatrix}.$$

Calcolando

$$
\begin{aligned}
L_{g_1} h_1 &= \frac{x \sin\theta - y \cos\theta}{x^2 + y^2} \\
L_{g_2} h_1 &= -1 \\
L_{g_1} h_2 &= \frac{(d-y)\cos\theta + x \sin\theta}{x^2 + (y-d)^2} \\
L_{g_2} h_2 &= -1 \\
L_{g_1} h_3 &= \frac{(y_i - y)\cos\theta + (x - x_i)\sin\theta}{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2} \\
L_{g_2} h_3 &= -1
\end{aligned}
$$

e usando la relazione $L_g \, \mathrm{d}h = \mathrm{d}L_g h$, si ottiene

$$
\mathrm{d}L_{g_1} h_1 = \left[\frac{\sin\theta\left[x^2+y^2\right] - 2x[x\sin\theta - y\cos\theta]}{\left[x^2+y^2\right]^2} \;,\; \frac{-\cos\theta\left[x^2+y^2\right] - 2y[x\sin\theta - y\cos\theta]}{\left[x^2+y^2\right]^2} \;,\; \frac{x\cos\theta + y\sin\theta}{x^2+y^2} \right]
$$

$$
\mathrm{d}L_{g_1} h_2 = \left[\frac{\sin\theta\left[x^2+(d-y)^2\right] - 2x\left[x\sin\theta + (d-y)\cos\theta\right]}{\left[x^2+(d-y)^2\right]^2} \;,\; \frac{-\cos\theta\left[x^2+(d-y)^2\right] - 2(d-y)\left[x\sin\theta + (d-y)\cos\theta\right]}{\left[x^2+(d-y)^2\right]^2} \;,\; \frac{x\cos\theta - (d-y)\sin\theta}{x^2+(d-y)^2} \right]
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}L_{g_1} h_3 = \Bigg[& \frac{2(x-x_i)(y-y_i)\cos\theta - (x-x_i+y-y_i)(x-x_i-y+y_i)\sin\theta)}{((x-x_i)^2+(y-y_i)^2)^2}, \; \frac{2(x-x_i)(y-y_i)\sin\theta - (x-x_i+y-y_i)(x-x_i-y+y_i)\cos\theta)}{((x-x_i)^2+(y-y_i)^2)^2}, \\
& \frac{(x-x_i)\cos\theta + (y-y_i)\sin\theta}{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2}, \; \frac{-2(x-x_i)(y-y_i)\cos\theta + (x-x_i+y-y_i)(x-x_i-y+y_i)\sin\theta}{((x-x_i)^2+(y-y_i)^2)^2}, \\
& \frac{-2(x-x_i)(y-y_i)\sin\theta + (x-x_i+y-y_i)(x-x_i-y+y_i)\cos\theta}{((x-x_i)^2+(y-y_i)^2)^2} \Bigg]
\end{aligned}
$$

$$
\mathrm{d}L_{g_2} h_1 = \mathrm{d}L_{g_2} h_2 = \mathrm{d}L_{g_2} h_3 = 0
$$

La codistribuzione Ω_1, riordinando i suoi covettori, è diagonale a blocchi. Il primo blocco sulla diagonale di dimensione 3×3 coincide con la codistribuzione Ω_1 calcolata nella sezione precedente per il caso di uniciclo con due marker ed è relativo alla osservabilità dello stato. Il secondo blocco sulla diagonale è invece relativo alla osservabilità del target:

$$
\Omega_1^{target} = \begin{bmatrix} \frac{y-y_i}{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2} & \frac{x_i-x}{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2} \\ \frac{-2(x-x_i)(y-y_i)\cos\theta + (x-x_i+y-y_i)(x-x_i-y+y_i)\sin\theta}{((x-x_i)^2+(y-y_i)^2)^2} & \frac{-2(x-x_i)(y-y_i)\sin\theta + (x-x_i+y-y_i)(x-x_i-y+y_i)\cos\theta}{((x-x_i)^2+(y-y_i)^2)^2} \end{bmatrix}
$$

Il suo determinante si annulla per $\theta = \arctan((y - y_i)/(x - x_i))$, ovvero se il veicolo punta nella direzione del target (figura 8.4). In tal caso in effetti l'unica uscita contenente informazioni su dove si trova il target è costantemente uguale a zero.

L'estensione ad un numero arbitrario di target non presenta alcuna difficoltà. La codistribuzione di osservabilità conterrà sulla diagonale un nuovo blocco relativo alla osservabilità dell *i-esimo* target.

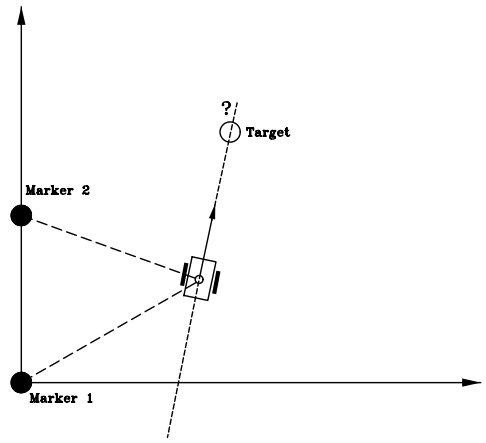


Figure 8.4: La posizione del target non è osservabile se il veicolo punta nella direzione del target stesso.

Chapter 9

Linearizzazione in retroazione

9.1 Introduzione

In questo capitolo consideremo quali risultati si possano ottenere con il controllo nonlineare basato su tecniche di linearizzazione in retroazione, *(Feedback Linearization)* per due dei problemi fondamentali del controllo, ovvero la stabilizzazione e l'inseguimento (o tracking) di riferimenti desiderati, per sistemi nonlineari, che vadano al di là di quanto già noto dalle tecniche che usano approssimazioni lineari dei sistemi.

Come noto, il problema della *stabilizzazione* consiste nel trovare un ingresso $u(x)$ tale da rendere il sistema nonlineare $\dot{x} = f(x, u)$, asintoticamente – e se possibile esponenzialmente — stabile attorno ad un punto di equilibrio x_0. Il problema dell'*inseguimento* si riferisce invece ad un modello ingresso-uscita

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u), \quad x(0) = x_0 \\ y &= h(x) \end{aligned}$$

dove, per un desiderato riferimento $y_d(t)$, si cerchi di trovare ingressi tali che l'uscita vi converga

$$\lim_{t \to \infty} y(x_0, u(\cdot), t) = y_d(t), \forall x_0.$$

Per questi problemi esistono soluzioni di controllo basate sui metodi di linearizazione approssimata, che hanno molti vantaggi derivanti dalla vastezza dei risultati sia di analisi che di sintesi che si hanno in quei casi. Al contrario, il controllo basato su tecniche di linearizzazione in retroazione si basa su una teoria più generale e pertanto più difficile e meno completa, ed ha in generale alcuni svantaggi. Tra questi, ad esempio, vi è l'indisponibilità di tecniche del tutto sistematiche di costruzione di osservatori dello stato e di versioni generali del principio di separazione, e la caratterizzazione della

robustezza dei risultati agli errori di modello ad oggi ancora non del tutto soddisfacente. Per contro, il controllo con linearizzazione in retroazione ha vantaggi che includono la validità dei risultati su insiemi dello spazio di stato più ampi e la stabilizzazione di sistemi il cui linearizzato abbia sottosistemi non raggiungibili solo marginalmente stabili.

9.2 Linearizzazione per Cambiamento di Variabili

In questo capitolo affronteremo il problema di trasformare sistemi non lineari in sistemi lineari, senza ricorrere ad approssimazioni. In questo senso, possiamo innanzitutto porci il problema di capire se per un dato sistema è possibile trovare nuove coordinate che lo rendano lineare. Dato il sistema

$$\dot{x} = f(x) + \sum_j g_j(x) u_j$$

ed un punto di equilibrio $f(x_0) = 0$, ci chiediamo in altri termini se esiste un cambio di variabili $z = \Phi(x)$ con $\Phi(x_0) = 0$ e tale per cui

$$\dot{z} = \left.\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right|_{x=\Phi^{-1}(z)} (f(\Phi^{-1}(z)) + \sum_j g_j(\Phi^{-1}(z)) u_j) = Az + Bu.$$

Se questo è possibile, il sistema originale è sostanzialmente lineare, anche se presentato in forma travisata.

Esempio 1. Si consideri il sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\cos(\arcsin x_1)[x_2^{\frac{1}{3}} - u_1] \\ \dot{x}_2 &= 3x_2^{\frac{2}{3}} \arcsin x_1 + 3x_2 \end{aligned}$$

ed il cambiamento di variabili

$$\begin{aligned} z_1 &= \arcsin x_1 \\ z_2 &= x_2^{\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

Con semplici calcoli si ottiene

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \left.\frac{1}{\cos(\arcsin x_1)} \dot{x}_1\right|_{x=\Phi^{-1}(z)} = \left. -x_2^{\frac{1}{3}} + u_1\right|_{x=\Phi^{-1}(z)} = -z_2 + u_1 \\ \dot{z}_2 &= \left.\tfrac{1}{3} x_2^{-\frac{2}{3}}\right|_{x=\Phi^{-1}(z)} \dot{x}_2 = z_1 + z_2 \end{aligned}$$

quindi

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

◇

L'esempio fatto è chiaramente di natura accademica - per la stragrande maggioranza dei sistemi nonlineari, non risulterebbe possibile applicare questo metodo. Una condizione necessaria e sufficiente per riconoscere i casi in cui è possibile viene dal seguente teorema.

Theorem 8. *Dato il sistema*

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^{m} g_i(x) u_i$$

con $f(x_0) = 0$*, esiste un cambiamento di variabili* $\Phi(x) = z$ *tale che* $\dot{z} = Az + Bu$*, con* (A, B) *coppia controllabile, se e solo se*

a) $\dim(\text{span}\ \{ad_f^j g_i(x),\ i = 1, \ldots, m;\ j = 0, \ldots, n-1\}) = n\ \forall x \in \mathcal{B}(x_0)$*;*

b) $[ad_f^k g_i, ad_f^l g_j] = 0\ \forall i, j, k, l;\ x \in \mathcal{B}(x_0)$.

La condizione (a) corrisponde a chiedere che il linearizzato approssimante sia controllabile. La condizione (b) è una condizione analoga a quella di rettificazione simultanea dei campi $g_i(x)$, che rappresenta una limitazione fortissima dei sistemi cui questa linearizzazione si può applicare.

9.3 Linearizzazione in Retroazione I/O per sistemi SISO

I casi in cui si verificano le ipotesi del teorema 8 sono molto rari in pratica. In effetti, avendo il progettista a disposizione gli ingressi, egli ha la possibilità di sfruttare non solo i cambiamenti di variabile, ma anche la retroazione per riportare il sistema ad una forma lineare, nella quale poi applicare le tecniche note del controllo lineare. Il problema di trovare una retroazione e un cambiamento di variabili che rendano lineare esattamente un dato sistema nonlineare è un problema di molto maggiore interesse, quindi, ed è detto problema della *linearizzazione in retroazione*.

Vedremo adesso due esempi elementari che possono servire a capire gli sviluppi successivi più direttamente.

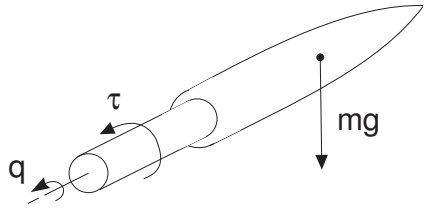


Figure 9.1: Un link che ha possibilità di ruotare attorno ad un perno attuato da una sorgente di coppia.

Esempio 2. Singolo Link

Scriviamo l'equazione della dinamica di un link di lunghezza L, massa m, e inerzia I, collegato ad un attuatore che genera una coppia τ

$$I\ddot{q} + mgL\sin q = \tau$$

dove q rappresenta la posizione del link, e g l'accelerazione gravitazionale (vedi Fig. 9.1).

Si noti che, nonostante le ipotesi del teorema 8 siano verificate (i semplici calcoli sono lasciati per esercizio), non è immediato determinare un cambiamento di base per poter effettivamente eseguire la linearizzazione. Scelta invece la semplice la legge di retroazione

$$\tau = mgL\sin q + Iv \tag{9.1}$$

dove v è il nuovo ingresso, si ottiene immediatamente

$$\ddot{q} = v$$

ovvero in forma di stato (ponendo $x_1 = q$, $x_2 = \dot{q}$)

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v$$

In questo caso, una semplice retroazione nonlineare degli stati sugli ingressi (9.1) ha trasformato il sistema originale in un doppio integratore lineare senza introdurre alcuna approssimazione.

Si consideri adesso lo stesso link, ma si introduca nel modello una deformabilità elastica non trascurabile tra l'attuatore e l'asse del link[1]. Le

[1] la deformabilità può essere dovuta alla non-idealità di un riduttore meccanico, ad esempio, oppure essereintrodotta intenzionalmente, come nei Series Elastic Actuators (SEA).

equazioni del sistema diventano in questo caso

$$\begin{cases} I\ddot{q}_1 + mgL\sin q_1 + k(q_1 - q_2) = 0 \\ J\ddot{q}_2 - k(q_1 - q_2) = \tau \end{cases}.$$

Il calcolo di un controllo linearizzante non è più immediato come nel caso precedente, perchè adesso il controllo appare nella seconda equazione, mentre la nonlinearità nella prima.

Passando ad una descrizione nello spazio di stato ponendo $x = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & \dot{q}_1 & \dot{q}_2 \end{bmatrix}$, si ha

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ -\frac{mgL}{I}\sin x_1 - \frac{k}{I}(x_1 - x_2) \\ \frac{k}{J}(x_1 - x_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix}\tau.$$

Assegniamo alla grandezza che si desidera controllare, ovvero la posizione del link, il ruolo di uscita del sistema, ovvero

$$y = x_1 = q_1,$$

e calcoliamo le sue derivate (ponendo per brevità $a = \dfrac{mgL}{I}$, $b = \dfrac{k}{I}$):

$$\begin{aligned} \dot{y} &= x_3 \\ \ddot{y} &= -a\sin x_1 - b(x_1 - x_2) \\ y^{(3)} &= -a\cos x_1\dot{x}_1 - b\dot{x}_1 + b\dot{x}_2 = -a\cos x_1 x_3 - bx_3 + bx_4 \\ y^{(4)} &= a\sin x_1 x_3^2 - a\cos x_1\dot{x}_3 - b\dot{x}_3 + b\dot{x}_4 = \\ &= \Big[a\sin x_1 x_3^2 + (a\cos x_1 + b)(a\sin x_1 + b(x_1 - x2) + b\tfrac{k}{J}(x_1 - x_2)\Big] + \tfrac{b}{J}\tau \\ &= q(x) + \tfrac{b}{J}\tau \end{aligned}$$

dove annotiamo con $q(x)$ la funzione contenuta nella parantesi quadra del passaggio precedente. Nella derivata quarta dell'uscita appare quindi per la prima volta l'ingresso. Se scegliamo

$$\tau = -q(x)\frac{J}{b} + \frac{J}{b}v$$

si ottiene

$$y^{(4)} = v,$$

Quindi, senza introdurre alcuna approssimazione, il sistema è trasformato in un sistema lineare (una catena di quattro integratori). $\diamond$

Cerchiamo adesso di generalizzare l'idea introdotta nell'esempio precedente, ovvero sostanzialmente di derivare l'uscita del sistema sino a quando non appare esplicitamente l'ingresso, per poi usare questo per cancellare le nonlinearità. Per il sistema SISO strettamente proprio

$$\begin{array}{rcl} \dot{x} & = & f(x) + g(x)u, \quad x(0) = x_0 \\ y & = & h(x), \end{array} \tag{9.2}$$

derivando l'uscita una prima volta si ha

$$\dot{y} = \frac{\partial h}{\partial x}\dot{x} = \mathrm{d}h(f(x) + g(x)u) = L_f h(x) + L_g h(x)\, u.$$

Se la funzione $L_g h(x)$ che moltiplica u è identicamente nulla in tutto un intorno di x_0, anche nella derivata prima dell'uscita non apparirà l'ingresso. Con un piccolo abuso di notazione, indicheremo questa condizione con $L_g h(x) \equiv 0$. Supponiamo che questa condizione di identica nullità si ripeta per r volte, ovvero

$$\begin{array}{rcl} \ddot{y} & = & \dfrac{\partial L_f h}{\partial x}\dot{x} = L_f^2 h \\ & \vdots & \\ y^{(r)} & = & L_f^{(r)} h + L_g L_f^{(r-1)} h\, u. \end{array}$$

e valga quindi

H1 $L_g L_f^i h(x) \equiv 0, \quad i = 0, 1, \ldots, r-2$

H2 $L_g L_f^{(r-1)} h(x_0) \neq 0$

Sotto le ipotesi H1 e H2 il sistema si dice *di grado relativo r*. Nel caso in cui la H1 sia verificata, ma invece che la H2 valga $L_g L_f^{(r-1)} h(x) \not\equiv 0$ pur con $L_g L_f^{(r-1)} h(x_0) = 0$ (ovvero esistano punti arbitrariamente vicini a x_0 in cui $L_g L_f^{(r-1)} h(x) \neq 0$), si dice che il grado relativo non è definito.

Il grado relativo di un sistema rappresenta quindi il numero di volte che si deve derivare la sua uscita per far comparire l'ingresso u.

Osservazione. Applicando questa definizione ai sistemi lineari, dove il grado relativo è tipicamente introdotto come la differenza poli-zeri nella funzione di trasferimento, possiamo verificare la corrispondenza delle definizioni. Si consideri per semplictà un sistema SISO

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

con f.d.t.

$$G(s) = C\,(sI - A)^{-1}\,B = \frac{b_0 + b_1 s + \cdots + b_{n-r+1}s^{n-r}}{a_0 + a_1 s + \cdots + a_n s^n}.$$

Il grado relativo r coincide con il primo coefficiente di Markov non nullo:

$$\begin{array}{l} L_g(Cx) = CB = 0 \\ L_g L_f(Cx) = CAB = 0 \\ \vdots \\ L_g Lf^{r-1}(Cx) = CA^{r-1}B \neq 0 \end{array},$$

come è evidente se si considera il sistema in forma canonica di controllo. $\diamond$

Osservando dunque l'espressione della derivata r-esima di y, possiamo scegliere una retroazione

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v \tag{9.3}$$

con

$$\alpha(x) = -\frac{L_f^r h}{L_g L_f^{r-1} h} \quad \beta(x) = \frac{1}{L_g L_f^{r-1} h}.$$

ottenendo $y^{(r)} = v$.
Possiamo usare le derivate successive di y per un cambio di variabili

$$\begin{array}{ll} z_1 & = y = h(x) \\ z_2 & = \dot{y} = L_f h(x) \\ \vdots & \\ z_r & = y^{(r-1)} = L_f^{r-1} h(x) \end{array}$$

Si può verificare infatti [2] che le r funzioni

$$\Phi(x) = \begin{bmatrix} h(x) \\ L_f h(x) \\ L_f^2 h(x) \\ \vdots \\ L_f^{r-1} h(x) \end{bmatrix} \tag{9.4}$$

sono indipendenti, ovvero che la codistribuzione

$$span\left\{dh(x),\, dL_f h(x),\, \ldots,\, dL_f^{r-1} h(x)\right\}$$

[2] Per la dimostrazione vedi Lemma 4.1.1 sul testo "Nonlinear Control Systems" di A.Isidori.

è nonsingolare e ha dimensione r.

Dimostrazione (cenno). L'indipendenza delle r funzioni si può ricavare dalla (6.16) e dalle sue iterazioni, da cui si può osservare che le condizioni

$$L_g h(x) = L_g L_f h(x) = \ldots = L_g L_f^k h(x) \equiv 0$$

e

$$L_g h(x) = L_{[f,g]} h(x) = \ldots = L_{ad_f^k g} h(x) \equiv 0$$

sono equivalenti. Si ha quindi che

$$\langle dL_f^j h(x),\, ad_f^i g(x) \rangle \equiv 0,\ \ i + j \leq r - 2$$

e

$$\langle dL_f^j h(x_0),\, ad_f^i g(x_0) \rangle \neq 0,\ \ i + j = r - 1.$$

Queste condizioni possono essere riscritte in forma matriciale

$$\begin{bmatrix} 0 & \ldots & \langle dh(x_0),\, ad_f^{r-1} g(x_0) \rangle \\ 0 & \ldots & \star \\ \cdot & \ldots & \star \\ \langle dL_f^{r-1} h(x_0),\, g(x_0) \rangle & \star & \star \end{bmatrix} = \tag{9.5}$$

$$= \begin{bmatrix} dh(x_0) \\ dL_f h(x_0) \\ \ldots \\ dL_f^{r-1} h(x_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g(x_0) & ad_f g(x_0) & \ldots & ad_f^{r-1} g(x_0) \end{bmatrix} \tag{9.6}$$

il che mostra come il rango della matrice sia r, e pertanto anche le r funzioni $h(x)$, $L_f h(x)$, $\ldots L_f^{r-1} h(x)$ sono indipendenti in un intorno di x_0. ◇

Nel caso particolare in cui il sistema abbia grado relativo $r = n$ rispetto all'uscita y, le n funzioni (9.4) rappresentano un cambio di variabile che assieme al controllo (9.3) linearizza completamente il sistema.

posso scrivere il sistema nelle nuove coordinate[3] ed ottenere una *linearizzazione esatta* in feedback, ovvero il sistema 9.2 può essere portato in forma 9.11.

[3]Se $L_g L_f^k h = 0$, $\forall k \Rightarrow h(x)$ non dipende da u; infatti sotto queste ipotesi lo sviluppo in serie di Taylor di $h(x)$ attorno ad un punto x_0 assume la forma:

$$\sum_{k=0}^{\infty} L_f^k h(x)\Big|_{x=x_0} \frac{(t - t_0)^k}{k!}.$$

$$\begin{cases} \dot{z}_1 & = z_2 \\ \vdots & \\ \dot{z}_{n-1} & = z_n \\ \dot{z}_n & = b(z) + a(z)u \end{cases}$$

che corrisponde ad un sistema lineare con reazione del tipo scelto, $u = -\frac{b(z)}{a(z)} + \frac{v}{a(z)}$.

Ovviamente, il fatto che un sistema abbia grado relativo $r = n$ dipende anche dalla funzione di uscita $h(x)$ scelta. dimostrare che la condizione di feedback linearizzabilità in retroazione ingresso-stati vista in precedenza è equivalente alla esistenza di una funzione $h(x)$ rispetto alla quale il sistema ha grado relativo pieno $r = n$: in questo caso l'uscita $h(x)$ può coincidere con la prima coordinata del cambio di variabili linearizzante $\Phi_1(x)$.

Cerchiamo di capire per quali sistemi è possibile trovare $\lambda(x)$, che possa soddisfare:

$$\begin{cases} L_g h(x) = L_g L_f h(x) = \dots L_g L_f^{n-2} h(x) = 0 \\ L_g L_f^{n-1} h(x) \neq 0 \end{cases}$$

equivalente a

$$\begin{cases} L_g \lambda(x) = L_{ad_f g} \lambda(x) = \cdots = L_{ad_f^{n-2} g} \lambda(x) = 0 \\ L_{ad_f^{n-1} g} \lambda(x) \neq 0 \end{cases}$$

(abbiamo supposto $r = 1$, allora $n - r - 1 = n - 2$).

Theorem 9. *Condizione Necessaria e Sufficiente affinché esista una funzione $\lambda(x)$ che, presa come uscita del sistema $\dot{x} = f(x) + g(x)u$ con $f(x_0) = 0$, dia grado relativo n*

ovvero

affinché esistano un cambiamento di variabili $\Phi(x)$ e le funzioni di retroazione statica $\alpha(x)$ e $\beta(x)$ tali da linearizzare il sistema detto

è che

A) $rank[g(x_0)\ ad_f g(x_0)\ \dots\ ad_f^{n-1} g(x_0)] = n$;

B) $span\{g, ad_f g, \dots, ad_f^{n-2} g\}$ sia involutivo.

Nel caso in cui esista un grado relativo $r < n$, si può comunque procedere ad una linearizzazione esatta, ancorché parziale.

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = h(x) \end{cases}$$

$$L_g L_f^i h(x) = 0 \quad i = 0, 1, \ldots, r-2$$

$$L_g L_f^{r-1} h(x) \neq 0$$

$$r < n.$$

Le r funzioni Φ_i $i = 1, \ldots, r$ indipendenti di cui si dispone possono essere utilizzate come parte di un cambiamento di variabili

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \Phi_1(x) = h(x) \\ \xi_2 &= \Phi_2(x) = L_f h(x) \\ &\vdots \\ \xi_r &= \Phi_r(x) = L_f^{r-1} h(x) \end{aligned}$$

Per costruire un cambiamento di variabili completo, si devono aggiungere $n - r$ funzioni $\zeta_1 = \Phi_{r+1}(x), \ldots, \zeta_{n-r} = \Phi_n(x)$ indipendenti da queste e tra loro. Trovare queste $n - r$ funzioni "di complemento" è in generale facile, essendo esse soggette alla sola condizione che valga

$$\det \left(\frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} \Phi_1(x) \\ \vdots \\ \Phi_r(x) \\ \Phi_{r+1}(x) \\ \vdots \\ \Phi_n(x) \end{bmatrix} \right) \neq 0$$

per tutti gli stati nella regione d'interesse. Le nuove variabili di stato sono dunque date da $(\xi, \zeta) = \Phi(x)$. La dinamica delle prime r nuove variabili è ancora

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= L_f h(x) = \xi_2 \\ &\vdots \\ \dot{\xi}_{r-1} &= L_f^{r-1} h(x) = \xi_r \\ \dot{\xi}_r &= L_f^r h(x) + L_g L_f^{r-1} h(x) u \\ &= b(\xi, \zeta) + a(\xi, \zeta) u. \end{aligned}$$

dove l'ultima equazione, con il controllo

$$u = -\frac{b(\xi,\zeta)}{a(\xi,\zeta)} + \frac{1}{a(\xi,\zeta)}v$$

diviene

$$\dot{\xi}_r = v.$$

Per la dinamica delle altre $n-r$ variabili non ci possiamo aspettare nulla di speciale, avendosi in generale

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}_1 &= q_1'(\xi,\zeta) + p_1'(\xi,\zeta)\, u \\ &\vdots \\ \dot{\zeta}_{n-r} &= q_{n-r}'(\xi,\zeta) + p_{n-r}'(\xi,\zeta)\, u. \end{aligned}$$

È possibile peraltro scegliere le variabili complementari in modo che

$$L_g\Phi_i(x) = 0 \quad r+1 \le i \le n.$$

In questo caso si ha

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}_1 &= L_f\Phi_{r+1}(x) + L_g\Phi_{r+1}(x)u = q_1'(\xi,\zeta) \\ &\vdots \\ \dot{\zeta}_{n-r} &= q_{n-r}'(\xi,\zeta) \end{aligned}$$

con $x = \Phi^{-1}(\xi,\zeta)$.
Cosicchè, la dinamica delle variabili complementari oltrechè ininfluente sull'uscita, è indipendente dagli ingressi.
Nelle nuove coordinate, possiamo dunque riscrivere il sistema in quella che viene detta "forma normale":

$$\begin{cases} \dot{\xi} = A_0\xi + b_0 v \\ \dot{\zeta} = q(\xi,\zeta) + p(\xi,\zeta)v \\ y = \xi_1 = C_0\xi \end{cases} \tag{9.7}$$

dove

$$\xi = \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_r \end{bmatrix}; \quad \eta = \begin{bmatrix} z_{r+1} \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix};$$

$$\begin{aligned} A_0 &= \left[\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \vdots & & I & \\ 0 & & & \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 \end{array}\right]; \quad B_0 = \left[\begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \hline 1 \end{array}\right]; \\ C_0 &= \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \end{array}\right]. \end{aligned}$$

e l'ingresso in retroazione linearizzato è

$$u = -\frac{b(\xi,\eta)}{a(\eta,\xi)} + \frac{1}{a(\xi,\eta)}v$$

Se per le variabili ζ vale $L_g\Phi_{r-1}(x) = 0$, si avrà più semplicemente

$$\dot{\zeta} = q(\xi,\zeta),$$

in cui non appare direttamente la dipendenza della dinamica di ζ da v, che comunque rimane legata attraverso l'evoluzione di ξ.

Da un punto di vista ingresso-uscita, il sistema è perfettamente linearizzato. La sua f.d.t. è quella di una catena di r integratori,

$$\frac{y(s)}{v(s)} = \frac{1}{s^r}.$$

A questo sistema è facilmente applicabile una ulteriore retroazione $v = K\xi$ che ne alloca gli autovalori nelle posizioni desiderate per stabilizzarlo. È anche facile progettare per questo sistema lineare un controllore che permette di eseguire un inseguimento asintotico di un riferimento dato $y_d(t)$ con una tecnica a modello interno $v = y_d^{(r)} + Ke$, dove e è un vettore degli errori di inseguimento in cui $e_i = y_d^{(i-1)} - y^{(i-1)}$, $i = 1,\ldots,r$.

9.3.1 La Zero Dinamica

Resta naturalmente da considerare la dinamica delle variabili ζ. Questa non gioca alcun ruolo nel rapporto ingresso-uscita tra y e v, essendo l'uscita completamente disaccoppiata dalle variabili ζ, che non appaiono né direttamente, né indirettamente attraverso ξ. In effetti, la retroazione stabilizzante ha reso questa dinamica completamente inosservabile dall'uscita y.

La stabilizzazione del sottosistema linearizzato ingresso-uscita d'altronde è solo "esterna", e non implica che il sistema nel suo complesso non possa avere componenti divergenti, che possono essere inaccettabili.

È quindi fondamentale studiare cosa accade della dinamica delle variabili inosservabili ζ. Per fare questo, cerchiamo di caratterizzare se esistono e quali sono i moti del sistema complessivo (9.7) che sono compatibili con il mantenimento dell'uscita identicamente a zero.

Dalla condizione $y(t) = \xi_1(t) \equiv 0$ si ricava che deve essere anche $\dot{\xi}_1(t) = \xi_2(t) \equiv 0$. Proseguendo in modo simile si ottiene che, per mantenere identicamente a zero l'uscita, deve valere $\xi_i(t) \equiv 0\ \forall i = 1,\ldots,r$. Dalla $\dot{\xi}_r(t) = v$

si ha anche che necessariamente deve essere $v(t) = 0$. La dinamica compatibile con uscita identicamente nulla, detta anche "zero dinamica", è quindi completamente descritta da

$$\dot{\zeta} = q(0, \eta) \quad \forall \zeta_0.$$

L'importanza dello studio della zero dinamica discende dal seguente teorema.

Theorem 10. *Con riferimento alla forma normale*

$$\begin{cases} \dot{\xi} &= A_0\xi + B_0 v \\ \dot{\zeta} &= q(\xi, \zeta) + p(\xi, \zeta)v \\ y &= C_0\xi, \end{cases}$$

si supponga che la Zero Dinamica $\dot{\zeta} = q(0, \zeta)$ sia asintoticamente stabile in $\zeta_0 = 0$. Allora una retroazione $v = v(\xi) = K\xi$, con $K = (-K_0 \ \dots \ -K_r)$ coefficienti di un polinomio a radici con parte reale negativa, rende asintoticamente stabile il sistema non lineare originale sia esternamente che internamente.

Di questo risultato si può dare una facile interpretazione considerando un modello linearizzato approssimato della forma normale (supponendo di aver scelto nuove coordinate $\zeta(x)$ con $L_g\zeta(x) = 0$ in modo che $p(\xi, \zeta) = 0$):

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_0 & 0 \\ \star & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \zeta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_0 \\ 0 \end{bmatrix} v,$$

dove $Q = \left.\frac{\partial q(\xi,\zeta)}{\partial \zeta}\right|_{\substack{\zeta = 0 \\ \xi = 0}}$, e $\star$ indica un elemento il cui calcolo può essere omesso. Dopo l'applicazione di una ulteriore retroazione lineare $v = K\xi$ si ha

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_0 + B_0K & 0 \\ \star & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \zeta \end{bmatrix}.$$

Gli autovalori del sistema linearizzato approssimato sono l'unione di quelli di $A_0 + B_0K$ e quelli di Q. La matrice Q è stabile se il sistema originario è stabilizzabile nella sua approssimazione lineare. In questo caso, il vantaggio della linearizzazione esatta rispetto a quella approssimata risiede principalmente nella estensione della regione di asintotica stabilità del sistema ottenuto, che è tipicamente molto più ampia per la linearizzazione esatta. Infatti, non avendosi approssimazioni, la stabilizzazione del sistema lineare si applica a

tutta la regione nella quale valgono le condizioni di esistenza del feedback linearizzante.

La zero dinamica può inoltre esser dimostrata stabile anche quando la sua linearizzazione Q è solo marginalmente stabile (si pensi ad esempio al caso $\dot{\zeta} = -\zeta^3$).

Esempio 3. Feedback Linearizzazione Parziale.

Consideriamo la stabilizzazione nell'origine di un sistema SISO con

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_3 - x_2^3 \\ -x_2 \\ x_1^2 - x_3 \end{bmatrix}; \; g(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}; \; y(x) = h(x) = x_1$$

Il grado relativo rispetto a questa uscita è due. Infatti,

$$\begin{array}{ll} h(x) & = x_1 \\ L_f h(x) & = dhf(x) = x_3 - x_2^3 \\ L_g h(x) & = dhg(x) = 0 \\ L_f^2 h(x) & = dL_f hf(x) = 3x_2^3 + x_1^2 - x_3 \\ L_g L_f h(x) & = dL_f hg(x) = 3x_2^2 + 1 \neq 0 \end{array}$$

Scegliamo le nuove coordinate

$$\begin{array}{l} \xi_1 = h(x) = x_1 \\ \xi_2 = L_f h = x_3 - x_2^3 \end{array}$$

Come variabile di complemento $\zeta(x) \in \mathbb{R}^1$ scegliamo ad esempio $\zeta(x) = x_2 + x_3$, avendo quindi il cambio di variabili

$$\Phi(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 - x_2^3 \\ x_2 + x_3 \end{bmatrix},$$

per il quale si verifica

$$\det \left.\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right|_0 = \det \left(\frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} \xi_1(x) \\ s_1 \xi_2(x) \\ \zeta(x) \end{bmatrix}_0 \right) = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3x_2^2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}_0 = -1.$$

Si ha inoltre

$$L_g \zeta = 0$$

Si ottiene quindi la forma normale

$$\begin{aligned}
\dot{\xi}_1 &= \xi_2 \\
\dot{\xi}_2 &= (x_1^2 + 3x_2^3 + x_3) + (3x_2^2 + 1)u = v \\
\dot{\zeta}_1 &= \frac{\partial \Phi_3}{\partial x}(f + gu) = x_1^2 - x_2 - x_3 = \xi_1^2 - \zeta_1 \\
y &= \xi_1
\end{aligned}$$

ed il feedback linearizzante

$$u = -\frac{x_1^2 + 3x_2^3 - x_3}{3x_2^2 + 1} + \frac{1}{3x_2^2 + 1}v.$$

La zero dinamica è semplicemente

$$\dot{\zeta} = -\zeta, \ \forall \zeta(0)$$

e quindi asintoticamente stabile. Se ne deduce che il feedback composto dalla retroazione linearizzante e da una retroazione lineare stabilizzante, ovvero

$$\begin{cases}
u = -\dfrac{x_1^2 + 3x_2^3 - x_3}{3x_2^2 + 1} + \dfrac{1}{3x_2^2 + 1}v \\
v = (k_1 \ k_2) \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}
\end{cases}$$

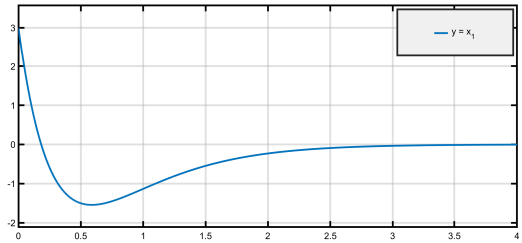
rende il sistema originale asintoticamente stabile nell'origine esternamente e internamente.

È di interesse confrontare questo controllo con uno basato sulla linearizzazione approssimata intorno all'origine rappresentata dalle matrici (A, B, C), che in forma standard di raggiungibilità possono essere scritte

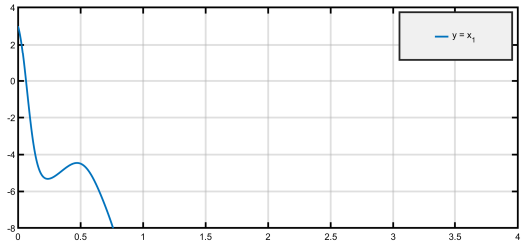
$$A = \left[\begin{array}{c|c} A_R & A_{RN} \\ \hline 0 & A_N \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 \end{array}\right]; \quad B = \left[\begin{array}{c} B_R \\ \hline 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ \hline 0 \end{array}\right].$$

Si noti che l'autovalore esterno al sottospazio di raggiungibilità è strettamente negativo (e coincide con quello della zero dinamica) e quindi il sistema linearizzato approssimato è stabilizzabile. Si supponga ora di progettare una retroazione dello stato che allochi gli autovalori del lineare approssimato nelle stesse posizioni dove sono stati messi dalla scelta del controllo lineare stabilizzante $v = (k_1 \ k_2)\,\xi$ del caso di linearizzazione parziale in feedback.

Applicando tale retroazione dello stato al sistema nonlineare è possibile stabilizzarlo in un intorno dell'origine, ma non possiamo garantire a priori nulla sulla estensione della regione di asintotica stabilità (RAS). In effetti si può constatare che, anche per perturbazioni relativamente piccole dello stato iniziale, il sistema in anello chiuso con controllore ottenuto mediante linearizzazione approssimata non è in grado di controllare lo stato all'origine. La figura 9.2 confronta l'evoluzione dell'uscita del sistema in anello chiuso a partire dallo stato iniziale $x_i = [3\ \ 3\ \ 3]^T$ nel caso dei due controllori, mentre la figura 9.3 mostra gli schemi a blocchi dei due tipi di controllo.



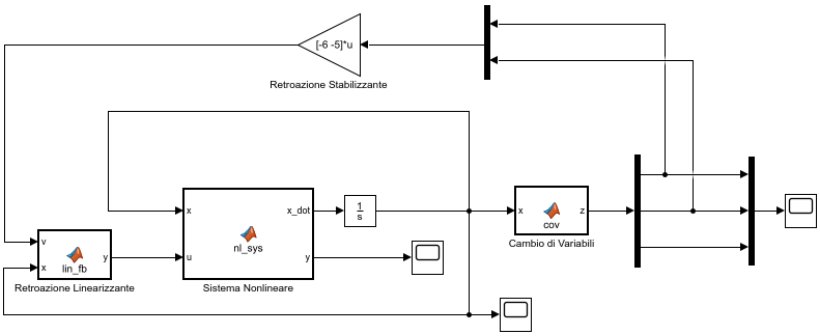
(a) Linearizzazione in retroazione



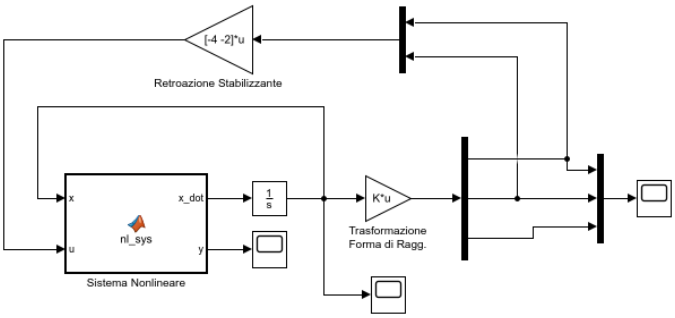
(b) Linearizzazione approssimata

Figure 9.2: L'evoluzione nel tempo dell'uscita del sistema nell'esempio 3 con diversi controllori a partire da una perturbazione sullo stato iniziale di $\Delta x = [3\ \ 3\ \ 3]^T$.

Questo esempio aiuta a chiarire il vantaggio del metodo di linearizzazione in retroazione che sta proprio nel fatto che, linearizzando esattamente il sistema nonlineare (zero dinamica permettendo), rende possibile la progettazione di un controllore che garantisce una regione di asintotica stabilità più ampia. ◇



(a) Linearizzazione in retroazione



(b) Linearizzazione approssimata

Figure 9.3: Schema a blocchi dei due controlli che allocano gli autovalori del sistema ad anello chiuso in -1, -2 e -3.

9.3.2 Zero Dinamica nei Sistemi Lineari

Il nome Zero Dinamica deriva dall'analogia con il comportamento dei sistemi lineari che possiedono un polinomio degli zeri:

$$G(s) = k\frac{b_0 + b_1 s + \cdots + b_{n-r-1}s^{n-r-1} + s^{n-r}}{a_0 + a_1 s + \cdots + a_{n-1}s^{n-1} + s^n}$$

realizzato in forma minima (canonica di controllo) come

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

$$A = \left[\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \vdots & & I & \\ 0 & & & \\ \hline -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-1} \end{array}\right]; \; B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ k \end{bmatrix}; \; C = (b_0 \; \dots \; b_{n-r-1} \; 1 \; 0 \; \dots \; 0).$$

Trattando $\dot{x} = Ax + Bu$, $y = Cx$ come fosse un sistema non lineare, la sua forma normale è ottenuta ponendo

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= y = Cx = b_0 x_1 + \cdots + x_{n-r+1} \\
\xi_2 &= \dot{y} = CAx = B_0 x_2 + \cdots + x_{n-r+2} \\
&\vdots \\
\xi_r &= y^{(r-1)} = CA^{r-1}x = B_0 x_r + \cdots + x_n
\end{aligned}$$

e scegliendo per complemento

$$\begin{aligned}
\zeta_1 &= x_1 \\
&\vdots \\
\zeta_{n-r} &= x_{n-r}.
\end{aligned}$$

Per questa scelta, si ha

$$\frac{\partial}{\partial x}\Phi(x) = \frac{\partial}{\partial x}\begin{bmatrix} \xi(x) \\ \zeta(x) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cccc|cccc}
b_0 & b_1 & \dots & b_{n-r-1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\
0 & b_0 & \dots & b_{n-r-2} & b_{n-r-1} & 1 & \dots & 1 \\
\vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\
0 & \dots & 0 & b_0 & b_{r+1} & \dots & b_{n-r-1} & 1 \\
\hline
1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\
0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0
\end{array}\right]$$

quindi lo jacobiano è sicuramente non-singolare e inoltre $L_g\zeta(x) = (\ I_{n-r}\ \ |0)B = 0$.

La forma normale è dunque

$$\begin{cases} \dot{\xi} = A_0\xi + b_0 v \\ \dot{\zeta} = q(\xi,\zeta) = P\xi + Q\zeta \end{cases}$$

La dinamica di ζ è infatti certamente lineare; per di più vale

$$Q = \left[\begin{array}{c|ccc}
0 & & & \\
\vdots & & I & \\
0 & & & \\
\hline
-b_0 & -b_1 & \dots & -b_{n-r-1}
\end{array}\right]$$

infatti

$$\begin{aligned}
\dot{\zeta}_1 &= \dot{x}_1 = x_2 = \zeta_2 \\
&\vdots \\
\dot{\zeta}_{n-r-1} &= \zeta_{n-r} \\
\dot{\zeta}_{n-r} &= \dot{x}_{n-r} = x_{n-r+1} = \\
&= \xi_1 - b_0\zeta_1 - b_1\zeta_2 - \cdots - b_{n-r-1}\zeta n - r
\end{aligned}$$

La Zero Dinamica è quindi

$$\dot{\zeta} = q(0, \zeta) = Q\zeta$$

cioè, ha polinomio caratteristico

$$b_0 + b_1 s + \cdots + b_{n-r-1}s^{n-r-1} + s^{n-r}$$

ovvero il polinomio degli zeri di $G(s)$. Gli zeri di trasmissione sono proprio quei valori di $s \in \mathcal{C}$ per i quali esistono condizioni iniziali tali per cui un ingresso e^{st} lascia invariata l'uscita.

Osservazione. In analogia con il caso lineare, quei sistemi nonlineari (con uscita) la cui zero dinamica sia asintoticamente stabile vengono detti *a fase minima*. Come nei sistemi lineari, la proprietà di minimo sfasamento rende più agevole il controllo: in particolare, i sistemi nonlineari con uscita a fase non-minima non possono essere resi internamente stabili mediante linearizzazione in retroazione parziale da quella uscita. ◇

9.4 Inseguimento di traiettorie

Supponendo che il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = h(x) \end{cases}$$

abbia grado relativo r e che sia stato posto nella forma normale

$$\begin{cases} \dot{\xi} = A_0\xi + b_0\nu \\ \dot{\zeta} = q(\zeta, \xi) + p(\zeta, \xi)\nu \end{cases}$$

utilizzando l'ingresso linearizzante

$$u = -\frac{b(\zeta, \xi)}{a(\zeta, \xi)} + \frac{1}{a(\zeta, \xi)}\nu,$$

desideriamo inseguire una traiettoria assegnata per l'uscita

$$y(t) = \hat{y}(t).$$

Perché l'inseguimento sia perfetto, dovremo supporre

$$y(0) = h(x_0) = \hat{y}(0),$$

e, definito il vettore

$$\hat{\xi} = \begin{bmatrix} \hat{y} \\ \dot{\hat{y}} \\ \vdots \\ \hat{y}^{(r-1)} \end{bmatrix},$$

che

$$y(t) \equiv \hat{y}(t),\ \forall t \Leftrightarrow \xi(t) = \hat{\xi}(t).$$

Questo implica che, se l'inseguimento è perfetto, le variabili di stato $\xi(t)$ devono coincidere identicamente con l'uscita e le sue derivate al tempo $t = 0$. In questo caso, scegliendo l'ingresso $\nu = \hat{y}^{(r)}$, cioè

$$u = -\frac{b(\zeta, \hat{\xi})}{a(\zeta, \hat{\xi})} + \frac{1}{a(\zeta, \hat{\xi})}\hat{y}^{(r)}.$$

con ζ soluzione di

$$\dot{\zeta} = q(\hat{\xi}, \zeta) + p(\hat{\xi}, \zeta)\hat{y}^{(r)}$$

otterremmo lo scopo

$$y^{(r)} = \dot{\xi}_{r-1} = b(\xi, \zeta) + a(\xi, \zeta)\left\{-\frac{b(\xi, \zeta)}{a(\xi, \zeta)} + \frac{1}{a(\xi, \zeta)}\hat{y}^{(r)}\right\} = \hat{y}^{(r)}.$$

Naturalmente, in realtà gli stati iniziali del sistema non coincideranno. In tale caso, quanto di meglio si può chiedere è un inseguimento asintotico cioè tale che $\|y(t) - \hat{y}(t)\| \to 0$ per $t \to \infty$. Questo si può ottenere sfruttando il controllo stabilizzante "lineare" ν, ovvero posto $e = \xi - \hat{\xi}$ il vettore di errore, scegliendo $\nu = \hat{y}^{(r)} - c^T e$, con $c^T = (c_0\ c_1\ \dots\ c_{r-1})$ si ha

$$\dot{\xi}_r = \hat{y}^{(r)} - c^T e \quad \Rightarrow \quad e_1^{(r)} + c_{r-1}e_1^{(r-1)} + \cdots + c_0 e_1 = 0.$$

Scegliendo quindi i coefficienti c_i in modo opportuno, l'errore di inseguimento viene fatto convergere a zero con dinamica lineare stabile e arbitrariamente

veloce.

Quanto sinora visto riguarda la parte linearizzata esattamente del sistema. Riconsideriamo adesso adesso la dinamica delle variabili di complemento ζ in queste nuove condizioni

$$\dot{\zeta} = q(\hat{\xi}, \zeta) + p(\hat{\xi}, \zeta)\hat{y}^{(r)} \tag{9.8}$$

e gli ingressi linearizzanti che sono valutati anche sulla base della evoluzione di ζ,

$$u = -\frac{b(\hat{\xi}, \zeta)}{a(\hat{\xi}, \zeta)} + \frac{1}{a(\hat{\xi}, \zeta)}\hat{y}^{(r)}. \tag{9.9}$$

Notando che $\hat{y}(t)$ (e quindi anche $\hat{y}^{(r)}$, $\hat{\xi}(t)$) sono assegnati, posso vedere le (9.8) e (9.9) come un sistema dinamico con stato ζ, ingresso la derivata dell'uscita desiderata $\hat{y}^{(r)}$, ed uscita gli ingressi u che portano all'inseguimento asintotico. Chiameremo il sistema delle (9.8) e (9.9) *Sistema Inverso.*

Naturalmente, resta da dimostrare che il controllo corrispondente allo schema sopra proposto generi evoluzioni limitate degli stati $\zeta(t)$ e $\xi(t)$. A questo proposito è importante il seguente Teorema.

Theorem 11. *Se le seguenti ipotesi*

- $\hat{y}(t), \dot{\hat{y}}(t), \ldots, \hat{y}^{(r)}$ *sono limitate e sufficientemente piccole,*
- *la dinamica* $\dot{\zeta} = f(\zeta, \hat{y})$ *è asintoticamente stabile e limitata,*
- *c ha coefficienti tali da stabilizzare la dinamica dell'errore,*

sono verificate, allora le evoluzioni degli stati $\zeta(t)$, $\xi(t)$ *sono limitate.*

Osservazione. Dalla seconda condizione del teorema risulta chiaro che l'inseguimento asintotico dell'uscita non è possibile se il sistema con quella uscita ha fase non minima (ovvero ha zero dinamica instabile). Anche in questo caso l'analogia col caso lineare è illuminante: in un sistema lineare descritto da $y(s) = G(s)u(s) = \frac{n(s)}{d(s)}u(s)$, l'ingresso corrispondente esattamente ad un riferimento limitato $y_R(t)$ è dato da $\frac{d(s)}{n(s)}y_R(s)$ che per un sistema a fase non minima è illimitato per la presenza di poli a parte reale positiva. $\diamond$

9.5 Linearizzazione in Retroazione Ingresso–Stati

Come già osservato in precedenza, nel caso in cui per l'uscita assegnata $h(x)$ si abbia grado relativo $r = n$, la feedback linearizzazione in retroazione è in grado di linearizzare il sistema non solo dal punto di vista esterno, o ingresso-uscita, ma completamente, o ingresso-stati.

Quando questa condizione non si verifichi, è naturale chiedersi se altre uscite potrebbero esibire grado relativo pieno. Più in generale, è possibile guardare al problema in termini leggermente diversi, considerando i sistemi a prescindere dalla uscita. Limitandoci ancora a sistemi affini nel controllo con un singolo ingresso del tipo

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad x(0) = x_0 \tag{9.10}$$

ci chiediamo quindi adesso se esiste una legge di retroazione degli stati nella forma

$$u(x) = \alpha(x) + \beta(x)v, \quad \beta(x) \neq 0$$

con v nuovo riferimento, ed un cambiamento di variabili $z = \Phi(x)$, tali per cui si abbia

$$\dot{z} = Az + Bv$$

Quando questo sarà possibile, essendo data la possibilità di scegliere una retroazione degli stati sugli ingressi, si potrà sempre anche scegliere arbitrariamente la posizione degli autovalori di A; ed essendo data la possibilità di scegliere le coordinate, sarà anche possibile scrivere il sistema in una delle forme canoniche. Per uniformità quindi, ma senza perdere generalità, chiederemo che tutti gli autovalori siano nell'origine e che la coppia (A, B) sia in forma canonica di controllo, ovvero:

$$A = A_o = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \vdots & & I & \\ 0 & & & \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 \end{array}\right), \quad B = B_o = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

ottenendo:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 & = z_2 \\ \vdots & \\ \dot{z}_{n-1} & = z_n \\ \dot{z}_n & = v \end{cases} \tag{9.11}$$

Nell'ipotesi di poter fare ricorso sia alla scelta della retroazione che del cambiamento di variabili, è possibile determinare quando la completa linearizzazione in retroazione può essere eseguita con successo, come stabilito dal seguente teorema.

Theorem 12. *Dato il sistema 9.10, affinché esistano un cambiamento di variabili $\Phi(x)$ ed una retroazione statica degli stati nella forma $u(x) = \alpha(x) + \beta(x)v$, che linearizzano completamente il sistema in una regione che contiene un intorno del punto x_0, è necessario e sufficiente che siano verificate entrambe le condizioni*

a) $rank[g(x_0)\ ad_f g(x_0)\ \ldots\ ad_f^{n-1} g(x_0)] = n$;

b) $span\{g, ad_f g, \ldots, ad_f^{n-2} g\}$ *è involutiva.*

Senza dare una prova completa del teorema, è possibile intuire il significato delle condizioni. La prima condizione coincide come già visto in precedenza con la raggiungibilità del sistema linearizzato approssimato (che è quindi condizione necessaria anche per la completa linearizzazione in retroazione). Qualora le condizioni del Teorema (12) siano verificate, si può poi procedere a determinare le funzioni $\Phi(x)$, $\alpha(x)$ e $\beta(x)$ come segue.

La dinamica scritta nelle nuove coordinate z diviene

$$\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= L_f\Phi_1 + L_g\Phi_1 u \\
\dot{z}_2 &= L_f\Phi_2 + L_g\Phi_2 u \\
\dot{z}_3 &= L_f\Phi_3 + L_g\Phi_3 u \\
&\vdots \\
\dot{z}_n &= L_f\Phi_n + L_g\Phi_n u
\end{aligned} \tag{9.12}$$

Affinchè sia verificata la prima equazione del sistema 9.11,

$$\dot{z}_1 = z_2\,,$$

dalla prima delle 9.12 deriva che si deve scegliere $\Phi_1(x)$ in modo tale che $L_g\Phi_1(x) = 0$, e porre $z_2 = \Phi_2(x) = L_f\Phi_1$.

Dal confronto delle seconde equazioni dei sistemi 9.11 e 9.12 segue poi che deve essere $L_g\Phi_2(x) = 0$ e $z_3 = \Phi_3(x) = L_f\Phi_2$. Sostituendo $\Phi_2(x) = L_f\Phi_1$ si ha immediatamente che $\Phi_1(x)$ deve verificare anche $L_gL_f\Phi_1(x) = L_g\Phi_2(x) = 0$, e si deve avere $\Phi_3(x) = L_f^2\Phi_1$.

La stessa procedura puó essere ripetuta fino alla equazione $n-1$-esima. Con questa scelta l'equazione n-esima del sistema 9.12 risulta:

$$\dot{z}_n = L_f^n\Phi_1 + L_gL_f^{n-1}\Phi_1 u$$

A questo punto, se è verificata la condizione $L_g L_f^{n-1}\Phi_1 \neq 0$, si puó porre

$$u = \alpha(x) + \beta(x)u = -\frac{L_f^n \Phi_1}{L_g L_f^{n-1}\Phi_1} + \frac{1}{L_g L_f^{n-1}\Phi_1} v$$

ottenendo così

$$\dot{z}_n = v\,.$$

Riassumendo, il sistema 9.12 assume la forma 9.11 se $\Phi(x)$, $\alpha(x)$ e $\beta(x)$ possono essere determinati come segue:

$$\Phi_i(x) = L_f^{i-1}\Phi_1 \quad i = \{2, \ldots, n\} \tag{9.13}$$

$$\alpha(x) = -\frac{L_f^n \Phi_1}{L_g L_f^{n-1}\Phi_1} \tag{9.14}$$

$$\beta(x) = \frac{1}{L_g L_f^{n-1}\Phi_1} \tag{9.15}$$

con Φ_1 tale che

$$\begin{cases} L_g\Phi_1 = 0 \\ L_g L_f \Phi_1 = 0 \\ L_g L_f^2 \Phi_1 = 0 \\ \vdots \\ L_g L_f^{n-2}\Phi_1(x) = 0, \end{cases} \tag{9.16}$$

e $L_g L_f^{n-1}\Phi_1(x) \neq 0$.

Ricordando la proprietà (6.16), si ha

$$L_{[f,g]}\Phi_1(x) = L_f L_g \Phi_1(x)(x) - L_g L_f \Phi_1(x)$$

che, applicata alla seconda delle (9.16), e poi in modo analogo a tutte le altre, ci permette di scrivere

$$\begin{cases} d\Phi_1\, g = 0 \\ d\Phi_1\, [f\, g] = 0 \\ d\Phi_1\, [f[f\, g]] = 0 \\ \vdots \\ d\Phi_1\, ad_f^{n-2} g = 0 \end{cases} \tag{9.17}$$

e

$$d\Phi_1 ad_f^{n-1} g \neq 0. \tag{9.18}$$

Quindi il problema della linearizzazione in retroazione è ricondotto alla determinazione di una funzione $\Phi_1(x)$ il cui differenziale annichili la distribuzione $span\{g,\ [f,g],\ \ldots,\ ad_f^{n-2}g\}$ e verifichi la 9.18. Da queste condizioni si ricava, attraverso il teorema di Frobenius, la condizione b) del teorema 12 sulla involutività della distribuzione $span\{g,\ ad_f g,\ \ldots,\ ad_f^{n-2}g\}$.

Esempio 4. Si consideri il sistema la cui dinamica è descritta dalle equazioni:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u = \begin{bmatrix} \sin x_2 \\ \sin x_3 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \; x(0) = 0\,.$$

Per l'esempio in questione la condizione a) del (comune sia al teorema 12 che al teorema 8) richiede che rank $\Big(\text{span}\left\{g,\ [f,g],\ [f,[f,g]]\right\}|_{x=0}\Big) = 3$. Svolgendo i calcoli si ottiene:

$$\text{span}\left\{g\ [f,g]\ [f,[f,g]]]\right\} = \text{Im}\begin{bmatrix} 0 & 0 & c_2c_3 \\ 0 & -c_3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e si può constatare che la condizione a) è verificata.

La condizione b) del teorema 8 richiede invece che $[g,[f,g]] = 0\ \forall x \in B(x(0))$, mentre per la linearizzazione in retroazione si richiede solamente che $[g,[f,g]] \in span\{g,[f\ g]\}$. Nel caso in esame si ottiene:

$$[f\ g\,] = \begin{bmatrix} 0 \\ s_3 \\ 0 \end{bmatrix} \in span\{g,[f\ g]\}$$

Quindi si può concludere che la linearizzazione esatta in retroazione è applicabile, al contrario della linearizzazione per cambiamento di variabili.

Il sistema di equazioni alle derivate parziali 9.17 diventa

$$\begin{cases} L_g\Phi_1 = \dfrac{\partial\Phi_1}{\partial x_3} = 0 \\[2ex] L_gL_f\Phi_1 = \dfrac{\partial\Phi_1}{\partial x_2} = 0 \end{cases}$$

mentre la 9.18 diventa

$$L_g L_f \Phi_1 = \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} \neq 0$$

La più semplice scelta che verifica le due condizioni precedenti è

$$z_1 = \Phi_1(x) = x_1$$

e di conseguenza si ottiene

$$\begin{aligned} z_2 &= \Phi_2(x) = L_f \Phi_1 = s_2 \\ z_3 &= \Phi_3(x) = L_f^2 \Phi_1 = c_2 s_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha(x) &= -L_f^3 \Phi_1 / L_g L_f^2 \Phi_1 = s_3^2 s_2 / c_2 c_3 \\ \beta(x) &= 1 / L_g L_f^2 \Phi_1 = 1 / c_2 c_3 \end{aligned}$$

◇

Osservazione: Come già detto, la condizione a) del teorema 12 implica la necessità della completa raggiungibilità dell'approssimazione lineare nell'origine ai fini della completa linearizzazione in retroazione. Questo restringe l'applicabilità dello strumento, prevendone l'applicazione nei casi i cui esistano sottosistemi non raggiungibili ma asintoticamente stabili. In questi casi, le tecniche di linearizzazione parziale possono invece essere applicate.

La linearizzazione esatta in retroazione può essere di difficile applicazione se non si riesce, o si rinuncia, a integrare il sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali.

Infine, spesso la scelta della uscita $h(x)$ da regolare deve essere fatta in base allo specifico significato fisico della grandezza corrispondente, che ne impongono la scelta. 9.17

Esempio 5. Esempio di feedback linearizzazione parziale rivisitato.

Si consideri di nuovo il sistema dell'esempio 3

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_3 - x_2^3 \\ -x_2 \\ x_1^2 - x_3 \end{bmatrix} ; \; g(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Come visto, il grado relativo rispetto all'uscita $y(x) = h(x) = x_1$ è due. Possiamo chiederci se esiste un'altra uscita con $r = 3$. Perchè sia possibile, si devono verificare le condizioni a) e b) del teorema 12:

$$[f \; g] = ad_f g = -\begin{bmatrix} 0 & -2x_2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2x_1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3x_2^2 - 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$ad_f^2 g = \begin{bmatrix} 3x_2^2 - 1 \\ -1 \\ 6x_1x_2 + 2x_1 + 1 \end{bmatrix}$$

La condizione a) non è quindi verificata: infatti

$$rank \begin{bmatrix} g(x) & ad_f g(x) & ad_f^2 g(x) \end{bmatrix}_{x=0} = rank \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = 2.$$

Anche la condizione b) del teorema 12 non è verificata, essendo

$$[g,\ [f,\ g]] = \begin{bmatrix} 0 \\ 6x_2 \\ 0 \end{bmatrix} \notin span \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix};\ \begin{bmatrix} 3x_2^2 + 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

Non esiste quindi nessuna funzione di uscita che dia grado relativo massimo, ed è impossibile effettuare una linearizzazione esatta.

È interessante confrontare questo risultato con l'analisi di raggiungibilità della approssimazione lineare nell'origine del sistema, per la quale vale

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix};\quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

e si può quindi verificare che non è raggiungibile, essendo

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Si verifica qui direttamente come la condizione a) del teorema 12 corrisponda alla condizione di raggiungibilià dell'approssimazione lineare: un sistema che non è raggiungibile nel linearizzato approssimato non può essere trasformato per feedback in un sistema completamente raggiungibile. ◇

9.6 Linearizzazione in retroazione MIMO

Consideriamo un sistema "quadrato" con m ingressi e m uscite

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^{m} g_i(x)u_i, \quad x(0) = x_0 \\ y_1 = h_1(x) \\ \vdots \\ y_m = h_m(x) \end{cases}$$

e procediamo, analogamente al caso SISO, a differenziare le uscite finché non appare esplicitamente almeno uno degli ingressi:

$$\begin{cases} y_1 & = h_1(x) \\ \dot{y}_1 & = L_f h_1(x) \\ \vdots & \vdots \\ y_1^{(r_1)} & = L_f^{r_1} h_1(x) + L_{g_1} L_f^{r_1-1} h_1(x) u_1 + \cdots + L_{g_m} L_f^{r_1-1} h_1(x) u_m \\ & \quad \text{(dove almeno una delle } L_{g_i} L_f^{r_1-1} h_1(x_0) \not\equiv 0) \\ y_2 & = h_2(x) \\ \dot{y}_2 & = L_f h_2(x) \\ \vdots & \vdots \\ y_2^{(r_2)} & = L_f^{r_2} h_2(x) + \sum_{i=1}^m L_g L_f^{r_2-1} h_2(x) u_i \\ & \quad \text{(dove almeno una delle } L_{g_i} L_f^{r_2-1} h_2(x_0) \not\equiv 0) \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ y_m & = h_m(x) \\ \dot{y}_m & = L_f h_m(x) \\ \vdots & \vdots \\ y_m^{(r_m)} & = L_f^{r_m} h_m(x) + \sum_{i=1}^m L_g L_f^{r_m-1} h_m(x) u_i \\ & \quad \text{(dove almeno una delle } L_{g_i} L_f^{r_m-1} h_m(x_0) \not\equiv 0) \end{cases}$$

Giustapponendo le ultime equazioni di ognuna di queste catene in forma matriciale, possiamo scrivere

$$\begin{bmatrix} y_1^{(r_1)} \\ \vdots \\ \vdots \\ y_m^{(r_m)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_f^{r_1} h_1(x) \\ \vdots \\ \vdots \\ L_f^{r_m} h_m(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_{g_1} L_f^{r_1-1} h_1(x) & \dots & L_{g_m} L_f^{r_1-1} h_1(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ L_{g_1} L_f^{r_m-1} h_m(x) & \dots & L_{g_m} L_f^{r_m-1} h_m(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}$$

ovvero, in forma compatta,

$$Y = \Gamma(x) + E(x)u$$

Se la matrice $E(x)$ è invertibile in x_0, si dice che il sistema ha *grado relativo vettoriale*

$$(r_1 \ \dots \ r_m)^T$$

e *grado relativo totale* $r = \sum_{i=1}^{m} r_i$. Se $E(x_0)$ non è invertibile, invece, si dice che il sistema non ha grado relativo definito.

Quando il sistema ha grado relativo è possibile definire, in tutta una regione contenete un intorno di x_0, una retroazione

$$u = -E^{-1}(x)\Gamma(x) + E^{-1}(x)\nu \tag{9.19}$$

per il quale si ha $Y = v$, ovvero

$$L_f^{r_i} h_i(x) = \nu_i, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Se il sistema ha grado relativo r è anche possibile (si confronti il caso SISO e le (9.5), (9.6)) definire m catene di lunghezza $r_1, \ldots, r_m$, per un totale di $r \leq n$ funzioni indipendenti dei vecchi stati nella forma

$$\begin{array}{llll}
{}^1\xi_1 = h_1(x) & {}^2\xi_1 = h_2(x) & \ldots & {}^m\xi_1 = h_m(x) \\
{}^1\xi_2 = L_f h_1(x) & {}^2\xi_2 = L_f h_2(x) & \vdots & {}^m\xi_2 = L_f h_m(x) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
{}^1\xi_{r_1} = L_f^{r_1-1} h_1(x) & {}^2\xi_{r2} = L_f^{r_2-1} h_2(x) & \vdots & {}^m\xi_{r_m} = L_f^{r_m-1} h_m(x)
\end{array}$$

Il controllo (9.19) permette quindi di linearizzare e disccoppiare i rapporti tra le m uscite e gli m nuovi ingressi ν, mediati ciascuno dalle r_m nuove variabili. Si ottiene infatti

$$\begin{array}{rcl} {}^i\dot{\xi} & = & {}^iA_0\,{}^i\xi + {}^iB_0\,\nu_i \\ {}^iy & = & {}^iC_0\,{}^i\xi, \end{array} \tag{9.20}$$

dove tutte le coppie $({}^iA_0, {}^iB_0)$ sono in forma canonica di controllo con tutti gli r_i autovalori in 0. Giustapponendo gli r nuovi stati in un unico vettore $\xi^T = ({}^1\xi^T, \ldots, {}^m\xi^T)$ e definendo le matrici $A_0 = \mathsf{diag}\,({}^1A_0, \ldots, {}^mA_0)$, $B_0 = \mathsf{diag}\,({}^1B_0, \ldots, {}^mB_0)$ e $C_0 = \mathsf{diag}\,({}^1C_0, \ldots, {}^mC_0)$, si ottiene la scrittura compatta (detta in forma di Brunovsky)

$$\begin{array}{rcl} \dot{\xi} & = & A_0\xi + B_0\nu \\ y & = & C_0\xi \end{array} \tag{9.21}$$

Nel caso il grado relativo non sia massimo, ovvero $r < n$, sarà anche possibile definire altre $(n - r)$ funzioni $\zeta_1(x)$ $\ldots$ $\zeta_{n-r}(x)$ indipendenti tra loro e dalle precedenti, per le quali si avrà

$$\dot{\zeta} = Q(\xi, \zeta) + P(\xi, \zeta)\nu \tag{9.22}$$

L'insieme delle (9.21) e (9.22) è detta *forma normale* per il sistema MIMO a m-ingressi e m-uscite.

In altre parole, il sistema è reso lineare tra gli ingressi e le uscite. Inoltre il sistema è perfettamente *disaccoppiato* o *noninteragente*, in quanto l'ingresso i-esimo agisce escluvamente sulla uscita di pari indice.

Le $n-r$ variabili di stato ζ restano ovviamente non "visibili" dal rapporto I/O. Si hanno anche nel caso MIMO risultati analoghi a quanto visto per il caso SISO. I controlli ν_i possono essere scelti come retroazioni lineari delle variabili della i-esima catena $\nu_i = -c_0^i \xi_1^i - c_1^i \xi_2^i - \cdots - c_{r_i-1}^i \xi_{r_i}^i$ per allocare arbitrariamente i poli della catena stessa nelle posizioni desiderate.

Le retroazioni lineari stabilizzanti di tutti gli m ingressi rendono poi anche l'intero sistema asintoticamente stabile se la zero dinamica

$$\dot{\zeta} = Q(0, \zeta)$$

è asintoticamente stabile.

La condizione di grado relativo ben definito è necessaria e sufficiente per avere linearizzazione I/O e disaccoppiamento. Se il sistema non ha grado relativo, ovvero se $E(x)$ è singolare in x_0, allora il sistema non è disaccoppiabile, ma può essere ancora linearizzabile I/O

Naturalmente, se il sistema ha grado relativo $r = n$, la linearizzazione in retroazione è completa, e la zero dinamica è banale. Come fatto in precedenza, è naturale chiedersi se per un dato sistema esista un set di uscite che diano grado relativo massimo.

9.6.1 Linearizzazione Ingresso/Stati MIMO

Il problema della linearizzabilità completa in retroazione per il sistema con m ingressi

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^{m} g_i(x) u_i$$

consiste nel trovare un vettore di m funzioni

$$\alpha(x) = \begin{bmatrix} \alpha_1(x) \\ \vdots \\ \alpha_m(x) \end{bmatrix},$$

una matrice di $m \times m$ funzioni

$$\beta(x) = \begin{bmatrix} \beta_{11}(x) & \dots & \beta_{1m}(x) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \beta_{m1}(x) & \dots & \beta_{mm}(x) \end{bmatrix}$$

ed un cambiamento di coordinate $\xi = \Phi(x)$ tali per cui, ponendo

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v$$

si abbia

$$\dot{\xi} = A\xi + Bu$$

$$A = \text{diag}\ (A_1,\ \ldots,\ A_m), \quad B = \text{diag}\ (b_1,\ \ldots,\ b_m)$$

con (A, B) in forma di Brunovsky.

Theorem 13. *La linearizzazione esatta in retroazione completa è possibile per il sistema*

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^{m} g_i(x)u_i$$

se e solo se, per la filtrazione definita da

$$\begin{aligned}
\Gamma_0 &= \text{span}\ \{g_1\ \ldots\ g_m\}; \quad \Delta = \text{span}\ \{f(x)\} \\
\Gamma_1 &= \Gamma_0 + [\Delta\ \Gamma_0] \\
&\vdots \\
\Gamma_i &= \Gamma_{i-1} + [\Delta\ \Gamma_{i-1}] = \text{span}\ \{ad_f^k g_j,\ 0 \le k \le i,\ 1 \le j \le m\}
\end{aligned}$$

si ha

i) Γ_i *è involutiva e non singolare in* x_0 *per* $i = 1, \ldots, n-1$*;*

ii) $\dim \Gamma_{n-1} = n$

Osservazione: Per sistemi SISO, la condizione coincide con quella vista in precedenza per la linearizzabilità completa in retroazione ingresso/stati.

Esempio 6.

Per il sistema

$$\dot{x} = f(x) + g_1(x)u_1 + g_2(x)u_2$$

con

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_2 + x_2^2 \\ x_3 - x_1x_4 + x_4x_5 \\ x_2x_4 + x_1x_5 - x_5^2 \\ x_5 \\ x_2^2 \end{bmatrix}, \ g_1(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos(x_1 - x_3) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad g_2(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{cases} y_1 &= h_1(x) = x_1 - x_5 \\ y_2 &= h_2(x) = x_4 \end{cases},$$

si ottiene

$$r = \{2 + 3\}$$

quindi il grado relativo totale è massimo. ◇

9.6.2 Linearizzazione in retroazione dinamica

Dal confronto tra le condizioni di feedback linearizzazione I/O MIMO con quelle ottenute per i sistemi SISO, si osserva che le prime sono in qualche modo più restrittive, in quanto la mancata possibilità di applicazione della retroazione linearizzante non dipende solo dalla possibilità che la matrice di disaccoppiamento $E(x)$ sia singolare in x_0. Più facilmente può accadere infatti che, nonostante tutte le funzioni che appaiono in $E(x)$ non siano singolari in x_0, la matrice abbia rango inferiore a m, con una o più intere colonne nulle.

Esempio 7. Uniciclo Si consideri il modello di veicolo uniciclo già più volte incontrato con due ingressi (v, ω)

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} C_3 \\ S_3 \\ 0 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \omega$$

e le due uscite

$$\begin{array}{rcl} y_1 &=& x_1 \\ y_2 &=& x_2 \end{array}.$$

Derivando una sola volta le uscite appare l'ingresso v, e si ha

$$\Gamma(x) = 0; \quad E(x) = \begin{bmatrix} C_3 & 0 \\ S_3 & 0 \end{bmatrix}.$$

La matrice di disaccoppiamento ha rango costante ovunque, ma non è invertibile a causa del fatto che la colonna corrispondente al secondo ingresso, ω, è identicamente nulla.

In altri termini, l'ingresso di velocità lineare ha grado relativo minore di quello di velocità angolare, e quindi agisce più rapidamente, rispetto a entrambe le uscite. Una possibile soluzione consiste nel ritardare il primo

ingresso, introducendo un integratore a monte, ovvero $\dot{v} = \mathrm{a}$. Il sistema complessivo ha adesso quattro stati $z = (x_1, x_2, x_3, v)$ e due ingressi ν, ω:

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} C_3 z_4 \\ S_3 z_4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mu + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \omega,$$

Le prime derivate delle uscite $y_1 = z_1$ e $y_2 = z_2$ in cui appaiono gli ingressi sono le seconde:

$$\begin{array}{rcl} \ddot{y}_1 & = & -S_3 z_4 \omega + C_3 \nu \\ \ddot{y}_2 & = & C_3 z_4 \omega + S_3 \nu \end{array} .$$

Si ha quindi adesso

$$\Gamma(x) = 0; \quad E(x) = \begin{bmatrix} C_3 & -S_3 z_4 \\ S_3 & C_3 z_4 \end{bmatrix},$$

che ha rango pieno in ogni z con $z_4 = v \neq 0$. Finchè il veicolo non si ferma, quindi, il suo modello può essere linearizzato esattamente e completamente in retroazione. ◇

L'esempio suggerisce che in alcuni sistemi MIMO in cui uno o più degli ingressi hanno grado relativo più basso di altri, e quindi agiscono più rapidamente, possono essere controllati introducendo nuovi stati e ridefinendo gli ingressi opportunamente. Questo in effetti configura una retroazione dinamica, ovvero l'introduzione di un sistema di controllo con i suoi propri stati ed un nuovo riferimento, di cui l'ingresso originale è visto come l'uscita. In formule, dato il sistema $\dot{x} = f(x) + G(x)u$ con uscite $y = h(x)$, un controllore dinamico consiste in un nuovo sistema con stati x_c

$$\begin{array}{rcl} \dot{x}_c & = & f_c(x_c, x) + G_c(x_c, x)\nu \\ u & = & \alpha(x_c, x) + \beta(x_c, x)\nu \end{array} \tag{9.23}$$

che si affianca al primo per formare il sistema complessivo

$$\begin{array}{rcl} \dot{x} & = & f(x) + G(x)\,\alpha(x_c, x) + G(x)\,\beta(x_c, x)\nu \\ \dot{x}_c & = & f_c(x_c, x) + G_c(x_c, x)\,\nu \\ y & = & h(x). \end{array} \tag{9.24}$$

Il controllore dinamico (9.23) si dice una *estensione dinamica regolarizzante* se il sistema (9.24) ha grado relativo ben definito nell'origine. Una volta trovata una estensione dinamica regolarizzante, il nuovo sistema può

essere linearizzato e disaccoppiato I/O (anche completamente, se il rango è pieno).

Il problema di determinare se esiste una estensione dinamica regolarizzante, ed in quel caso di scrivere il controllore dinamico corrispondente, si può affrontare attraverso un algoritmo iterativo[4] che ad ogni passo introduce un integratore prima di uno degli ingressi più veloci del sistema, e ne estende lo stato conseguentemente. Per sommi capi, l'algoritmo consiste nell'ordinare le uscite in modo che le prime p righe della matrice $E(x)$ (che ha rango $p < m$) siano indipendenti, e nel cercare un elemento $E_{i_0,j_0}(x_0) \neq 0$ in una di queste righe. A questo punto si ritarda l'ingresso u_{j_0} introducendo un integratore ($\dot{u}_{j_0} = \nu_{j_0}$) e si verifica se il nuovo sistema esteso ha grado relativo, nel qual caso l'algoritmo termina con successo. Altrimenti si itera l'applicazione.

Osservazione. In generale, non ci sono garanzie che l'algoritmo di estensione dinamica termini con successo. Ad oggi, non sono note condizioni necessarie e sufficienti per determinare l'esistenza di una estensione dinamica regolarizzante. È peraltro possibile dimostrare che i sistemi che possono essere feedback linearizzati completamente attraverso estensione dinamica sono anche sistemi *differenzialmente piatti*, ovvero per i quali esistono m uscite rispetto alle quali tutti gli stati e gli ingressi possono essere scritti in qualsiasi istante t come funzioni algebriche delle uscite stesse e di un numero finito di loro derivate allo stesso istante t. I sistemi piatti sono importanti nei problemi di pianificazione ottima perché l'intera evoluzione del sistema può essere determinata attraverso la pianificazione delle traiettorie delle loro uscite "piatte" (si veda ad esempio il capitolo sulla scelta delle traiettorie ottime ai fini della ricostruzione degli stati o della identificazione di parametri incogniti). ◇

Esempio 8. Car-Like Robot Si consideri il modello cinematico di veicolo biciclo a trazione posteriore (2.43), detto anche "car-like"

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_p \\ \dot{y}_p \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 \\ \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{1}{L}\tan\phi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix},$$

con uscite le posizioni (x_p, y_p). Si verifichi per esercizio che l'algoritmo di feedback linearizzazione dinamica applicato per due passi porta alla linearizzazione completa del sistema. ◇

[4] Per una formalizzazione si veda la sezione 5.4 in A. Isidori, Nonlinear Control Systems – III Edition, Springer.